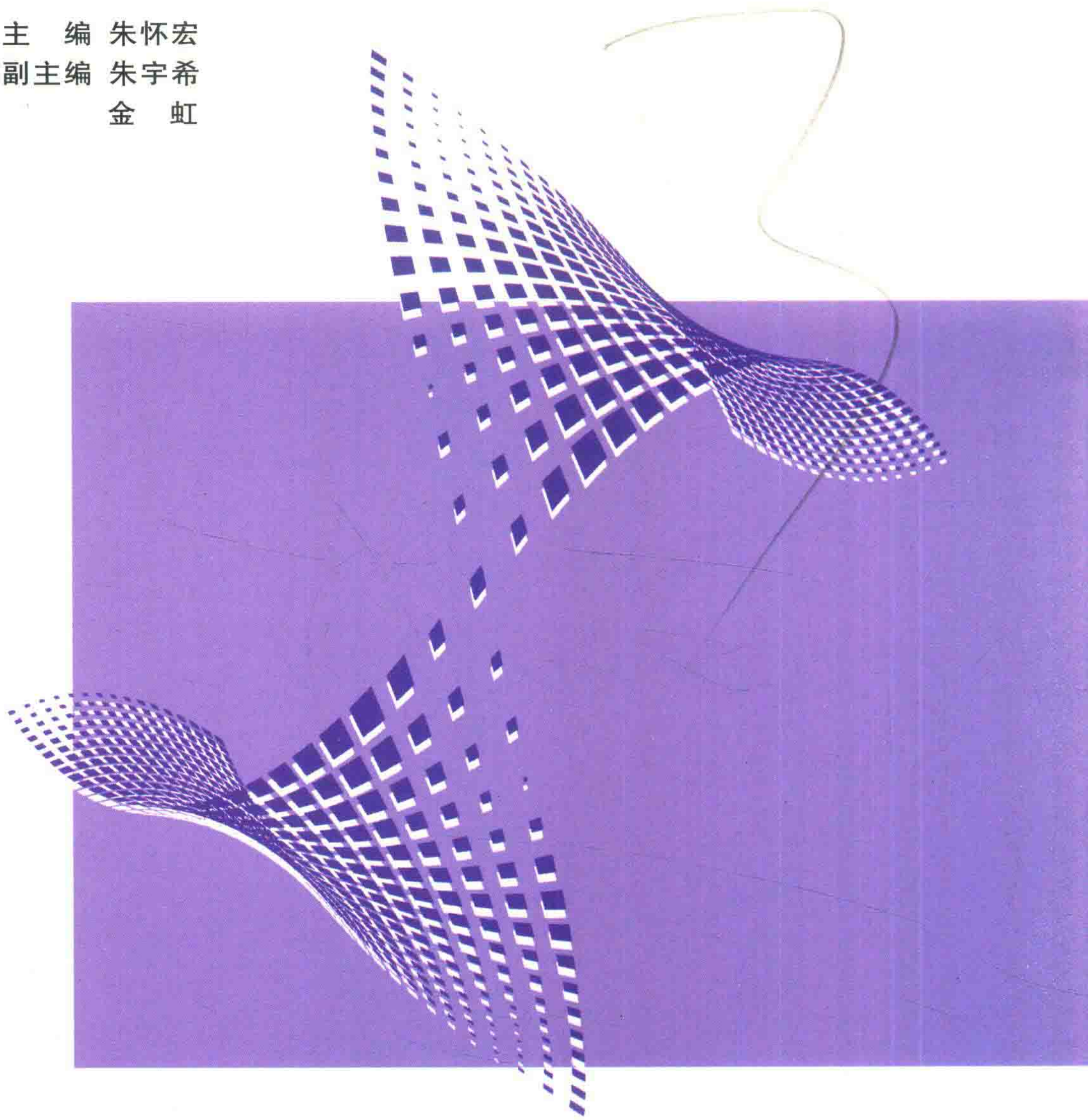
应用型本科计算机类专业“十三五”规划教材
江苏省应用型高校计算机学科联盟组织编写

离散数学简明教程

主　编　朱怀宏
副主编　朱宇希
　　　　金　虹



南京大学出版社

应用型本科计算机类专业“十三五”规划教材
江苏省应用型高校计算机学科联盟组织编写

离散数学简明教程

主　编 朱怀宏
副主编 朱宇希
　　　 金　虹

南京大学出版社

内容简介

离散数学与信息类科学密切相关，本书介绍了离散数学的基础理论，阐述了各分支之间的关系，主要内容包括：集合论、关系、函数、无限集、近世代数、图论、命题逻辑、谓词逻辑，每章末有小结及习题.

本书主要面向信息类专业的读者，而非数学专业的读者，故相关难度和深度适可而止，相对一般教材而言，本书内容较浅，读者容易理解.

本教材适合于一般高校信息类专业本、专科生、高职院校、成教类学生作为教材，带 * 标记的内容作为进一步提高之用，可以不作为教学内容.

图书在版编目(CIP)数据

离散数学简明教程 / 朱怀宏主编. — 南京 ：南京大学出版社，2018.8

ISBN 978-7-305-20701-3

Ⅰ. ①离… Ⅱ. ①朱… Ⅲ. ①离散数学—教材 Ⅳ. ①O158

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 176149 号

出版发行 南京大学出版社
社　　址 南京市汉口路 22 号　　邮编 210093
出 版 人 金鑫荣

书　　名 离散数学简明教程
主　　编 朱怀宏
责任编辑 陈亚明　王南雁　　编辑热线 025-83592401

照　　排 南京理工大学资产经营有限公司
印　　刷 常州市武进第三印刷有限公司
开　　本 787×1092 1/16 印张 9.75 字数 238 千
版　　次 2018 年 8 月第 1 版　2018 年 8 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-305-20701-3
定　　价 25.80 元

网　　址：http://www.njupco.com
官方微博：http://weibo.com/njupco
微信服务号：njuyuexue
销售咨询热线：(025)83594756

编者的话

离散数学是现代数学的一个重要分支，是计算机专业的一门核心基础课程，是计算机科学与技术的基础理论之一. 在此信息时代里，计算机科学与相关信息类专业的各类学生人数的增加及对基础理论的需求显得越来越重要.

通过离散数学的教学，不仅能为学生的专业课学习及将来所从事的软、硬件开发和应用研究打下坚实的基础，同时也能培养其抽象思维和严格逻辑推理的能力，对学习者无论从事何种工作均是有益的.

本书适合于一般高校信息类专业本、专科生、高职院校、成教类学生作为教材. 带 * 标记的内容作为进一步提高之用，作为选学内容，对某些较复杂的定理证明，专科生只需知道结论，而不必去研讨证明过程，且对大部分定理证明不作考试要求.

本人认为学习离散数学的首要目的是培养人的抽象思维和严格逻辑推理的能力，给人们在后续学习、工作及生活中提供帮助，而不是单纯为了考 60 分还是 90 分的问题；第二个目的才是为了考试，此时各人可根据自己的情况来决定要花多少时间、精力以及对离散数学研究的深度.

本人的另一个看法是离散数学可以作为任何专业的学习材料，你就是研究本书中的一章或部分章节，也会增强你的抽象思维和逻辑推理能力.

建议学习顺序：

(1) 按第一章到第八章的自然顺序学习；

(2) 先学第七、八章，然后再按第一章到第六章的顺序.

本书语言通俗、易懂，收编了很多习题参考了大量的书籍和材料，在此向有关作者表示谢意.

本教材已另出版配套习题解析.

最后，恳请各位专家及读者对本书给予批评和指正.

朱怀宏

2018 年 7 月于南京大学

目　录

第 1 章

集 合 论

集合论在现代数学的各个分支中起着重要的作用，属于现代数学的基础理论. 本书中的每一章均会涉及集合论. 对于信息类专业的人士来说，掌握集合论的思想、方法是必不可少的. 集合论是信息类专业的理论基础知识.

1.1 集合和元素的概念

集合论中的集合是一个最基本的概念，也是离散数学中的基本概念，同时在计算机科学及相关学科中是必不可少的基本概念. 类似几何学中的点、线，没有精确的定义. 一般地说，一个**集合**是指所研究对象的全体，其中每个对象是该集合中的一个**元素**. 例如，某学校中所有的教室构成一个集合，那么此集合中的某个元素则表示此校园中的某一个教室.

集合一般习惯用大写英文字母表示，集合中所含的元素用小写英文字母表示.

对任意一个集合 S 和一个元素 x，若 x 是 S 中的一个元素，记以 $x\in S$，读作"x 属于 S"，若 x 不是 S 中的一个元素，记以 $x\notin S$，读作"x 不属于 S". 显然，对任意一个元素来说，它要么属于某一集合，要么不属于某一集合，二者必居其一. 例如，对一个教室而言，它要么属于上面例中某学校教室集合中的元素，要么不属于.

集合中的元素可以是根据人们的需要所指定的任何事物，完全相同的元素在集合中只出现一次，集合用{ }将属于它的元素括在其中，各元素间用逗号分开，集合中各元素出现的先后顺序无关紧要，如$\{a, b, c\}=\{b, c, a\}$.

表示集合中的元素通常有四种方法.

1. 列举法

列举已知集合中的元素，当元素很多或无穷时，可以列出足够多的元素以反映出集合中元素的出现规律，并在表示时配合使用省略号.

例 1-1 $A=\{w,x, y, z\}$，$B=\{2, 4, 6, \cdots\}$，$C=\{0, 1, 2, \cdots, 199\}$.

分析：其中 A 列出了集合中的全部四个元素. B 表示从 2 开始的全部偶数；C 表示从 0 开始至 199 的 200 个自然数. 关键点是省略的部分必须是表达唯一的解释. 如果有 $D=\{1, 3, 4, \cdots\}$，则不能表达 D 中元素的唯一理解.

列举法方便、直观，但它对某些集合无法表示.

2. 特性刻画法（描述法）

指出一个集合中所有元素共同具有的特性，比如用 P 表示某种特性，$P(a)$ 表示元素 a 满足特性 P，则

$$A=\{a \mid P(a)\}$$

表示 A 是所有那些使 $P(a)$ 成立的元素 a 构成的集合，而不属于 A 的元素均不满足特性 P，可以用规则、公式或各种描述法来刻画特性 P，或理解为对于符合 A 中条件的元素进行的唯一解释.

例 1-2 $A=\{x \mid x$ 是整数并且 $x<0\}$；

$B=\{x \mid 0<x<1$ 并且 x 是实数$\}$；

$C=\{x \mid x$ 是 java 语言中的标识符$\}$；

$D=\{y \mid y<100$ 并且 y 是自然数$\}$.

分析：其中 A 的元素要同时满足整数与小于 0 两个条件，即负整数；B 的元素也要满足在 0 至 1 开区间之间和实数两个条件；C 的元素是符合 java 语言中规定的标识符；D 的元素是小于 100 的自然数. 本方法可以用多个条件约束集合中的元素，是一种表达能力最强的方法.

3. 通过计算规则定义

给定基础元素，由特定的计算规则定义集合中的其他元素，又称递归定义法.

例 1-3 设 $a_1=1, a_2=2, a_{i+1}=a_i+a_{i-1}, i\geqslant 2$，于是 $S=\{a_k \mid k>0$ 且 k 是整数$\}=\{1, 2, 3, 5, 8, \cdots\}$.

分析：S 中的元素 a_k 是根据计算规则计算出的第 k 个元素，此规则从第 3 个元素开始的后续元素是排列在其之前的 2 个元素相加所得的结果.

4. 文氏图

文氏图是研究集合运算与表示的一种有效的直观形象工具，它是集合的一种图形表示.

用一个矩形表示全集（在一定范围内研究的集合的元素均取自全集的一部分），将所要表示的各集合用圆形画在矩形中. 属于某集合的元素在圆内，不属于的在圆外，对于一个集合、两个集合和三个集合的文氏图分别如图 1-2、图 1-3 所示.

例 1-4 图 1-1 是两个不相交的集合 A、B 的文氏图.

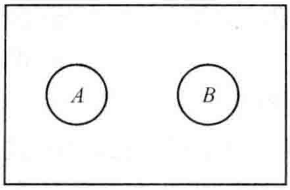


图 1-1

为研究方便，在本书中用如下的几个符号来表示常用到的特定集合：

$\mathbf{N}$：自然数集合，$\mathbf{N}=\{0, 1, 2, \cdots\}$；

$\mathbf{N}_m$：($m\geqslant 1$)，自然数集合的前 m 个元素；

$\mathbf{N}_m=\{0, 1, 2, \cdots, m-1\}$；

$\mathbf{I}$：整数集合；

$\mathbf{I}^+$：正整数集合；

$\mathbf{Q}$：有理数集合；

$\mathbf{R}$：实数集合.

定义 1-1 如果一个集合的元素是有限的，称它为有限集，否则为无限集，有限集 A 中的元素数目通常用 $|A|$ 表示. 它是一个自然数.

比如 $\mathbf{A}=\{1, 2, 3, 4, 5\}$，则 $|A|=5$

分析：$|A|=5$ 表示集合 A 中有 5 个元素，与 A 中的元素 5 是两回事

1.2 集合之间的相互关系

定义 1-2 设 A 和 B 是两个集合，如果 A 中的每个元素都能在 B 中找到，则称 A 是 B 的一个子集，记为 $A\subseteq B$，读作 A 被 B 包含，或 B 包含 A.

如果 A 中至少有一个元素不属于 B，则 A 不是 B 的子集，记为 $A\not\subseteq B$，或 $B\not\supseteq A$.

这里的包含和不包含不仅看 A，B 中元素个数的多少，更重要的是要看每个具体的元素是否在 A，B 中均存在.

例 1-5 设集合 $A=\{a, b, d, e\}$，$B=\{a, c, d\}$，$C=\{a, d\}$. ，判定是否有子集关系.

解：C 是 A 的子集，C 也是 B 的子集，而 B 不是 A 的子集.

分析：虽然 B 中元素少于 A，但 B 中元素 c 在 A 中找不到，A 也不是 B 的子集，因为 A 中的元素 b，e 在 B 中找不到.

对于任何一个集合 A，有 $A\subseteq A$，即任何一个集合是它自身的子集.

定义 1-3 设 A 和 B 是两个集合，如果 A 中的每个元素在 B 中均可找到，同时 B 中的每个元素在 A 中也均可找到，则称 A 和 B 相等，记 $A=B$.

如果 A 中至少有一个元素不在 B 中或者 B 中至少有一个元素不在 A 中，则称 A 和 B 不等，记为 $A\neq B$.

例 1-6 $A=\{a, e, i, o, u\}$，$B=\{x \mid x$ 是英文字母且 x 是元音$\}$，则有 $A=B$.

分析：从此例中可以看出两个相等的集合不一定要用相同的方法定义

集合之间的包含和相等非常重要，它们之间的关系可有如下定理.

定理 1－1 设有两个集合 A 和 B，则 $A=B$ 当且仅当 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$.

证明：假定 $A=B$，由相等的定义，A 中的每个元素可以在 B 中找到，所以 $A\subseteq B$，同样 B 中的每个元素可以在 A 中找到，所以 $B\subseteq A$.

反之，若 $A\neq B$，故 A 中至少有一个元素不在 B 中，这与 $A\subseteq B$ 矛盾，或若 B 中至少有一个元素不在 A 中，这与 $B\subseteq A$ 矛盾，所以此处不可能有 $A\neq B$，故只能有 $A=B$.

此定理常用于证明两个集合相等. 只要证明两个集合互相包含，即 $A\subseteq B$ 和 $B\subseteq A$，就可直接得出结论 $A=B$.

定义 1－4 设 A，B 是两个集合，如果 A 是 B 的子集，并且 $A\neq B$，则称 A 是 B 的真子集，记为 $A\subset B$，读作 A 被 B 真包含，或 B 真包含 A.

例 1－7 设 $A=\{a, b, c, d\}$，$B=\{a, c, d, e, f\}$，$C=\{a, c, d\}$，指出彼此的真子集关系.

解：$C\subset A$，$C\subset B$.

分析：因为 C 中的每一个元素在 A 和 B 中均能找到，而 A，B 中又有 C 中没有的元素，然而 $A\not\subset B$，因为 A 中元素 b 在 B 中找不到.

注意：一个集合中所含的元素也可以是集合.

例 1－8 设 $A=\{1\}$，$B=\{1, \{1\}\}$，$C=\{1, \{1\}, \{1, 2\}\}$指出 A、B、C 之间集合或元素的关系.

解：B，C 中有元素是集合，此时有 $A\subset B$，$B\subset C$，$A\subset C$，又有 $A\in B$，$A\in C$，此处 A 作为元素在 B，C 中均可找到，这里要注意集合表示时花括号的层次.

定义 1－5 若集合 U 可包含所讨论范围内的每一个集合，则称 U 为全集.

注意：在不同讨论范围中，U 可以是不相同的.

例 1－9 $A=\{0, 1, 2, 3, 8, 9\}$，$B=\{-5, -3, 0, 1, 5, 8\}$.

对 A 可选其全集为自然数集 N，即 $U=N$，而 B 的元素有负数则不能选 N，可选整数集 I，即 $U=I$. 可见 U 具有相对性.

定义 1－6 没有元素的集合称为空集，记为$\varnothing$.

定理 1－2 任何一个集合 A 均包含空集，$\varnothing\subseteq A$.

证明：利用反证法，若$\varnothing\not\subseteq A$，由定义，$\varnothing$中至少有一个元素不属于 A，这与空集$\varnothing$的定义相矛盾，故有$\varnothing\subseteq A$.

注意：对于任意集合 A，有$\varnothing\subseteq A\subseteq U$.

定理 1－3 空集$\varnothing$是唯一的.

证明：利用反证法，设有$\varnothing_1$和$\varnothing_2$两个空集，则由于$\varnothing_1$和空集，有$\varnothing_1\subseteq\varnothing_2$；又由于$\varnothing_2$是空集，有$\varnothing_2\subseteq\varnothing_1$，因此$\varnothing_1=\varnothing_2$.

注意：空集$\varnothing$具有特殊性，$\varnothing$和$\{\varnothing\}$是不同的，$\varnothing$表示没有元素的集合，相当于$\{\ \}$，而$\{\varnothing\}$是以空集作为元素的一个集合，此集合有一个元素$\varnothing$存在. 若 $A=\{\varnothing\}$，则有$\varnothing\subseteq A$ 及 $\varnothing\in A$；若 $A=\{\{\varnothing\}\}$，则有$\varnothing\subseteq A$，但是$\varnothing\notin A$.

1.3 集合的运算、文氏图

类似于加减法运算，$z=x+y$，z 是 x、y 两个运算对象做加法运算后所得结果.

集合的运算，是对已有的称为运算对象的集合，按照运算规则来得到一个称为运算结果的新的集合.

定义 1-7 设两个集合 A 和 B，将 A 和 B 的所有元素放在一起组成的集合称为 A 和 B 的并集，记为 $A \cup B$，即

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in \boldsymbol{B}\}.$$

例 1-10 设 $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$，$B=\{2, 4, 6, 8, 10\}$，求 $A \cup B$

解：$A \cup B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10\}$.

分析：这里 $A \cup B$ 是在 A 和 B 的基础上产生出另一个新的集合，A，B 中相同的元素在新集合中只需出现一次.

定义 1-8 设任意两个集合 A 和 B，将 A 和 B 的所有公共元素组成的集合称为 A 和 B 的交集，记为 $A \cap B$，即

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 并且 } x \in \boldsymbol{B}\}.$$

若 $A \cap B = \varnothing$ 即 A 和 B 无公共元素存在，则称 A 和 B 是分离的或不相交的.

例 1-11 设 $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$，$B=\{1, 3, 6, 8, 10\}$，求 $A \cap B$

解：$A \cap B=\{1, 3, 6\}$.

分析：此处将 A、B 两集合共有的元素构造出新的集合.

定义 1-9 设任意两个集合 A 和 B，将属于 A 但同时不属于 B 的元素组成的集合称为 A 和 B 的差，记为 $A-B$，即

$$A-B = \{x \mid x \in A \text{ 并且 } x \notin \boldsymbol{B}\}.$$

例 1-12 设 $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$，$B=\{2, 4, 6, 8, 10\}$，求 $A-B$

解：$A-B=\{1, 3, 5\}$，

分析：即以 A 为基准，将其中和 B 有相同的元素去掉，剩下就是 $A-B$.

定义 1-10 设有集合 A，将属于其全集 U，但不同时属于 A 的元素组成的集合称为 A 的补，记为$\overline{A}$，即

$$\overline{A} = \{x \mid x \in U \text{ 并且 } x \notin A\}.$$

例 1-13 设 $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$，U 为自然数全集，求$\overline{A}$解：$\overline{A}=\{0, 7, 8, \cdots\}$.

分析：$\overline{A}$是 U 和 A 的差，$\overline{A}=U-A$. 即在 U 中去掉所有 A 的元素.

注意：有一个很重要的等式 $A-B=A \cap \overline{B}$.

定义 1-11 设任意两个集合 A 和 B，将属于 A 或 B，但同时不属于 A 和 B 的元素所组成的集合称为 A 和 B 的对称差，记为 $A \oplus B$，即

$$A \oplus B = (A-B) \cup (B-A),$$
$$A \oplus B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B \text{ 或 } x \in B \text{ 且 } x \notin A\}.$$

例 1-14 设 $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$，$B=\{2, 4, 6, 8, 10\}$，求 $A \oplus B$.

解：$A \oplus B=(A-B) \cup (B-A)=\{1, 3, 5\} \cup \{8, 10\}=\{1, 3, 5, 8, 10\}$.

分析：此处将 A 中与 B 相同的元素 2、4、6 去掉，得到$\{1, 3, 5\}$；将 B 中与 A 相同的元素 2、4、6 去掉，得到$\{8, 10\}$；再将两者做并运算.

下面列出集合运算的一些基本定律：

(1) $A\cap\overline{A}=\varnothing$；

(2) $\overline{U}=\varnothing$；

(3) $\overline{\varnothing}=U$；

(4) 重补律：$\overline{\overline{A}}=A$；

(5) 德.摩根定律：$\overline{(A\cup B)}=\overline{A}\cap\overline{B}$，$\overline{(A\cap B)}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

运算优先级：补→交→并（即补运算优先级最高），可用括号改变表达式中的运算优先级.下面通过一些例子来加深大家对集合运算的理解：

例 1-15 设 A,B,C 为三个任意集合，则

$$A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C). \tag{1}$$

证明：$A\cap(B-C)=A\cap(B\cap\overline{C})=A\cap B\cap\overline{C}$.

$$\begin{aligned}(A\cap B)-(A\cap C)&=(A\cap B)\cap\overline{(A\cap C)}\\&=(A\cap B)\cap(\overline{A}\cup\overline{C})\\&=(A\cap B\cap\overline{A})\cup(A\cap B\cap\overline{C})\\&=\varnothing\cup(A\cap B\cap\overline{C})\\&=(A\cap B\cap\overline{C}).\end{aligned} \tag{2}$$

由(1)，(2)式得 $A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C)$

分析：(1) 式中用到了 $B-C=B\cap\overline{C}$，(2)式中也运用到了差运算用交运算替换；德.摩根定律 $\overline{(A\cap C)}=\overline{A}\cup\overline{C}$；$(A\cap B)$对$\overline{A}$、$\overline{C}$的分配律；$A\cap\overline{A}=\varnothing$；$\varnothing\cap B=\varnothing$.

注意：证明等式可以从左边出发往右边证；也可以从右边出发证明到左边；也可以分别从左边和右边出发证明到等于同一个式子（如本例）.

例 1-16 证明等式$(A-B)\oplus B=A\cup B$

证明：
$$\begin{aligned}(A-B)\oplus B&=(A\cap\overline{B})\oplus B\\&=((A\cap\overline{B})-B)\cup(B-(A\cap\overline{B}))\\&=(A\cap\overline{B}\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{(A\cap\overline{B})})\\&=(A\cap\overline{B})\cup(B\cap(\overline{A}\cup B))\\&=(A\cap\overline{B})\cup B\\&=(A\cup B)\cap(\overline{B}\cup B)\\&=(A\cup B)\end{aligned}$$

分析：多次运用到了 $A-B=A\cap\overline{B}$，将差运算用交运算替代；$\overline{B}\cap\overline{B}=\overline{B}$；德.摩根定律.

对于 $B\cap(\overline{A}\cup B)$可以理解为括号里的 B 与$\overline{A}$做并运算，在 B 中可能增加了一些$\overline{A}$的元素得到$\overline{A}\cup B$，但是再与 B 做交运算是取$(\overline{A}\cup B)$与 B 的共有元素，即得到 B；$\overline{B}\cup B$ 是全集 U，U 与$(A\cup B)$做交运算，结果得到共有元素 $A\cup B$.

注意：通常要证明集合之间的包含，首先从被包含一方的集合中任取一元素 x，然后根据题目给出的条件、集合的定义、定律，推出此 x 也是属于包含方集合中的元素即可.

例 1-17 如果 $A\subseteq B$，且 $C\subseteq D$，则有

(1) $(A\cup C)\subseteq(B\cup D)$；

(2) $(A\cap C)\subseteq(B\cap D)$.

证明:(1) 任取 $x\in(A\cup C)$,于是有 $x\in A$ 或 $x\in C$. 由于条件 $A\subseteq B,C\subseteq D$,故有 $x\in B$ 或 $x\in D$,从而有 $x\in(B\cup D)$,所以$(A\cup C)\subseteq(B\cup D)$.

(2) 任取 $x\in(A\cap C)$,于是有 $x\in A$ 并且 $x\in C$. 由于条件 $A\subseteq B,C\subseteq D$,故有 $x\in B$ 并且 $x\in D$,从而有 $x\in(B\cap D)$,所以$(A\cap C)\subseteq(B\cap D)$.

分析:(1) 中在包含一方$(A\cup C)$中任取一 x,根据并运算的定义,$x\in A$ 或 $x\in C$,又根据本题给出的条件 $A\subseteq B,C\subseteq D$;可以推出 x 也属于 B 或 D,即 $x\in B$ 或 $x\in D$,由并运算的定义得 $x\in(B\cup D)$,即已推出 x 也是包含方 $B\cup D$ 的元素,故得证. 对(2)的分析类似.

例 1-18 证明等式:$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$.

证明:对任意的 $x\in A-(B\cup C)\Leftrightarrow x\in A$ 并且 $x\notin B\cup C$

$\Leftrightarrow x\in A$ 并且$(x\in\overline{B\cup C})$

$\Leftrightarrow x\in A$ 并且$(x\in(\overline{B}\cap\overline{C}))$

$\Leftrightarrow x\in A$ 并且$(x\in\overline{B}$并且 $x\in\overline{C})$

$\Leftrightarrow(x\in A$ 并且 $x\notin B)$并且$(x\in A$ 并且 $x\notin C)$

$\Leftrightarrow x\in A-B$ 并且 $x\in A-C$

$\Leftrightarrow x\in(A-B)\cap(A-C)$,

故原式成立.

分析:本题用定理 1-1,要证两边集合相等,用两边互相包含的方法来证. 根据差运算的定义,$A-(B\cup C)$相当于其中的元素 $x\in A$ 并且 $x\notin(B\cup C)$, $x\notin(B\cup C)$相当于 $x\in\overline{B\cup C}$,根据摩根定律$\overline{B\cup C}$相当于$\overline{B}\cap\overline{C}$,证明中出现的并且是由交运算的定义而来的,多出现一次 $x\in A$ 是由 $A=A\cap A$ 而来的.

上述符号"$\Leftrightarrow$"表示当且仅当,即其左、右两边可以相互推出;而符号"$\Rightarrow$"表示可由左边式子推出右边式子.

注意:在证明集合相等式时,可以直接用公式、定律一步步地用等号"$=$"从左到右或从右到左来推证;也可以利用集合运算符的定义用"$\Rightarrow$"和"$\Leftrightarrow$"符号来推证(如例 1-18).

定义 1-12 设 S 是一个有限集合,则 S 的所有子集作为元素所构成的集合称为 S 的幂集,记为 $\rho(S)$,即

$$\rho(S)=\{A\mid A\subseteq S\}.$$

注意:若 S 有 n 个元素,则 $\rho(S)$应有 2^n 个元素.

例 1-19 设 $S=\{1,\ \{2,\ 3\}\}$,求 $\rho(S)$

解:$\rho(S)=\{\varnothing,\ \{1\},\ \{\{2,\ 3\}\},\ \{1,\ \{2,\ 3\}\}\}$.

分析:此处 S 的两个元素分别为 1 和$\{2,\ 3\}$,要用它们来构造集合去作为 $\rho(S)$的元素时,必须注意括号的层次,即把它们作为子集合时,应该分别再加一层括号. $\varnothing$和 S 也是 S 的子集,故它们也是 $\rho(S)$的元素. 此处 S 有 2 个元素,$\rho(S)$应该有 4 个元素.

例 1-20 设 $S=\varnothing$,则 $\rho(S)=\{\varnothing\}$.

相应有

$$\rho(\rho(\varnothing))=\{\varnothing,\ \{\varnothing\}\}.$$

分析:此集合中有$\varnothing$、$\{\varnothing\}$两个元素.

$$\rho(\rho(\rho(\varnothing)))=\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}.$$

分析：此集合有$\varnothing$、$\{\varnothing\}$、$\{\{\varnothing\}\}$、$\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$4 个元素.

幂集具有如下性质：

(1) $A\subseteq B$ 当且仅当 $\rho(A) \subseteq \rho(B)$；

(2) $\rho(A)\cup\rho(B) \subseteq \rho(A\cup B)$；

(3) $\rho(A)\cap\rho(B)=\rho(A\cap B)$.

文氏图是集合的一种图形表示，用一个矩形表示全集 U，矩形内的一个圆表示某个集合，属于此集合的元素均在圆内. 文氏图是一种直观、形象的工具，可用于集合的运算及等式的证明.

如图 1-2 和图 1-3 所示是一些基本运算的文氏图表示.

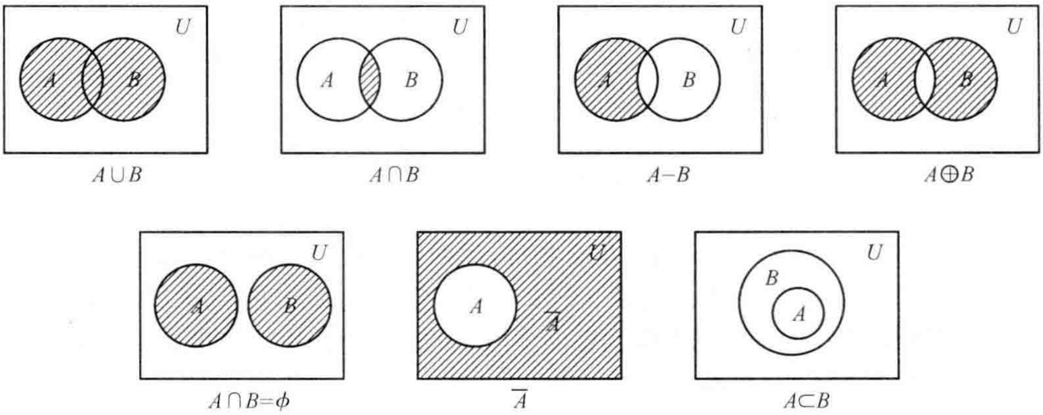


图 1-2

例 1-21 设 A,B,C 是全集 U 的子集，用文氏图证明：

$$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$$

证明：分步骤列出文氏图，如图 1-2 所示.

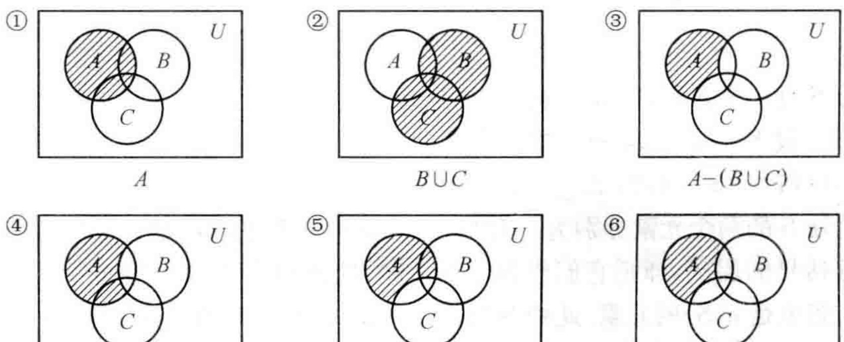


图 1-3

比较图③和图⑥中阴影部分是相同的，故上述等式成立.

分析：以①中 A 的文氏图出发，去掉②中 $B\cup C$ 阴影表示的共同部分，即得到③；以④和

⑤的共同阴影部分表示的交运算即得到⑥

定理 1-4 如果 A 和 B 是分离的有限集合,则有:$|A\cup B|=|A|+|B|$.

证明:A 中有 $|A|$ 个元素在 $A\cup B$ 中,而不属于 A 中的其余元素在 B 中,由于 A 和 B 是分离的,B 中也没有元素在 A 中,所以有 $|B|$ 个不在 A 中的元素在 B 中,故 $A\cup B$ 的元素个数为

$$|A\cup \boldsymbol{B}|=|A|+|B|.$$

定理 1-5 如果 A 和 B 是有限集合,则有

$$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$$

这是 A 和 B 不分离时的一般情况(若分离是 $|A\cap B|=0$,即定理 1-4)

定理 1-6 对任意三个有限集合 A,B,C,有

$$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$$

证明:由定理 1-5,又因为 $A\cup B\cup C=(A\cup B)\cup C$,则

$$\begin{aligned}|A\cup B\cup C|&=|A\cup B|+|C|-|(A\cup B)\cap C|\\&=|A|+|B|-|A\cap B|+|C|-|(A\cap C)\cup(B\cap C)|\\&=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-(|A\cap C|+|B\cap C|\\&\quad-|(A\cap C)\cap(B\cap C)|)\\&=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|\\&\quad+|A\cap B\cap C|\end{aligned}$$

还有一些基本定律:

(1) 结合律

$$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$$
$$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$$
$$A\oplus(B\oplus C)=(A\oplus B)\oplus C$$

(2) 交换律

$$A\cup B=B\cup A$$
$$A\cap B=B\cap A$$
$$A\oplus B=B\oplus A$$

(3) 分配率

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$$
$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$
$$A\cap(B\oplus C)=(A\cap B)\oplus(A\cap C)$$

(4) 等幂律

$$A\cup A=A$$
$$A\cap A=A$$

（5）吸收率

$$A\cup(A\cap B)=A$$
$$A\cap(A\cup B)=A$$

（6）恒等率

$$A\cup\varnothing=A$$
$$A\cap U=A$$
$$A\cup U=U$$
$$A\cap\varnothing=\varnothing$$

（7）取补率

$$A\cup\overline{A}=U$$

例 1-22 在对 100 人的调查中，有 46 人爱好乒乓球，32 人爱好篮球，31 人爱好排球，15 人同时爱好乒乓球和篮球，12 同时爱好乒乓球和排球，11 同时爱好篮球和排球，有 20 人三种爱好都没有，问同时爱好这三种运动的有多少人？仅爱好一种运动的各有多少人？

解：设 A 为爱好乒乓球的人的集合，B 为爱好篮球的人的集合，C 为爱好排球的人的集合，根据题意得

$$|A|=46,|B|=32,|C|=31,$$
$$|A\cap B|=15,|A\cap C|=12,|B\cap C|=11,$$
$$100-|A\cup B\cup C|=20,|A\cup B\cup C|=80.$$
$$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$$
$$80=46+32+31-15-12-11+|A\cap B\cap C|$$
$$|A\cap B\cap C|=9$$

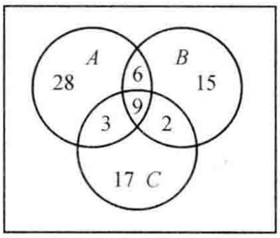


图 1-4

将已知及计算所得各数据填入如图 1-4 所示的文氏图中，可得出所有相关的数据，同时爱好这三种运动的人有 9 人，仅爱好乒乓球的人为 28 人，仅爱好篮球的人为 15 人，仅爱好排球的人为 17 人.

分析：本题被调查的总人数为 100 人，但有 20 人与相关运动均无关系，故此时 $|A\cup B\cup C|=80$，同时两项运动爱好的人数即是两个相应集合的交集，代入相应定理表示的等式，可求出同时爱好三项运动的人数为 9 人，然后将文氏图中各集合间的相交与不相交各部分的数字一次计算并填入.

定理 1-4，1-5，1-6 称为有限集合的包含排斥原理.

小　结

集合和元素是集合论中的原始概念，元素和集合的关系为是否属于的关系，一个元素要

么属于某集合，要么不属于，两者居其一. 常用列举法、特性刻画法、通过计算规则定义和文氏图四种方法来表示集合.

集合间的基本关系有相等和不相等、包含和不包含. 常用分别证明 $A\subseteq B$，$B\supseteq A$ 来求证 $A=B$. $A\subseteq B$ 称 A 为 B 的子集，即 B 包含 A.

全集、空集、幂集有各自特定的含义.

集合间常见的运算有并、交、差、补、对称差. 文氏图是一种表示集合或集合间运算的直观工具.

定理 1－5，定理 1－6 常用于解决一些实际问题.

习　　题

1. 用列举法表示下列各集合的元素：

(1) $X=\{x\mid x^2<90, x$ 为正奇数$\}$；

(2) 小于等于 26 的素数；

(3) $\{n\in N, n^2-1=15$ 并且 $n^3=80\}$.

2. 设 N 的子集：$A=\{1,3,5,7,8\}$，$B=\{n\mid n^2\leqslant 70\}$，$C=\{n\mid n$ 整除 $50\}$，$D=\{n\mid n=2^m, m\in N, 0\leqslant m\leqslant 5\}$，求下列集合：

(1) $A\cup(B\cap(C\cup D))$；　　(2) $B-(A\cup C)$；

(3) $(\overline{A}\cap C)\cup D$.

3. 求下列集合的幂集：

(1) $\{2,4,6\}$　　(2) $\{\varnothing,1,\{1\}\}$

4. 对于任意集合 X,Y,Z，判断下列各题的正确性：

(1) 若 $X\in Y$，$Y\subseteq Z$，则 $X\in Z$；

(2) 若 $X\in Y$，$Y\subseteq Z$，则 $X\subseteq Z$；

(3) 若 $X\subseteq Y$，$Y\in Z$，则 $X\in Z$；

(4) 若 $X\subseteq Y$，$Y\in Z$，则 $X\subseteq Z$.

5. 判断下列各式是否成立？

(1) $\{a\}\in\{\{a\}\}$；　　(2) $\{a\}\subseteq\{\{a\}\}$；

(3) $\{a\}\in\{a,\{a\}\}$；　　(4) $\{a\}\subseteq\{a,\{a\}\}$.

6. 设 U 为全集，A,B 为非空集合且 $B\subset A$，则下列运算结果中是否有空集？

(1) $A\cap B$；　(2) $\overline{A}\cap\overline{B}$；　(3) $\overline{A}\cap B$；　(4) $A\cap\overline{B}$.

7. 求证 $A-(A-B)=A\cap B$.

8. 已知 $A\subseteq B$ 且 $A\in B$，下列结论中哪个是正确的？

(1) 是不可能的；　　(2) 是可能的；

(3) A 必须是空集；　　(4) B 必须是全集；

(5) A,B 均为空集.

9. 集合$\{1\}$的所有子集是下列哪一个？

(1) $\varnothing$；　(2) $\{\varnothing\}$；　(3) $\varnothing,\{1\}$；　(4) $\{\varnothing,\{1\}\}$.