

量子力学

基本概念的发展

The development of the fundamental concepts of
quantum mechanics

黄永义◎编著

中国科学技术大学出版社

量子力学 基本概念的发展

The development of the fundamental concepts of
quantum mechanics

黄永义◎编著

中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

本书是作者以近代最著名的几位物理学家的原始文献为依据精心编写而成的,着力阐述量子力学中基本概念的形成和发展。这些基本概念包括 Planck 量子论、Einstein 光量子、Bohr 氢原子理论、de Broglie 物质波、Heisenberg 矩阵力学、Dirac 量子泊松括号、Schrödinger 波动力学、Born 波函数统计解释、Heisenberg 不确定关系、Pauli 不相容原理、量子力学哥本哈根解释、Einstein-Podolsky-Rosen 佯谬和量子纠缠。附录 1 介绍了主要物理学家的科学贡献,附录 2 介绍了原始性创新的思维方式。

本书可作为(综合、理工、师范类)高等院校量子力学、近代物理学和原子物理学的补充资料,也可作为相关科研和教学人员的参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

量子力学基本概念的发展/黄永义编著. —合肥:中国科学技术大学出版社, 2018. 11

ISBN 978-7-312-04506-6

I. 量… II. 黄… III. 量子力学—研究 IV. O413. 1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 158276 号

出版 中国科学技术大学出版社
安徽省合肥市金寨路 96 号, 230026
<http://press.ustc.edu.cn>
<https://zgkxjdxcbbs.tmall.com>
印刷 合肥市宏基印刷有限公司
发行 中国科学技术大学出版社
经销 全国新华书店
开本 710 mm×1000 mm 1/16
印张 8.75
字数 157 千
版次 2018 年 11 月第 1 版
印次 2018 年 11 月第 1 次印刷
定价 39.00 元



前言

序

国内有关量子力学的书籍汗牛充栋,而对于量子力学基本概念,不管是量子力学、近代物理或原子物理的教材,还是有关量子力学发展史的书籍中都很少有系统的讲述。量子力学基本概念是近代最著名的几位物理学家提出和发展的,他们的工作具有极高的原始创新性,因此系统地整理这些基本概念是十分必要的。本书的任务就是以物理学家的原始文献为依据,原汁原味地、详细地介绍量子力学基本概念的形成和发展。内容包括 Planck 量子论、Einstein 光量子、Bohr 氢原子理论、de Broglie 物质波、Heisenberg 矩阵力学、Dirac 量子泊松括号、Schrödinger 波动力学、Born 波函数统计解释、Heisenberg 不确定关系、Pauli 不相容原理、量子力学哥本哈根解释、Einstein-Podolsky-Rosen 佯谬和量子纠缠,以弥补国内教材这方面的不足。本书不涉及 Feynman 路径积分的内容,一则是因为 Feynman 路径积分的发展过程非常清楚,再则是因为曾谨言、苏汝铿等人的量子力学著作对这部分内容已做了全面而深入的论述。

通过这本书的学习,学生不但能了解量子力学基本概念的发展过程,而且能身临其境地看到物理学家面对物理谜团时研究问题的思路和解决问题的方法,甚至能够领会到不同物理学家的研究风格。附录 1 介绍了主要物理学家的科学贡献,附录 2 介绍了原始性创新的思维方式。在惊叹物理学家获得的卓越的科学成就,了解物理学家科学研究的思维方式后,我国的年轻学子应积极投身于科学研究,力争成为世界级物理学家,为进一步提升我国科学技术的创新水平做出贡献。

感谢教育部物质非平衡合成与调控重点实验室的资助。本工作得到西安交通大学基本科研业务费自然科学类综合交叉项目的支持。

黄永义

2018 年 3 月于西安交通大学

目 录

前言	(i)
第 1 章 Planck 量子论	(1)
1.1 热辐射	(1)
1.2 黑体辐射	(4)
1.3 Wien 定律	(7)
1.4 Rayleigh-Jeans 公式	(11)
1.5 Planck 黑体辐射公式	(14)
1.6 Planck 量子论	(15)
第 2 章 Einstein 光量子	(20)
2.1 光量子的导出	(20)
2.2 电磁场量子化	(24)
第 3 章 Bohr 氢原子理论	(28)
3.1 Bohr 氢原子理论的提出	(29)
3.2 对应原理及应用	(31)
3.3 Bohr 氢原子理论的地位和对应原理的历史意义	(34)
第 4 章 de Broglie 物质波	(36)
4.1 de Broglie 物质波假说	(36)
4.2 de Broglie 物质波导出 Bohr 氢原子理论	(39)
第 5 章 Heisenberg 矩阵力学	(42)
5.1 一人文章	(42)

5.2 两人文章	(47)
5.3 三人文章	(48)
5.4 矩阵力学求解角动量和氢原子	(50)
第 6 章 Dirac 量子泊松括号	(55)
6.1 Dirac 量子泊松括号的提出	(55)
6.2 Dirac 量子泊松括号求解一维谐振子	(57)
第 7 章 Schrödinger 波动力学	(61)
7.1 Schrödinger 波动力学的建立	(61)
7.2 波动力学与矩阵力学的等价性	(69)
7.3 Schrödinger 方程求解一维谐振子	(69)
第 8 章 Born 波函数统计解释	(72)
8.1 Born 波函数统计解释的提出	(72)
8.2 Born 波函数统计解释求解散射问题	(74)
第 9 章 Heisenberg 不确定关系	(78)
9.1 Heisenberg 不确定关系的提出	(79)
9.2 Heisenberg 不确定关系的严格导出	(83)
第 10 章 Pauli 不相容原理	(86)
10.1 Pauli 不相容原理的发现	(87)
10.2 Pauli 不相容原理的四个重要应用	(90)
10.3 Pauli 的学术环境	(99)
第 11 章 量子力学哥本哈根解释	(102)
11.1 哥本哈根解释	(102)
11.2 量子力学中的因果律	(107)
11.3 哥本哈根解释和量子测量实例	(108)
11.4 量子力学解释的发展	(112)

第 12 章 Einstein-Podolsky-Rosen 佯谬和量子纠缠	(116)
12.1 Einstein-Podolsky-Rosen 佯谬	(116)
12.2 Bohr 的抨击和量子纠缠	(120)
附录	(123)
附录 1 主要物理学家的科学贡献	(123)
附录 2 原始性创新的思维方式	(127)

第 1 章 Planck 量子论

1.1 热 辐 射

具有一定温度的物体,都会向周围空间发射电磁波,而辐射的频率从无线电波到 X 射线的各个频段都会覆盖到,这种由温度决定的辐射称为热辐射。物体这种无时不在、无处不在的热辐射是热力学原理的一种结果,热力学原理告诉我们,热量只能从高温物体自动地向低温物体流动,热辐射是热量传递的一种方式,另外两种方式是传导和对流。由于物体总与其他物体有热交换,因此物体与物体之间总存在一定的热辐射。在非平衡下,温度高的物体失掉的热量多于得到的热量,温度低的物体正好相反,这样物体与物体之间才能达到热平衡。显然,热平衡时物体辐射的电磁波和吸收的电磁波的量相等,物体的温度也不再变化。物体的热辐射并不神秘,我们在日常生活中都能看到,比如白炽灯的钨丝,不通电时为黑色,通电时随着钨丝电流的增大,钨丝的温度由常温 20°C 逐渐升高至 2500°C ,钨丝由暗红到红色、橘黄,最后发出刺眼的白光。事实上,这是物体热辐射的一个规律,即随着物体温度的升高,物体在单位时间内向外发射的辐射能也随之增大,当然温度恒定时,物体在辐射电磁波的同时也在等量地吸收着电磁波,以达到热辐射的平衡。物体温度低时也向外辐射电磁波,辐射能量很小的红外线,军事上用的红外夜视仪就是基于这个原理。总结一下热辐射的特点:辐射的电磁波连续;频谱分布随温度变化而变化,温度越高,辐射能力越强;平衡时,辐射本领越大,吸收本领也越大。

为了定量地描述辐射场和它与物体之间的各种能量转移,我们需要引入几个物理量。

(1) 辐射场能量密度 $\rho(T)$, 表示温度为 T 的辐射场单位体积的辐射能量(单位: $\text{J} \cdot \text{m}^{-3}$), 它与谱能量密度 $\rho(\nu, T)$ (单位: $\text{J} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{Hz}^{-1}$) 之间的关系为

$$\rho(T) = \int_0^{\infty} \rho(\nu, T) d\nu \quad (1.1)$$

(2) 辐照度 E , 表示照射在物体单位表面积单位时间的辐射能量(单位: $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$); E 与其谱辐照度 $E(\nu, T)$ (单位: $\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{Hz}^{-1}$) 之间的关系为

$$E(T) = \int E(\nu, T) d\nu \quad (1.2)$$

(3) 辐射本领 $R(T)$ (辐射出射度), 表示温度为 T 的辐射体, 从单位表面积单位时间向外发出的辐射能量, 辐射本领 $R(T)$ 和单色辐出度 $R(\nu, T)$ (单位: $\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{Hz}^{-1}$) 之间的关系为

$$R(T) = \int_0^{\infty} R(\nu, T) d\nu = \int_0^{\infty} R(\lambda, T) d\lambda \quad (1.3)$$

将关系式 $c = \lambda\nu$ 求导, 得 $d\nu = -\frac{c}{\lambda^2} d\lambda$, 代入式(1.3), 得到 $R(\lambda, T) = \frac{c}{\lambda^2} R(\nu, T)$ 。

(4) 吸收本领 $\alpha(\nu, T)$, 指在频率 ν 附近, 单位频率间隔内单位时间被物体吸收的辐射能量与照射在该物体上的辐射能量之比, 是频率 ν 和温度 T 的函数, 为无量纲的量, 显然 $0 \leq \alpha(\nu, T) \leq 1$ 。

1859 年 G. Kirchhoff 总结出了一个普遍的规律^[1], 即任何物体在同一温度 T 下单色辐出度 $R(\nu, T)$ 和吸收本领 $\alpha(\nu, T)$ 成正比, 这个比值只和频率 ν 、温度 T 有关, 与物质本身的性质无关, 是个普适函数, 即

$$\frac{R(\nu, T)}{\alpha(\nu, T)} = F(\nu, T) \quad (1.4)$$

一个显然的推论是, 某温度下物体吸收某一频率范围内的热辐射本领越大, 同一温度下发射这一频率范围的热辐射本领也越大。

为了证明 Kirchhoff 定律, 我们先找到谱辐照度和谱能量密度的关系, 如图 1.1 所示。设谱辐照度为 $E(\nu, T)$, 谱能量密度为 $\rho(\nu, T)$, 单位立体角内的谱能量密度为 $\rho(\nu, T)/(4\pi)$, c 为光速, 则面积 dS 在时间 dt 内的辐照能量为

$$\begin{aligned} E(\nu, T) d\nu \cdot dt \cdot dS &= \int \frac{\rho(\nu, T)}{4\pi} d\Omega d\nu \cdot c dt \cos \theta \cdot dS \\ &= \int \frac{c\rho(\nu, T)}{4\pi} \sin \theta \cos \theta d\theta d\varphi d\nu \cdot dt \cdot dS \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{c\rho(\nu, T)}{4\pi} d\nu \cdot dt \cdot dS \int_0^{\pi/2} \sin\theta \cos\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \\
 &= \frac{c\rho(\nu, T)}{4} d\nu \cdot dt \cdot dS
 \end{aligned}$$

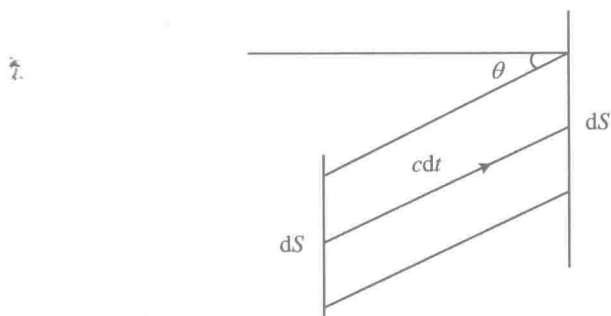


图 1.1 辐照度和能量密度

于是得到

$$E(\nu, T) = \frac{c\rho(\nu, T)}{4} \quad (1.5)$$

Kirchhoff 定律可通过如图 1.2 所示的理想实验从热力学原理导出。设想在器壁为理想反射体的密封容器 C 内放置若干物体 $A_1, A_2, \dots, A_n$, 将容器内部抽成真空, 从而各物体间只能通过热辐射交换能量。物体 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 和辐射场组成一个体系, 由热力学原理知, 这个体系总能量守恒, 且经过内部热交换, 最后各物体一定趋于同一温度 T , 达到热力学平衡态。平衡态下辐射场均匀, 恒定, 各向同性, 显然其能谱密度 $\rho(\nu, T)$ 在各处具有相同的函数形式和数值, 由 ν, T 唯一地决定, 不可能因与之平衡的物质材料而异, 否则辐射场不可能与不同质量的物体共处于热平衡状态。 $\rho(\nu, T)$ 是一个与物质无关的普适函数。

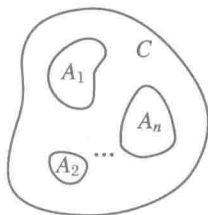


图 1.2 Kirchhoff 定律推导

物体与辐射场之间的能量交换:平衡态下从每个物体单位面积发出的能量 $R(\nu, T)$ 和吸收的能量 $\alpha(\nu, T)E(\nu, T)$ 相等,即

$$\begin{cases} R_1(\nu, T) = \alpha_1(\nu, T)E_1(\nu, T) \\ R_2(\nu, T) = \alpha_2(\nu, T)E_2(\nu, T) \\ \dots\dots \end{cases} \quad (1.6)$$

注意到(1.5)式,我们有

$$E_1(\nu, T) = E_2(\nu, T) = \dots = \frac{c}{4}\rho(\nu, T)$$

结合(1.6)式就有了 Kirchhoff 定律

$$\frac{R_1(\nu, T)}{\alpha_1(\nu, T)} = \frac{R_2(\nu, T)}{\alpha_2(\nu, T)} = \dots = \frac{c}{4}\rho(\nu, T) \equiv F(\nu, T) \quad (1.7)$$

由上式得到 Kirchhoff 定律(1.4)式的普适常数为 $F(\nu, T) = \frac{c}{4}\rho(\nu, T)$ 。

1.2 黑 体 辐 射

所谓黑体,就是对什么光都吸收而无反射也无透射的物体。黑体是不存在的,就像质点、刚体、电偶极子等物理概念一样是一个理想化的物理模型。物理上可以用如图 1.3 所示的装置来模拟黑体,即将用耐火材料做成的物体内部挖空一部分,

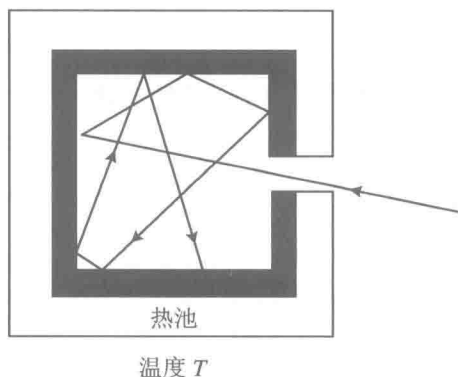


图 1.3 绝对黑体的模型

并且在物体的一个面上开一个非常小的孔,光线射进小孔后,在空腔内壁经过多次吸收和反射,几乎完全被吸收掉,再跑出小孔的概率特别小,因此可以把空腔的小孔视为黑体的表面。对黑体而言有 $\alpha(\nu, T) = 1$, 由 Kirchhoff 定律得黑体的单色辐射本领为

$$R_0(\nu, T) = \frac{c}{4} \rho_0(\nu, T) \quad (1.8)$$

(1.8)式意味着黑体的单色辐射本领 $R_0(\nu, T)$ 就等于 Kirchhoff 定律里面的普适常量,因此黑体辐射的研究对于任何物体的热辐射规律都具有重大的意义,其物理价值是不言而喻的。

由于19世纪工业的发展,特别是冶金行业的需要,人们越来越重视对热辐射和黑体辐射的研究。1881年 P. Langley 发明热辐射计,1886年他能很灵敏地测量热辐射能量的分布,19世纪末物理学家 H. Rubens, E. Pringsheim, O. Lummer 和 F. Kurlbaurn 等已对黑体辐射做出了相当精确的测定。图 1.4 是黑体辐射的实验结果^[2],从结果知黑体辐射有两个实验定律,它们是 Stefan-Boltzmann 定律和 Wien 位移定律。由宇宙大爆炸理论知道,宇宙大爆炸的遗迹即宇宙微波背景的辐射谱也是黑体辐射谱,对应的温度为 2.7 K。

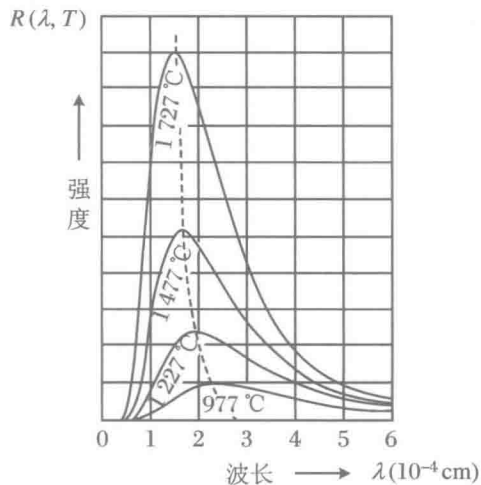


图 1.4 黑体辐射谱(虚线为 Wien 位移定律)

1. Stefan-Boltzmann 定律

1879年由 J. Stefan 发现,1884年 Boltzmann 从热力学上证明的 Stefan-

Boltzmann 定律告诉我们,黑体辐射本领为^[3,4]

$$R_0(T) = \int_0^\infty R_0(\lambda, T) d\lambda = \sigma T^4 \quad (1.9)$$

其中 $\sigma = 5.670\,51 \times 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$ 为 Stefan-Boltzmann 常数。

Boltzmann 的论证如下:为了不至于混淆,设黑体辐射能量密度为

$$u_0(T) = \rho_0(T) = \int_0^\infty \rho_0(\nu, T) d\nu$$

由电磁学理论证明黑体辐射的电磁波辐射压强 $p = u_0(T)/3$ 。事实上,电磁场的压强张量是

$$\begin{cases} p_{xx} = \frac{1}{2}(E_x^2 - E_y^2 - E_z^2) + \frac{1}{2}(H_x^2 - H_y^2 - H_z^2) \\ p_{xy} = (E_x E_y + H_x H_y) \end{cases} \quad (1.10)$$

其他 $p_{yy}, p_{zz}, p_{yz}, p_{zx}$ 的表达式可在(1.10)式中对 x, y, z 循环替代而得。对于一个各向同性的辐射场,电场强度的平均值满足

$$\begin{cases} \overline{E_x^2} = \overline{E_y^2} = \overline{E_z^2} = \overline{E^2}/3 \\ \overline{E_x E_y} = \overline{E_y E_z} = \overline{E_z E_x} = 0 \end{cases} \quad (1.11)$$

同理,磁场强度的平均值满足

$$\begin{cases} \overline{H_x^2} = \overline{H_y^2} = \overline{H_z^2} = \overline{H^2}/3 \\ \overline{H_x H_y} = \overline{H_y H_z} = \overline{H_z H_x} = 0 \end{cases} \quad (1.12)$$

因此辐射压为

$$\begin{aligned} p &= -\overline{p_{xx}} = -\overline{p_{yy}} = -\overline{p_{zz}} \\ &= \frac{1}{3} \frac{(\overline{E^2} + \overline{H^2})}{2} = \frac{u_0(T)}{3} \end{aligned} \quad (1.13)$$

将辐射压 $p = u_0(T)/3$ 代入热力学的内能方程

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p \quad (1.14)$$

注意到 $\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = u_0$, 得

$$u_0 = \frac{1}{3} T \frac{du_0}{dT} - \frac{1}{3} u_0 \quad (1.15)$$

积分(1.15)式,得 $u_0 = \rho_0(T) = \sigma' T^4$, 即 $R_0(T) = \sigma T^4$ 。

2. Wien 位移定律

1893 年 Wien 注意到黑体辐射谱峰值波长 λ_m 和温度 T 之间的关系,发现两者的乘积为一常量^[5],即 Wien 位移定律

$$\lambda_m T = b = 2.897\,756 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K} \quad (1.16)$$

由于黑体辐射谱的单色辐出度仅与 λ, T 有关,与腔的大小、形状和腔壁无关,这意味着 Wien 位移定律的常数 b 为一普适常数。因为高温不容易直接测量,而借助于 Wien 位移定律可以方便地估算出高温物体的温度,故只要通过它发出的谱线峰值波长就能估算出来。如太阳光谱的峰值波长为 $0.47 \mu\text{m}$,得知太阳表面温度为 $6\,166 \text{ K}$ 。

Wien 和 Rayleigh-Jeans 对黑体辐射规律的研究(都期望得到黑体辐射谱的解析表达式)是两个重要的突破,最终形式的 Planck 黑体辐射公式就是在他们工作的基础上建立起来的。Planck 公式的量子论解释是物理学中一个重大的发现,Planck 也是被公认的量子论的先驱。下面将叙述 Wien 和 Rayleigh-Jeans 及 Planck 工作的主要内容。

1.3 Wien 定律

1893 年 Wien 利用热力学和电磁学理论证明了黑体辐射的单色辐出度具有如下公式^[5]:

$$R_0(\lambda, T) = \frac{c^5}{\lambda^5} \varphi\left(\frac{c}{\lambda T}\right) \quad \text{或者} \quad R_0(\nu, T) = c\nu^3 \varphi\left(\frac{\nu}{T}\right) \quad (1.17)$$

(1.17)式即 Wien 定律,(1.17)式的意义在于把两个独立变量 ν 和 T 的二元函数 $R_0(\nu, T)$ 归纳为一个已知的函数 ν^3 和一个宗量为 ν/T 的函数。在函数 $R_0(\nu, T)$ 中,将独立变量改写为 $(\nu, \nu/T)$ 后,与 ν 的关系为 ν^3 ,这样就把一个寻找两个独立变量的函数 $R_0(\nu, T)$ 的问题归结为找寻函数 $\varphi(\nu/T)$ 了。

下面我们来看看 Wien 定律的导出过程^[6]。由于黑体辐射与空腔的材质和形状无关,为不失一般性,我们不妨考查一个管状辐射空腔,如图 1.5 所示,腔内黑体辐射能量密度为 $\rho_0(\nu)$,管子的右端有一反射镜以速度 v 向外移动,设频率为 ν 的

辐射以入射角 θ 射向镜面, 由纵向 Doppler 效应得反射后频率 $\nu' = \nu \sqrt{\frac{c - v \cos \theta}{c + v \cos \theta}} \simeq \nu \left(1 - \frac{2v}{c} \cos \theta\right)$, 如果原频率

$$\nu'' = \nu \left(1 + \frac{2v}{c} \cos \theta\right) \quad (1.18)$$

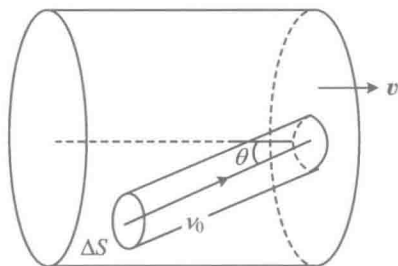


图 1.5 管状辐射空腔

则反射后频率变为 ν . Δt 秒内立体角 $\Delta\Omega$ 的光线打到镜面的辐射能

$$\Delta E = \frac{\Delta\Omega}{4\pi} \rho_0(\nu'') d\nu'' c \Delta t \Delta S \cos \theta \quad (1.19)$$

式中 $d\nu'' = d\nu \left(1 + \frac{2v}{c} \cos \theta\right)$ 。

辐射沿轴线向右的动量

$$\Delta p_1 = \frac{\Delta\Omega}{4\pi} \frac{\rho_0(\nu'') d\nu''}{h\nu''} \frac{h\nu''}{c} c \Delta t \Delta S \cos^2 \theta = \frac{\Delta\Omega}{4\pi} \rho_0(\nu'') d\nu'' \Delta t \Delta S \cos^2 \theta \quad (1.20)$$

辐射被发射后沿轴线向左的动量

$$\Delta p_2 = \frac{\Delta\Omega}{4\pi} \rho_0(\nu) d\nu \Delta t \Delta S \cos^2 \theta \quad (1.21)$$

辐射沿轴线向右的力

$$\Delta F = \frac{|\Delta p|}{\Delta t} = \frac{\Delta p_1 + \Delta p_2}{\Delta t} = \frac{\Delta\Omega}{4\pi} (\rho_0(\nu'') d\nu'' + \rho_0(\nu) d\nu) \Delta S \cos^2 \theta \quad (1.22)$$

辐射对镜子做正功, 辐射场的能量损失

$$\begin{aligned} \Delta_1 E &= v \Delta t \Delta F = \frac{\Delta\Omega}{4\pi} (\rho_0(\nu'') d\nu'' + \rho_0(\nu) d\nu) \Delta S \cdot v \cdot \Delta t \cos^2 \theta \\ &= \frac{\Delta\Omega}{4\pi} \frac{\rho_0(\nu'') d\nu'' + \rho_0(\nu) d\nu}{2} \frac{2v \cos \theta}{c} \Delta S \cdot c \cdot \Delta t \cos \theta \end{aligned} \quad (1.23)$$

由(1.18)式, Doppler 效应造成镜子的反射能量密度较入射前减小量为

$$\rho_0(\nu'') - \rho_0(\nu) = \frac{\partial \rho_0}{\partial \nu} \left(\nu \frac{2v}{c} \cos \theta \right) \quad (1.24)$$

由此得

$$\Delta_1 E = \frac{\Delta \Omega}{4\pi} \left[\frac{\left(\rho_0(\nu) + \frac{\partial \rho_0}{\partial \nu} \left(\nu \frac{2v}{c} \cos \theta \right) \right) \left(d\nu + d\nu \frac{2v}{c} \cos \theta \right) + \rho_0(\nu) d\nu}{2} \frac{2v \cos \theta}{c} \right] \times (\Delta S \cdot c \cdot \Delta t \cos \theta) \quad (1.25)$$

上式运算中略去方括号中 v/c 的二次和二次以上的项后得

$$\Delta_1 E = \frac{\Delta \Omega}{4\pi} \left[\rho_0(\nu) d\nu \frac{2v \cos \theta}{c} \right] (\Delta S \cdot c \cdot \Delta t \cos \theta) \quad (1.26)$$

考虑到光被镜面的反射、光压做正功后辐射的能量损失, 镜面从辐射获得的能量增量(即辐射的能量减少量)

$$\Delta E = \frac{\Delta \Omega}{4\pi} \left\{ \left[\rho_0(\nu) + \frac{\partial \rho_0}{\partial \nu} \left(\nu \frac{2v}{c} \cos \theta \right) \right] \left(d\nu + d\nu \frac{2v}{c} \cos \theta \right) - \rho_0(\nu) d\nu \frac{2v}{c} \cos \theta - \rho_0(\nu) d\nu \right\} \cdot (\Delta S \cdot c \cdot \Delta t \cos \theta)$$

上式化简为

$$\Delta E = \frac{1}{2\pi} \nu \frac{\partial \rho_0}{\partial \nu} d\nu \Delta S v \Delta t \cos^2 \theta \Delta \Omega \quad (1.27)$$

式中忽略了 v/c 的二次项。令 $\Delta V = \Delta S v \Delta t$, $\Delta \Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$, 如图 1.5 所示, 注意积分限的选取, 上式对立体角 $\Delta \Omega$ 积分后, 镜子获得辐射能量的增量

$$\begin{aligned} d(\rho_0 V d\nu) &= d(\rho_0 V) d\nu \\ &= \frac{1}{2\pi} \nu \frac{\partial \rho_0}{\partial \nu} d\nu dV \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{1}{3} \nu \frac{\partial \rho_0}{\partial \nu} d\nu dV \end{aligned} \quad (1.28)$$

此方程整理为如下的形式:

$$V \frac{\partial \rho_0}{\partial V} = \frac{1}{3} \nu \frac{\partial \rho_0}{\partial \nu} - \rho_0 \quad (1.29)$$

该方程隐函数形式的解

$$\rho_0(\nu, T) = \nu^3 \varphi(\nu^3 V) \quad (1.30)$$

式中 $\varphi(\nu^3 V)$ 为未知函数。

镜子对辐射的压强 $p = u_0/3 = \rho_0(T)/3$, 对辐射做负功。以辐射为研究系统, 由热力学第一、第二定律 $d(u_0 V) = T dS - p dV$, 得

$$T dS = d(u_0 V) + p dV$$

$$= \frac{4}{3} u_0 dV + V du_0 \quad (1.31)$$

将 Stefan-Boltzmann 定律 $u_0 = \sigma' T^4$ 代入(1.31)式,得

$$dS = \frac{4}{3} \sigma' T^3 dV + 4 \sigma' T^2 V dT \quad (1.32)$$

此方程式的解

$$S = \frac{4}{3} \sigma' T^3 V + \text{常数} \quad (1.33)$$

假设管状空腔镜面移动为绝热过程,熵为一常数即 $T^3 V = \text{常数}$,将此关系代入(1.30)式消去体积 V ,得

$$\rho_0(\nu, T) = \nu^3 \varphi\left(\frac{\nu}{T}\right) \quad (1.34)$$

又 $R_0(\nu, T) = \frac{c}{4} \rho_0(\nu, T)$, 知(1.34)式即为 Wien 定律。

由 Wien 定律式可以导出 Stefan-Boltzmann 定律和 Wien 位移定律。由(1.17)式得

$$\begin{aligned} R_0(T) &= \int_0^\infty R_0(\lambda, T) d\lambda = \int_0^\infty \frac{c^5}{\lambda^5} \varphi\left(\frac{c}{\lambda T}\right) d\lambda \\ &= -cT^4 \int_0^\infty \left(\frac{c}{\lambda T}\right)^3 \varphi\left(\frac{c}{\lambda T}\right) d\left(\frac{c}{\lambda T}\right) = \sigma T^4 \end{aligned} \quad (1.35)$$

式中 $\sigma = -c \int_0^\infty \left(\frac{c}{\lambda T}\right)^3 \varphi\left(\frac{c}{\lambda T}\right) d\left(\frac{c}{\lambda T}\right)$, σ 系数为未知函数 $\varphi\left(\frac{c}{\lambda T}\right)$ 的积分,无法算出 σ 的数值,但原则上是存在的,实验也能测出即 Stefan-Boltzmann 常数。将 $R_0(\lambda, T)$ 对 λ 微分,并令其等于 0,得

$$\left. \frac{dR_0(\lambda, T)}{d\lambda} \right|_{\lambda=\lambda_m} = 0 \Rightarrow -5\varphi\left(\frac{c}{\lambda_m T}\right) + \lambda_m T \frac{d\varphi\left(\frac{c}{\lambda_m T}\right)}{d\left(\frac{c}{\lambda_m T}\right)} = 0 \quad (1.36)$$

令 $\lambda_m T \equiv b$, 方程变为 $-5\varphi(b) + b \frac{d\varphi(b)}{db} = 0$, 原则上由此方程解出 b 即得 Wien

位移定律。由于 $\varphi\left(\frac{c}{\lambda T}\right)$ 是未知的,因此无法从(1.36)式推出 Wien 位移定律中常数 b 的值。为拟合黑体辐射的实验数据,1896 年 Wien 假设辐射场的振子可以被看成某种“粒子”,其动能正比于频率 ν (想法有点类似于 Einstein 光量子),其动能遵循 Maxwell-Boltzmann 分布,且在 $(\nu, \nu + d\nu)$ 内的“粒子”数为封闭腔内电磁波