

奥数精选

题库



数学解题策略 问题解答

(第二版)

朱华伟 钱展望 编著



科学出版社

一题 数 库 精选

数学解题策略 问题解答

(第二版)

朱华伟 钱展望 编著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书给出了作者编著的《数学解题策略》(第二版)中全部习题的详解,有的给出了多种解法.这些习题的解答几乎涵盖了数学竞赛中所有的解题策略.本书对部分习题还做了点评.这些习题的点评不拘形式,或是问题的引申和推广,或是类题、似题的分析比较,或是问题的多种解法,或是试题的来源、背景.点评的目的是使读者开阔眼界,加深对问题的理解,培养举一反三的能力.

此书可供高中数学资优生、准备参加高中数学竞赛的选手、中学数学教师、高等师范院校数学教育专业本科生、研究生及高师院校数学教师,数学爱好者及数学研究工作者参考.

图书在版编目(CIP)数据

数学解题策略问题解答 / 朱华伟, 钱展望编著. —2 版. —北京: 科学出版社, 2018. 5

(奥数题库精选)

ISBN 978-7-03-056431-3

I. ①数… II. ①朱… ②钱… III. 数学—竞赛题—题解 IV. ①O1-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2018) 第 017423 号

责任编辑: 李 敏 / 责任校对: 彭 涛

责任印制: 肖 兴 / 封面设计: 黄华斌

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

文林印务有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2011 年 5 月第 一 版 开本: 720×1000 1/16

2018 年 5 月第 二 版 印张: 21

2018 年 5 月第一次印刷 字数: 490 000

定价: 99.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

主要作者简介

朱华伟，二级教授，特级教师，博士生导师

美国加利福尼亚州立大学洛杉矶分校高级访问学者。湖北省十大杰出青年。享受国务院政府特殊津贴专家。

兼任国际教育数学协会常务副理事长，国际数学竞赛学术委员会副主席，国际中小学生数学能力检测学术委员会副主席，中国教育数学学会常务副理事长兼秘书长，全国华罗庚金杯赛主试委员。多次参与中国数学奥林匹克、全国高中数学联赛、女子数学奥林匹克、西部数学奥林匹克及青少年数学国际城市邀请赛的命题工作。曾任国际数学奥林匹克中国队领队、主教练，率中国队获团体冠军。

在国内外学术期刊上发表论文 100 余篇，出版著作 100 余部。

张景中谈奥数

华伟教授认为，竞赛数学是教育数学的一部分。这个看法是言之成理的。数学要解题，要发现问题、创造方法。年复一年进行的数学竞赛活动，不断地为数学问题的宝库注入新鲜血液，常常把学术形态的数学成果转化为可能用于教学的形态。早期的国际数学奥林匹克试题，有不少进入了数学教材，成为例题和习题。竞赛数学与教育数学的关系，于此可见一斑。

写到这里，忍不住要为数学竞赛说几句话。有一阵子，媒体上面出现不少讨伐数学竞赛的声音，有的教育专家甚至认为数学竞赛之害甚于黄、赌、毒。我看了有关报道后第一个想法是，中国现在值得反对的事情不少，论轻重缓急还远远轮不到反对数学竞赛吧。再仔细读这些反对数学竞赛的意见，可以看出来，他们反对的实际上是某些为牟利而又误人子弟的数学竞赛培训。就数学竞赛本身而言，是面向青少年中很小一部分数学爱好者而组织的活动。这些热心参与数学竞赛的数学爱好者（还有不少数学爱好者参与其他活动，例如青少年创新发明活动、数学建模活动、近年来设立的丘成桐中学数学奖），估计不超过约两亿中小学生的百分之五。从一方面讲，数学竞赛培训活动过热产生的消极影响，和升学考试体制以及教育资源分配过分集中等多种因素有关，这笔账不能算在数学竞赛头上；从另一方面看，大学招生和数学竞赛挂钩，也正说明了数学竞赛活动的成功因而得到认可。对于

青少年的课外兴趣活动，积极的对策不应当是限制堵塞，而是开源分流。发展多种课外活动，让更多的青少年各得其所，把各种活动都办得像数学竞赛这样成功并且被认可，数学竞赛培训活动过热的问题自然就化解或缓解了。

摘自《走进教育数学》丛书总序

第二版前言

《数学解题策略》第一版至今已经9年了，应广大读者朋友们的鼓励和要求，笔者于7年前编著出版了该书的习题和解答。据近几年的反馈，能够得到不少读者的肯定和喜爱，心中万分感激。

随着“掌握数学就是意味着善于解题”、“数学真正的组成部分应该是问题和解，解题才是数学的心脏”这类名言的广泛流传，以及国内课堂素有重视解题训练的传统，加上学子们在题海中畅游的强烈愿望，我国的解题教学和实践规模空前。同时，随着数学竞赛在我国迅速普及和深入发展，数学竞赛相关的书籍越编越厚，习题越来越多。因此，笔者在几年前编著《数学解题策略》、《从数学竞赛到竞赛数学》及两书的配套习题解答《数学解题策略问题解答》、《竞赛数学问题解答》时，深感责任重大，投入了非常多的时间和精力。希望将一些数学竞赛爱好者从盲目的题海机械训练中解放出来。加强对学生学习兴趣、创新精神、应用意识和分析问题、解决问题能力的培养。

在编著本书时，笔者时刻提醒自己，作为《数学解题策略》第二版的习题解答，除了给出每一道精心挑选的习题详解之外，应注重以点评的方式，加强对竞赛数学思维特性的总结和提炼。譬如，注重对类题、似题的分析比较，对一题多解和多解归一的探究，对问题的来源和背景的挖掘，对问题的引申和推广的讨论等。以期努力揣测和还原命题者或解题者对问题火热的思考过程，从而加深读者对问题的理解，培养举一反三的能力。

该书出版以来，笔者非常注意在各级各类竞赛选手培训及教师同行交流中发现的新颖巧妙解法的收集和整理，借此第二版修

订机会，笔者将其更新上去。

值得一提的是，笔者在《数学解题策略 (第二版)》第 25 章中以 4 个案例的形式阐述了竞赛数学命题的一点心得体会，得到不少读者的喜爱和称赞，但不少读者反映，背景 3——Schur 不等式和背景 4——恒等式 $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$ 后面给出的习题颇有难度但没有给出解答。借此第二版修订机会，笔者将其完整的解答整理出来，并将其单独作为本书的第 25 章和第 26 章，以方便读者更好地研讨和交流。

最后，希望本书的修订能得到大家的鼓励 and 批评。

朱华伟

2018 年 1 月

第一版前言

本书是针对作者编著的《数学解题策略》所编写的一本习题指导书.《数学解题策略》的前24章介绍了24种数学解题策略,它们分别是观察、归纳与猜想,数学归纳法,枚举与筛选,整数的表示方法,逻辑类分法,从整体上看问题,化归,退中求进,类比与猜想,反证法,构造法,极端原理,局部调整法,夹逼,数形结合,复数与向量,变量代换法,奇偶分析,算两次,对应与配对、递推方法,抽屉原理,染色与赋值,不变量原理,这几乎涵盖了数学竞赛中所有的解题策略.《数学解题策略》的每一章后面都附有大量的习题,由于篇幅有限,我们没有在《数学解题策略》中给出相应习题的解答,而这些习题的详细解答构成了本书的主要内容.

在国内外各项数学竞赛中出现了很多题目,形容为题海并不为过.在题海中畅游是每位读者的愿望.但是,您如果接触过数学竞赛中的题目,就会发现实现这个愿望不是一件容易的事.这主要是因为数学竞赛中的题目与常规数学教材中的题目不同,常规题目一般有明显的知识背景和可套用的法则,而数学竞赛中的题目恰恰相反.解决数学竞赛中的问题不仅需要扎实的学科知识基础,更需要灵活的方法策略.

若想在题海中畅游,首先要保证不会迷失方向.为了使读者在比较短的时间内具备辨别方向的能力,作者从收集到的大量的题目中精选出具有代表性的题目(这些题目的主要来源是世界各地数学奥林匹克试题、世界各地为准备国际数学奥林匹克的训练题以及选拔考试试题、国际数学奥林匹克试题及备选题),然后按照上面提到的数学解题策略进行分类.读者通过这些题目的练

习, 可以更快地掌握数学竞赛中的各种解题策略 (也就是解决问题的方向)。也许有时这些解题策略并不能让您得心应手, 但是, 即使简单几步的尝试, 也还是可以打开您的思路。在解决数学问题甚至其他学科的问题时, 这些解题策略给读者提供了各种可以尝试的途径。

由于这些题目代表了世界各地高层次数学竞赛的水平, 所以读者通过学习和思考这些题目, 可以迅速站到数学竞赛的前沿。如果您对上面提到的各种解题策略已经很熟悉, 那么本书可以作为独立的竞赛数学习题集。如果您还不太熟悉这些解题策略, 不妨结合《数学解题策略》这本书所讲的内容来细细品味这些题目所表达的思想内涵。

本书对部分习题还做了点评。这些习题的点评不拘形式, 或是问题的引申和推广, 或是类题、似题的分析比较, 或是问题的多种解法, 或是试题的来源、背景。问题的解答呈现给读者的往往是经过提炼的思维过程。从问题的解答中我们可以感受到数学方法的严谨与巧妙, 还有解题高手独特的思维方式。而问题的点评在一定程度上还原了命题者或解题者对问题火热的思考过程, 还可以使读者开阔眼界, 加深对问题的理解, 也可以培养读者举一反三的能力。

在本书的编写过程中, 参阅了众多的文献资料, 并得到郑焕、付云皓、邹宇、张传军、周弋林等同学的协助, 得到科学出版社的大力扶持。在此一并表示感谢。对于本书存在的问题, 热忱希望读者不吝赐教。



2011年1月

目 录

张景中谈奥数

第二版前言

第一版前言

第1章 观察、归纳与猜想	1
1.1 问题	1
1.2 解答	3
第2章 数学归纳法	12
2.1 问题	12
2.2 解答	15
第3章 枚举与筛选	33
3.1 问题	33
3.2 解答	34
第4章 整数的表示方法	43
4.1 问题	43
4.2 解答	45
第5章 逻辑类分法	56
5.1 问题	56
5.2 解答	57
第6章 从整体上看问题	67
6.1 问题	67
6.2 解答	69
第7章 化归	77
7.1 问题	77
7.2 解答	80
第8章 退中求进	94
8.1 问题	94
8.2 解答	95

第9章 类比与猜想	105
9.1 问题	105
9.2 解答	106
第10章 反证法	114
10.1 问题	114
10.2 解答	117
第11章 构造法	128
11.1 问题	128
11.2 解答	130
第12章 极端原理	140
12.1 问题	140
12.2 解答	142
第13章 局部调整法	153
13.1 问题	153
13.2 解答	155
第14章 夹逼	165
14.1 问题	165
14.2 解答	167
第15章 数形结合	177
15.1 问题	177
15.2 解答	179
第16章 复数与向量	192
16.1 问题	192
16.2 解答	195
第17章 变量代换法	210
17.1 问题	210
17.2 解答	212
第18章 奇偶分析	224
18.1 问题	224
18.2 解答	226
第19章 算两次	237
19.1 问题	237
19.2 解答	238

第 20 章 对应与配对	246
20.1 问题	246
20.2 解答	248
第 21 章 递推方法	259
21.1 问题	259
21.2 解答	260
第 22 章 抽屉原理	270
22.1 问题	270
22.2 解答	272
第 23 章 染色和赋值	279
23.1 问题	279
23.2 解答	283
第 24 章 不变量原理	296
24.1 问题	296
24.2 解答	298
第 25 章 Schur 不等式	306
25.1 问题	306
25.2 解答	307
第 26 章 恒等式 $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$	314
26.1 问题	314
26.2 解答	315

第 1 章 观察、归纳与猜想

1.1 问 题

1. (1)图 1-1 的(a)(b)(c)(d)为四个平面图. 数一数, 每个平面图各有多少顶点? 多少条边? 它们分别围成了多少个区域? 请将结果填入表 1-1(按填好的样子做).

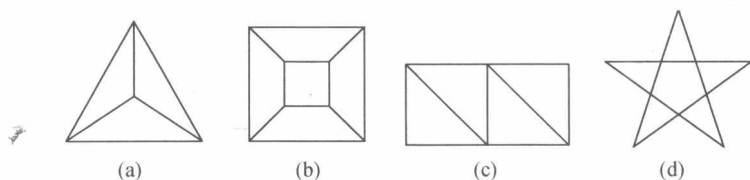


图 1-1

表 1-1

图号	顶点数	边数	区域数
(a)	4	6	3
(b)			
(c)			
(d)			

(2)观察表 1-1, 推断一个平面图的顶点数、边数、区域数之间有什么关系.

(3)现已知某个平面图有 999 个顶点, 且围成了 999 个区域, 试根据以上关系确定这个图有多少条边.

2. 角谷猜想.

任取一个大于 2 的自然数, 反复进行下述两种运算:

(1)若是奇数, 就将该数乘以 3 再加上 1;

(2)若是偶数, 则将该数除以 2.

例如,对3反复进行这样的运算,有

$$3 \rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1,$$

对4,5,6反复进行上述运算,其最终结果也都是1,再对7进行这样的运算,有

$$7 \rightarrow 22 \rightarrow 11 \rightarrow 34 \rightarrow 17 \rightarrow 52 \rightarrow 26 \rightarrow 13$$

$$\rightarrow 40 \rightarrow 20 \rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1.$$

运用归纳推理建立猜想(通常称为“角谷猜想”):_____.

3. 设 $f(x)=x^2+x+11$,取 $x=1,2,3,\dots,9$,则

$$f(1)=13, \quad f(2)=17, \quad f(3)=23,$$

$$f(4)=31, \quad f(5)=41, \quad f(6)=53,$$

$$f(7)=67, \quad f(8)=83, \quad f(9)=101.$$

可以看出,这些值都是素数.从这些特殊情况是否可以归纳出:对一切正整数 x , $f(x)=x^2+x+11$ 的值都是素数.

4. 一个直角三角形的三边长都是正整数,这样的直角三角形称为整数勾股形,其三边的值叫做勾股弦三数组,下面给出一些勾股弦三数组(勾,股,弦):

$$(3,4,5), \quad (5,12,13), \quad (7,24,25), \quad (8,15,17),$$

$$(20,21,29), \quad (360,319,481), \quad (2400,1679,2929), \quad \dots$$

观察这些勾股弦三数组,请你归纳一个猜想,并加以证明.

5. 依次取三角形数的末位数字,排列起来可以构造一个无限小数

$$N=0.1360518\dots,$$

试证明 N 是有理数.

6. 整数 a,b,c 表示三角形三边的长,其中 $a \leq b \leq c$,试问当 $b=n$ (n 是正整数)时,这样的三角形有几个?

7. 在平面上有 n 条直线,任何两条都不平行,并且任何三条都不交于同一点,这些直线能把平面分成几部分?

8. n 个平面,最多把空间分成几个部分?

9. 在平面上画 n 个三角形,问:

(1)最多能将这个平面分成多少块?

(2)最多能有多少个交点(包括这些三角形的顶点在内)?

10. 要用天平称出从1克,2克,3克,……,40克这些不同的整数克质量,至少要用多少个砝码?这些砝码的质量分别是多少?

11. 一条直径将圆周分成两个半圆周,在每个分点标上素数 p ;第二次将两个半圆周的每一个分成两个相等的 $\frac{1}{4}$ 圆周,在新产生的分点标上相邻两数和

的 $\frac{1}{2}$; 第三次将四个 $\frac{1}{4}$ 圆周的每一个分成两个相等的 $\frac{1}{8}$ 圆周, 在新产生的分点标上其相邻两数和的 $\frac{1}{3}$; 第四次将八个 $\frac{1}{8}$ 圆周的每一个分成两个相等的 $\frac{1}{16}$ 圆周, 在新产生的分点标上其相邻两数和的 $\frac{1}{4}$, 如此进行了 n 次, 最后, 圆周上的所有数字之和为 17170, 求 n 和 p 的值各为多少?

12. 计算: $C_n^0 - C_{n-1}^1 + C_{n-2}^2 - C_{n-3}^3 + \cdots$.

13. 正整数数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = 1, a_{n+1} = \begin{cases} a_n - n, & a_n > n, \\ a_n + n, & a_n \leq n. \end{cases}$

(1) 求 a_{2008} ;

(2) 求最小的正整数 n , 使 $a_n = 2008$.

14. 证明: 存在 8 个连续的正整数, 它们中的任何一个都不能表示为

$$|7x^2 + 9xy - 5y^2|$$

的形式, 其中 $x, y \in \mathbf{Z}$.

1.2 解 答

1. (1) 填表如表 1-2 所示.

表 1-2

图号	顶点数	边数	区域数
(a)	4	6	3
(b)	8	12	5
(c)	6	9	4
(d)	10	15	6

(2) 由表 1-2 可以看出, 所给四个平面图的顶点数、边数及区域数之间有下列关系:

$$4 + 3 - 6 = 1, \quad 8 + 5 - 12 = 1,$$

$$6 + 4 - 9 = 1, \quad 10 + 6 - 15 = 1.$$

所以可以推断: 任何平面图的顶点数、边数及区域数之间, 都有下述关系:

$$\text{顶点数} + \text{区域数} - \text{边数} = 1.$$

(3) 由上面所给的关系, 可知所求平面图的边数.

$$\begin{aligned}\text{边数} &= \text{顶点数} + \text{区域数} - 1 \\ &= 999 + 999 - 1 = 1997.\end{aligned}$$

点评 任何平面图的顶点数、区域数及边数都能满足我们所推断的关系. 当然, 平面图有许许多多, 且千变万化, 然而不管怎么变化, 顶点数加区域数再减边数, 最后的结果永远都等于 1, 这是不变的. 因此,

$$\text{顶点数} + \text{区域数} - \text{边数}$$

就称为平面图的不变量(有时也称为平面图的欧拉数——以数学家欧拉的名字命名).

2. 从任意一个大于 2 的自然数出发, 反复进行(1)、(2)两种运算, 最后必定得到 1.

点评 这个猜想后来被人们多次检验, 发现对 7000 亿以下的数都是正确的, 究竟是否对大于 2 的一切自然数都正确, 至今还不得而知.

3. 不能. 事实上, 当 $x = 10$ 时, $f(10) = 10^2 + 10 + 11 = 121$, 这是个合数.

4. 观察上述勾股弦三数组, 可以归纳得出如下猜想: 整数勾股形中, 勾、股中必有一个是 3 的倍数.

现证明如下: 勾股弦三数组是不定方程 $x^2 + y^2 = z^2$ 的一组正整数解.

如果 x, y 中无 3 的倍数, 则 $x = 3k \pm 1$ 型的数, $y = 3m \pm 1$ 型的数, 它们的平方都是被 3 除余 1 的整数. 由此可知 $x^2 + y^2$ 是被 3 除余 2 的整数. 但被 3 除余 2 的数一定不是完全平方数, 所以与等号右边的 z^2 相矛盾. 因此 x, y 中至少有一个是 3 的倍数. 猜想命题“整数勾股形中, 勾、股中必有一个是 3 的倍数”被证明为真.

点评 进一步还可以得到如下的猜想:

“整数勾股形中, 勾、股中必有一个是 4 的倍数”.

“整数勾股形中, 勾、股、弦中必有一个是 5 的倍数”.

这两个猜想同样都是真命题, 其证明留给同学们作为练习.

5. 所谓三角数是指如下类型的数:



第 n 个三角数是 $1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$, 记作 a_n .