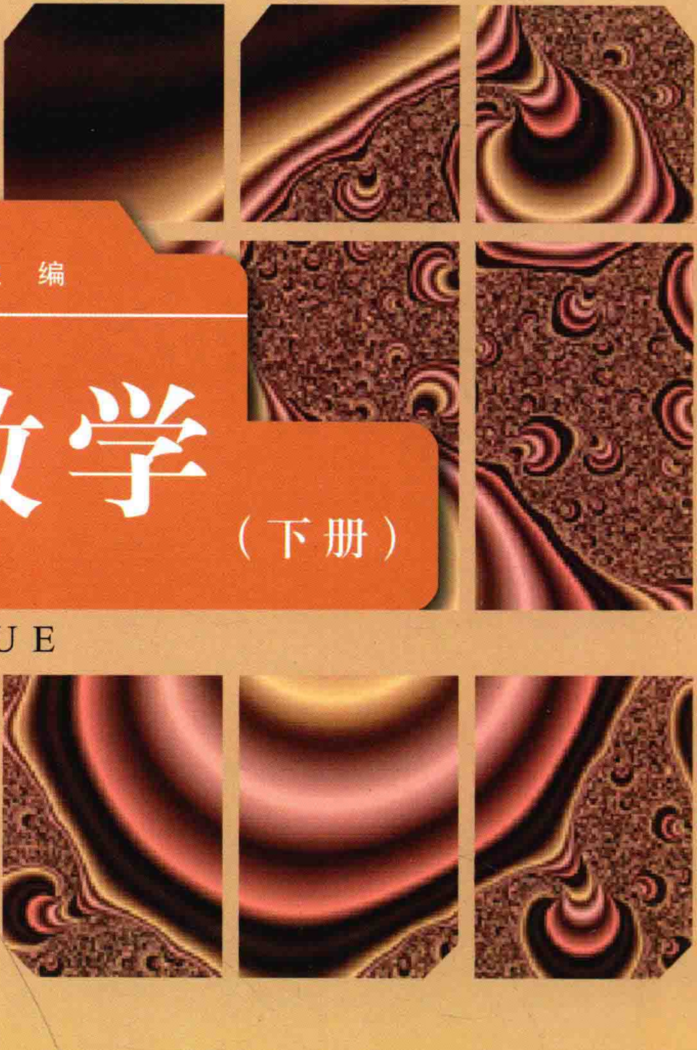
高等教育"十二五"规划教材

程吉树　胡根良　刘德朋　主　编

大学数学
（下册）

DAXUE SHUXUE



科学出版社

高等教育“十二五”规划教材

大学数学

（下　册）

程吉树　胡根良　刘德朋　主编

科学出版社

北　京

内 容 简 介

全书分为上、下两册. 本书是下册，包括微分方程、向量代数与空间解析几何、多元函数微分学及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、级数. 每节末附有习题,每章末附有复习题及自测题. 本书旨在降低大学生学习数学的难度. 在写作上，结构严谨，例题与插图丰富，叙述清晰，循序渐进，通俗易懂，简化证明和化简繁杂的计算，提炼内容和归纳方法. 其目的是期望即使高考数学成绩较低的学生也能学会、学好大学数学.

本书可供独立学院各专业、成人教育、自学考试学生使用；可供青年教师教学参考；也可作为全日制本科各专业学生学习参考.

为了帮助学生自学，检验学习效果，配套出版《大学数学学习辅导》一书供学生使用.

图书在版编目(CIP)数据

大学数学(下册) / 程吉树等主编. —北京：科学出版社，2012
(高等教育“十二五”规划教材)
ISBN 978-7-03-033270-7

I. ①大… II. ①程… ②胡… ③刘… III. ①高等数学-高等学校-教材 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2012) 第 001162 号

责任编辑：王 彦 张振华/责任校对：耿 耘
责任印制：吕春珉/封面设计：东方人华平面设计部

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www. sciencep. com

铭浩彩色印装有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2012 年 1 月第 一 版 开本：B5 (720 × 1000)
2012 年 1 月第一次印刷 印张：15 3/4
字数：315 000

定价：28.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈骏杰〉)

销售部电话 010-62134988 编辑部电话 010-62138978-8208

前 言

大学数学是高等学校许多专业的一门重要基础课，对于培养学生的综合素质有很重要的作用.

本书根据教育部工科数学课程教学指导委员会《本科数学基础教学基本要求》（修订稿）的精神和原则，以及独立学院各专业学生培养目标和学习大学数学知识的需求，参考部分省“2+2”考试大纲和全国硕士研究生入学考试高等数学考试大纲，结合编者多年的教学经验，主要面向独立学院各专业学生编写. 本书分为上、下两册. 上册包括函数与极限，导数与微分，微分中值定理及导数的应用，不定积分与定积分及其应用等；下册包括微分方程，向量代数与空间解析几何，多元函数微分学及其应用，重积分，曲线积分与曲面积分，级数等.

参加本书编写的教师多年来一直在教学第一线工作，不断进行教学探索和改革，积累了较丰富的教学经验. 编者深知学生在学习大学数学时的疑难与困惑，因此采取低起点、循序渐进、归纳分类的方法组织内容，力求达到学生能举一反三的目的；为了使基础较差的学生能够学会并且学好大学数学，为帮助部分学生克服在学习过程中的恐惧感和畏难情绪，编者对传统的内容和方法进行了有益的尝试和改革，使得本书能较大幅度降低学习难度，达到激发学生学习数学的兴趣和积极性的目的；利用巧妙的计算方法、独特的解题技巧将复杂的计算和证明简单化，并用通俗语言叙述或解释，提供了丰富的例题和直观的图形，使学生们能较好地理解大学数学的理论知识和学习方法.

学好大学数学必须要经过严格的训练和大量的实践. 为此，每一节后配备有难度适中的习题，每章后配备有难度不同的两套复习题和一套自测题，为了学生能检查自己解题的正误，在与本书配套的《大学数学学习辅导》一书中，给出了习题的答案或提示，以及复习题和自测题的提示和解答.

全书共 11 章，其中上册 5 章，下册 6 章. 程吉树负责全书的设计和统稿工作，并编写第 5、11 章；胡根良起草写作大纲和写作要求，并编写第 7、9 章；田延芬编写第 1、2 章；彭勤文编写第 3、4 章；袁宝兰编写第 6 章；刘德朋编写第 8、10 章；马祖强负责第 1、2、9、10 章的 TEX 文档及第 1~4、9、10 章的计算机绘图工作.

本书虽然反复校对，但疏漏和不足之处在所难免，恳请读者给予批评指正，提出宝贵意见和建议，可发至电子邮箱：jscheng@hud.edu.cn.

在本书的编写过程中，杭州电子科技大学信息工程学院唐向宏院长给予了热情

的关怀、大力的支持和帮助，编者在此表示衷心的谢意！另外，特别感谢科学出版社的编辑和编排人员为本书所付出的辛勤劳动.

编　者

2011 年 5 月

目　　录

第 6 章　微分方程 1
6.1　微分方程的基本概念 1
6.1.1　实例 1
6.1.2　微分方程的基本概念 2
习题 6.1 4
6.2　可分离变量方程 4
6.2.1　可分离变量方程的解法 5
6.2.2　齐次方程 7
习题 6.2 9
6.3　一阶线性微分方程 9
6.3.1　一阶齐次线性微分方程 10
6.3.2　一阶非齐次线性微分方程 10
习题 6.3 13
6.4　可降阶的微分方程 13
6.4.1　$y^{(n)} = f(x)$ 型的微分方程 14
6.4.2　$y'' = f(x, y')$ 型的微分方程 14
6.4.3　$y'' = f(y, y')$ 型的微分方程 16
习题 6.4 17
6.5　二阶常系数齐次线性方程 17
6.5.1　二阶常系数齐次线性方程 17
6.5.2　二阶常系数齐次线性方程的解法 19
习题 6.5 22
6.6　二阶常系数非齐次线性方程 22
6.6.1　二阶常系数非齐次线性方程解的结构 22
6.6.2　二阶常系数非齐次线性方程的解法 24
习题 6.6 29
复习题 6.1 29
复习题 6.2 31
自测题 6 32

第 7 章　向量代数与空间解析几何 34
7.1　向量及其运算 34
7.1.1　向量的概念 34
7.1.2　向量的运算 34
习题 7.1 40
7.2　空间直角坐标系下的向量运算 40
7.2.1　空间直角坐标系及向量的坐标表示 40
7.2.2　利用坐标作向量的运算 43
习题 7.2 49
7.3　平面及其方程 49
7.3.1　平面的方程 50
7.3.2　两平面的夹角 53
习题 7.3 54
7.4　空间直线及其方程 55
7.4.1　空间直线的一般方程 55
7.4.2　空间直线的对称式方程与参数方程 55
7.4.3　直线与平面的夹角 57
7.4.4　平面束方程 58
习题 7.4 60
7.5　二次曲面与空间曲线及其方程 61
7.5.1　二次曲面方程 61
7.5.2　空间曲线 66
习题 7.5 67
复习题 7.1 68
复习题 7.2 70
自测题 7 71
第 8 章　多元函数微分学及其应用 74
8.1　多元函数的基本概念 74
8.1.1　多元函数的基本概念 74
8.1.2　二元函数的极限 77
8.1.3　二元函数的连续性 79
习题 8.1 81
8.2　偏导数 81
8.2.1　偏导数的定义及计算方法 81

8.2.2 高阶偏导数 85
习题 8.2 87
8.3 全微分 88
8.3.1 全微分的概念 88
8.3.2 可微与连续的关系 90
8.3.3 全微分的应用 91
习题 8.3 92
8.4 多元函数的可微性 93
8.4.1 多元复合函数的求导法则 93
8.4.2 隐函数的求导公式 99
习题 8.4 102
8.5 偏导数的几何应用 102
8.5.1 空间曲线的切线及法平面 102
8.5.2 空间曲面的切平面与法线 105
习题 8.5 108
8.6 方向导数与梯度 108
8.6.1 方向导数 109
8.6.2 梯度 112
习题 8.6 114
8.7 多元函数的极值 115
8.7.1 多元函数的极值及最大值、最小值 115
8.7.2 条件极值 117
习题 8.7 119
复习题 8.1 120
复习题 8.2 121
自测题 8 123
第 9 章 重积分 125
9.1 二重积分的概念和性质 125
9.1.1 二重积分的概念 125
9.1.2 二重积分的性质 128
习题 9.1 130
9.2 利用直角坐标计算二重积分 130
9.2.1 二重积分化为二次积分 130
9.2.2 二重积分计算举例 134

习题 9.2 137
9.3 利用极坐标计算二重积分 138
9.3.1 二重积分化为二次积分 138
9.3.2 二重积分计算举例 141
9.3.3 二重积分的应用 145
习题 9.3 147
9.4 三重积分 148
9.4.1 三重积分的概念 148
9.4.2 三重积分的计算 149
习题 9.4 154
复习题 9.1 155
复习题 9.2 157
自测题 9 159
第 10 章 曲线积分与曲面积分 162
10.1 对弧长的曲线积分 162
10.1.1 对弧长的曲线积分的概念和性质 162
10.1.2 对弧长的曲线积分的计算法 164
习题 10.1 167
10.2 对坐标的曲线积分 167
10.2.1 对坐标的曲线积分的概念与性质 167
10.2.2 对坐标的曲线积分的计算法 170
习题 10.2 173
10.3 格林公式 174
10.3.1 格林公式 174
10.3.2 曲线积分与路径无关的条件 177
习题 10.3 184
10.4 曲面积分 184
10.4.1 对面积的曲面积分 185
10.4.2 对坐标的曲面积分 188
10.4.3 两类曲面积分之间的关系 193
10.4.4 高斯公式 194
习题 10.4 197
复习题 10.1 197
复习题 10.2 199

自测题 10 …… 201

第 11 章　级数 …… 203

11.1　数项级数的基本概念与性质 …… 203

11.1.1　数项级数的概念 …… 203

11.1.2　收敛级数的性质 …… 205

习题 11.1 …… 206

11.2　数项级数的判别法 …… 207

11.2.1　正项级数的判别法 …… 207

11.2.2　交错级数 …… 211

11.2.3　绝对收敛与条件收敛 …… 212

习题 11.2 …… 214

11.3　幂级数 …… 214

11.3.1　幂级数的收敛域、收敛半径与收敛区间 …… 215

11.3.2　幂级数的性质 …… 218

习题 11.3 …… 220

11.4　函数的幂级数展开 …… 221

11.4.1　泰勒级数 …… 221

11.4.2　函数展开成幂级数举例 …… 222

习题 11.4 …… 225

11.5　傅里叶级数 …… 225

11.5.1　三角函数系的正交性 …… 226

11.5.2　傅里叶级数 …… 226

习题 11.5 …… 230

11.6　奇偶函数的傅里叶级数 …… 230

习题 11.6 …… 234

复习题 11.1 …… 234

复习题 11.2 …… 237

自测题 11 …… 239

参考文献 …… 241

第 6 章 微 分 方 程

微分方程是现代数学的一个重要分支, 是人们解决各种实际问题的有效工具, 它在几何、力学、物理、电子技术、经济等领域都有着广泛的应用. 本章主要介绍微分方程的一些基本概念和几种常用的微分方程的初等解法.

6.1 微分方程的基本概念

在许多实际问题中, 往往不能直接找出所需要的函数关系, 但是根据问题所提供的情况, 有时可以列出含有要找的函数及其导数的关系式, 这样的关系式就是所谓的**微分方程**. 微分方程建立后, 对它进行研究, 找出未知函数来, 就是解微分方程.

6.1.1 实例

下面我们通过几何、力学及物理学中的几个具体例题来说明微分方程的基本概念.

例 6.1.1 一曲线通过点 $(1,2)$, 且在该曲线上任一点 $M(x,y)$ 处的斜率为 $2x$, 求这曲线的方程.

解 设所求曲线的方程为 $y=y(x)$, 根据导数的几何意义可知, 未知函数 $y=y(x)$ 应满足关系式

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x \tag{6.1}$$

此外, 未知函数 $y=y(x)$ 还应满足条件: $x=1$ 时, $y=2$.

式 (6.1) 两端对 x 积分, 得 $y=\int 2x\mathrm{d}x$, 即

$$y=x^2+C \tag{6.2}$$

其中 C 是任意常数. 把条件 "$x=1$ 时, $y=2$" 代入式 (6.2), 得 $C=1$. 所求曲线方程为

$$y=x^2+1$$

例 6.1.2(物体下落问题) 设质量为 m 的物体, 在时间 $t=0$ 时, 由距地面的高度为 s_0 处以初始速度 $v(0)=v_0$ 垂直下落, 求此物体下落距离与时间的关系.

解 建立 s 轴正向向下坐标系, 设 $s=s(t)$ 为 t 时刻物体所处的位置函数. 于是, 物体下落的速度为 $v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$, 加速度为 $a=\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}$. 质量为 m 的物体在下落的任

一时刻所受到的外力有重力 mg 和空气阻力, 空气阻力与速度成正比. 于是根据牛顿第二定律 $F=ma$, 可以列出方程

$$\begin{cases} m\dfrac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}=k\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}-mg \\ s\big|_{t=0}=s_0, \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}=v_0 \end{cases} \tag{6.3}$$

其中 $k>0$ 为阻尼系数, g 是重力加速度.

6.1.2 微分方程的基本概念

式 (6.3) 就是一个微分方程, 其中 s 是未知函数, t 是自变量. 现在还不能方便地求解方程 (6.3), 但是, 考虑 $k=0$ 的情形, 方程 (6.3) 可化为

$$\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}=-g \tag{6.4}$$

将式 (6.4) 对 t 积分两次, 得

$$s(t)=-\frac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2 \tag{6.5}$$

其中 C_1和C_2 是两个独立的任意常数.

由以上两个例子的关系式 (6.1) 和 (6.3) 都含有未知函数的导数, 它们都是微分方程. 一般来说, **微分方程**就是含有未知函数的导数或微分的等式.

微分方程中所出现的未知函数导数的最高阶数, 称为**微分方程的阶**.

例如, 方程 (6.1) 是一阶微分方程, 方程 (6.4) 是二阶微分方程. 以 y 为未知函数, x 为自变量的一阶微分方程的一般形式可表为

$$F(x,y,y')=0 \tag{6.6}$$

如果在式 (6.6) 中能将 y' 解出, 则得到方程

$$y'=f(x,y)$$

或

$$M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y=0 \tag{6.7}$$

我们也称式 (6.6) 为一阶隐式微分方程, 式 (6.7) 为一阶显式微分方程.

n **阶隐式微分方程**的一般形式为

$$F(x,y,y',y'',\cdots,y^{(n)})=0 \tag{6.8}$$

n **阶显式微分方程**的一般形式为

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)})$$

以后我们讨论的微分方程都是已解出最高阶导数的方程或是能解出最高阶导数的方程.

由前面的例子可看出, 在研究某些实际问题时, 首先要建立微分方程, 然后找出满足微分方程的函数 (解微分方程), 将这个函数就叫做该**微分方程的解**. 由此得到以下定义.

定义 6.1.1　设函数 $y = \varphi(x)$ 在区间 I 上有 n 阶连续导数, 如果在区间 I 上

$$F[x, \varphi(x), \varphi'(x), \cdots, \varphi^{(n)}(x)] = 0$$

那么函数 $y = \varphi(x)$ 就叫做微分方程 (6.8) 在区间 I 上的**解**.

依据定义 6.1.1 可以接验证:

(1) 函数 $y = 5x^2$ 是方程 $xy' = 2y$ 的解.

(2) 函数 $x = C_1 \cos t + C_2 \sin t$ 是方程 $\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + x = 0$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上的解, 其中 C_1 和 C_2 是任意常数.

从上面的讨论可得到: 微分方程的解可以包含任意常数, 也可以不包含任意常数. n 阶微分方程 (6.8) 含有任意 n 个独立常数 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 的解 $y = \varphi(x, C_1, C_2, \cdots, C_n)$ 称为该方程的**通解**, 在通解中, 由给定的条件确定了任意常数的解 $y = \varphi(x)$ 称为该方程的**特解**.

设微分方程中的未知函数为 $y = \varphi(x)$, 如果微分方程是一阶的, 则通常用来确定任意常数的条件是

$$x = x_0 \text{ 时}, y = y_0$$

或写成

$$y\big|_{x=x_0} = y_0$$

其中 x_0, y_0 都是给定的值. 如果微分方程是二阶的, 通常用来确定任意常数的条件是

$$x = x_0 \text{ 时}, y = y_0, y' = y_0'$$

或写成

$$y\big|_{x=x_0} = y_0, \quad y'\big|_{x=x_0} = y_0'$$

其中 x_0, y_0, y_0' 都是给定的值. 上述这种条件叫做**初始条件**.

在微分方程的通解中, 由初始条件确定了任意常数的解, 就是微分方程的特解.

例 6.1.3　由方程 $x''+x=0$ 的通解 $x=C_1\sin t+C_2\cos t$, 求满足初始条件的 $x(\frac{\pi}{4})=1$, $x'(\frac{\pi}{4})=-1$ 的特解.

解　由通解 $x=C_1\sin t+C_2\cos t$, 求导数后有 $x'=C_1\cos t-C_2\sin t$. 将初值条件代入, 得到方程组

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}C_1+\frac{\sqrt{2}}{2}C_2=1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}C_1-\frac{\sqrt{2}}{2}C_2=-1 \end{cases}$$

解得 $C_1=0,\quad C_2=\sqrt{2}$, 所求特解为 $x=\sqrt{2}\cos t$.

习题 6.1

1. 指出下列微分方程的阶数.

(1) $x(y')^2-2y'+x=0$;　　(2) $x^2y''-xy'+y=0$;

(3) $xy'''+2y'+2y''+x^2y=0$;　　(4) $(7x-6y)\mathrm{d}x+(x+y)\mathrm{d}y=0$.

2. 在下列各题中, 确定函数关系式中所含的常数, 使函数为所给微分方程的特解.

(1) $\cos x-C\cos y=0,\quad y\big|_{x=0}=\frac{\pi}{4}$;

(2) $y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{2x},\quad y\big|_{x=0}=y'\big|_{x=0}=1$.

3. 一个质量为 m 的物体, 在倾角为 $30°$ 的斜面上由静止下滑, 若不计摩擦力, 试建立物体运动的微分方程.

6.2　可分离变量方程

本节介绍可分离变量的微分方程. 形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x)g(y) \text{ 或 } \frac{\mathrm{d}y}{g(y)}=f(x)\mathrm{d}x \quad [\,g(y)\neq 0\,] \tag{6.9}$$

的方程称为**可分离变量微分方程**. 其中, $f(x)$ 和 $g(y)$ 分别是 x 和 y 的连续函数. 式 (6.9) 的特点是方程右端是两个独立的一元函数之积.

形如

$$M_1(x)N_1(y)\mathrm{d}x+M_2(x)N_2(y)\mathrm{d}y=0 \tag{6.10}$$

的对称式方程, 当 $M_i(x)\neq 0$, $N_j(y)\neq 0$ $i,j=1,2$ 时, 式 (6.10) 也可化为可分离变量微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{M_1(x)N_1(y)}{M_2(x)N_2(y)} \quad \text{或} \quad \frac{N_2(y)}{N_1(y)}\mathrm{d}y=\frac{M_1(x)}{M_2(x)}\mathrm{d}x$$

可分离变量的微分方程的特点就是, 能将相同变量的函数与微分集中到等式的一边.

例如, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = xy$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{x+y}$ 都是可分离变量微分方程. 可分离变量微分方程是最基本、也是最简单的微分方程.

6.2.1 可分离变量方程的解法

假定式 (6.9) 中的函数 $f(x)$ 和 $g(y)$ 是连续的, 方程两边积分

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)}$$

得到通解

$$F(x) = G(y) + C$$

其中 $F(x)$, $G(y)$ 分别为 $f(x)$ 和 $g(y)$ 的原函数.

例 6.2.1 求微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{x}$ 的通解.

解 当$y \neq 0$ 时, 由分离变量法, 方程化为 $\frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{\mathrm{d}x}{x}$, 两端积分, 得

$$\ln|y| = \ln|x| + C_1,$$

去掉对数和绝对值, 得 $y = \pm\,\mathrm{e}^{C_1}x$, 取 $C = \pm\,\mathrm{e}^{C_1}$, 得通解 $y = Cx$.

例 6.2.2 设降落伞从跳伞塔下落后, 所受空气阻力与速度成正比, 并设降落伞离开跳伞塔时 $(t = 0)$ 速度为零, 求降落伞下落速度与时间的函数关系.

解 设降落伞下落速度为 $v(t)$. 降落伞在空中下落时, 同时受到重力 P 与阻力 R 的作用, 重力大小为 mg, 方向与 v 一致; 阻力大小为 kv($k > 0$ 为比例系数), 方向与 v 相反. 从而降落伞所受外力为

$$F = mg - kv$$

根据牛顿第二定律

$$F = ma \quad (\text{其中 } a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \text{ 为加速度})$$

得到函数 $v(t)$ 应满足的方程为

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg - kv \tag{6.11}$$

按题意, 初始条件为

$$v\big|_{t=0} = 0$$

方程 (6.11) 是可分离变量的, 分离变量, 得

$$\frac{\mathrm{d}v}{mg-kv}=\frac{\mathrm{d}t}{m}$$

两端积分

$$\int\frac{\mathrm{d}v}{mg-kv}=\int\frac{\mathrm{d}t}{m}$$

考虑到 $mg-kv>0$, 得

$$-\frac{1}{k}\ln(mg-kv)=\frac{t}{m}+C_1$$

即

$$mg-kv=\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t-kC_1}$$

这就是方程 (6.11) 的通解.
将初始条件

$$v\big|_{t=0}=0$$

代入, 得 $C=-\dfrac{mg}{k}$, 于是所求特解为

$$v=\frac{mg}{k}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}\right)$$

例 6.2.3　求微分方程 $y^2\mathrm{d}x+(x+1)\mathrm{d}y=0$ 的通解.

解　此方程化为可分离变量方程, 分离变量, 得

$$-\frac{\mathrm{d}y}{y^2}=\frac{\mathrm{d}x}{x+1}$$

两边积分

$$\int-\frac{\mathrm{d}y}{y^2}=\int\frac{\mathrm{d}x}{x+1}$$

即

$$\frac{1}{y}=\ln|x+1|+C_1$$

故通解为

$$y=\frac{1}{\ln|x+1|+C_1}$$

6.2.2 齐次方程

形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right) \tag{6.12}$$

的方程, 叫做**齐次方程**. 齐次方程的特点是: 每项变量的次数之和都相等.

在齐次方程 (6.12) 中, 引进新的未知函数 $u=\dfrac{y}{x}$, 则 $y=ux$, 从而

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

代入到方程式 (6.12), 便得

$$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\varphi(u)$$

即

$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\varphi(u)-u$$

分离变量, 得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\varphi(u)-u}=\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

两端积分, 得

$$\int\frac{\mathrm{d}u}{\varphi(u)-u}=\int\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

再以 $\dfrac{y}{x}$ 代替 u, 便得到所给齐次方程的通解.

例 6.2.4 求方程

$$y^2+x^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=xy\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

的通解.

解 原方程可写成

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y^2}{xy-x^2}=\frac{\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}{\dfrac{y}{x}-1}$$

因此该方程是齐次方程. 令 $u=\dfrac{y}{x}$, 则

$$y=ux,\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

于是原方程变为

$$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{u^2}{u-1}$$