新世纪高等学校公共课重点建设教材

简明高等数学（下）习题全解指南

王海敏 主编

浙江工商大学出版社
ZHEJIANG GONGSHANG UNIVERSITY PRESS

简明高等数学（下）
习题全解指南

王海敏 主编

浙江工商大学出版社
ZHEJIANG GONGSHANG UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

简明高等数学(下)习题全解指南 / 王海敏主编.
— 杭州: 浙江工商大学出版社, 2018.9
ISBN 978-7-5178-2792-4

Ⅰ. ①简… Ⅱ. ①王… Ⅲ. ①高等数学 – 高等学校 – 教学参考资料 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 126911 号

简明高等数学(下)习题全解指南

王海敏 主编

责任编辑 吴岳婷
封面设计 林朦朦
责任印制 包建辉
出版发行 浙江工商大学出版社
(杭州市教工路 198 号 邮政编码 310012)
(E-mail:zjgsupress@163.com)
(网址:http://www.zjgsupress.com)
电话:0571-88904980,88831806(传真)
排 版 杭州朝曦图文设计有限公司
印 刷 杭州恒力通印务有限公司
开 本 787mm×960mm 1/16
印 张 21
字 数 435 千
版 印 次 2018 年 9 月第 1 版 2018 年 9 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5178-2792-4
定 价 52.00 元

浙江工商大学出版社营销部邮购电话 0571-88904970

前　言

本书是王海敏主编的《简明高等数学》(浙江工商大学出版社2018年版)的配套用书。

本书按教材各章节顺序编排,每章内容由两部分组成:第一部分内容概要,主要是系统归纳总结这一章的基本概念、基本定理和基本方法,梳理知识结构;第二部分习题全解,与教材的习题一一对应进行详细解答,方便读者检查对所学内容的掌握程度,巩固学习效果。附录Ⅰ汇编了2003年至2017年全国研究生入学统一考试数学试题中高等数学部分的全部试题,按照函数与极限,导数与微分,微分中值定理与导数的应用,不定积分,定积分及其应用,常微分方程,向量代数与空间解析几何,多元函数微分法及其应用,多元函数积分学,无穷级数的顺序。每道试题的前面都注明了试题的年份、卷种和分值,如03104表示2003年数学一分值4分。附录Ⅱ给出了附录Ⅰ中每道试题的详细解答,有些在解答前分析了解题思路,使读者不仅能学到这个题的具体求解方法,而且能学到如何来分析这个题的求解过程。还有些在详细解答之后给出了评注,主要是对这类题型的解题方法作一个归纳总结,或指出其技巧点所在。

在这里我们建议,做题时,先自己想想,动手算一算,写出完整的解答过程,然后将自己所得出结果与书中的结果作比较,看哪些自己做对了,哪些自己做错了,为什么做错。如果还有不清楚的地方,可以与你的同学、老师研讨。如果用这样的态度和方法来阅读本书,不仅能提高你的解题能力,而且能使你更深刻地理解、掌握微积分的基本概念、基本理论和基本方法,习惯微积分的思维方式。

本书的第 2、4、5、6、7 章、附录Ⅰ、附录Ⅱ由王海敏执笔;第 1、10 章由袁中扬执笔;第 3、8、9 章由韩兆秀执笔,全书最后由王海敏统稿、定稿。

由于时间比较仓促,书中难免存在差错和欠缺,恳请专家、同行、读者批评指正,使本书在教学实践中不断完善。

编者

2018 年 6 月于浙江工商大学

目录

Contents

第 7 章　向量代数与空间解析几何

内容概要

一、向量代数

1. 向量的概念

既有大小又有方向的量称为向量，一般用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 等表示. 起点为 A，终点为 B 的向量记作 $\overrightarrow{AB}$. 与起点无关的向量称为自由向量. 向量的长度又称为向量的模，记作 $|\boldsymbol{a}|$. 长度为 1 的向量称为单位向量. 长度为零的向量称为零向量. 与 $\boldsymbol{a}$ 长度相同方向相反的向量称为 $\boldsymbol{a}$ 的负向量，记作 $-\boldsymbol{a}$.

若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的长度相同方向相同，则称 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 相等，记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 若将 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 起点重合后，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 落在同一直线上，则称 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行或共线，记作 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$.

注　与向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量常记作 $\boldsymbol{a}^0$，$\boldsymbol{a}^0=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$.

2. 向量的坐标

设向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 分别是沿 x,y,z 轴正向的单位向量，则任何向量 $\boldsymbol{a}$ 总可写成 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$ 称为 $\boldsymbol{a}$ 的坐标表示，此时向量的模 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$.

$\boldsymbol{a}$ 与 x,y,z 轴的夹角统称为 $\boldsymbol{a}$ 的方向角，分别记作 α,β,γ. $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦，它们之间的关系为

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},\ \cos\beta=\frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},\ \cos\gamma=\frac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}.$$

注　与向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 成比例的三个不全为零的数 A,B,C 构成的有序数组称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的一组方向数.

3. 向量的线性运算

(1) 向量的加减法

向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的加法服从平行四边形法则或三角形法则，即若 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$，$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{BC}$，则 $\boldsymbol{a}+$

$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AC}$.

$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$ 定义为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 差,即 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$.

(2)向量的数乘

设 λ 为实数, $\boldsymbol{a}$ 为向量, λ 与 $\boldsymbol{a}$ 的数乘记作 $\lambda\boldsymbol{a}$. $\lambda\boldsymbol{a}$ 的模为 $|\lambda||\boldsymbol{a}|$. 当 $\lambda>0$ 时,其方向与 $\boldsymbol{a}$ 相同;当 $\lambda<0$ 时,其方向与 $\boldsymbol{a}$ 相反.

注 向量的加法满足交换律和结合律.

4. 向量的乘积

(1)向量的数量积

通常称数 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$ (θ 为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角)为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积,记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$. 向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积又称为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的点积.

数量积满足下列运算规律:

①交换律 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$.

②分配律 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$.

③数乘分配律 $(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$.

注 若 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$, $\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$, 则

① $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$.

② $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$.

③ $\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\dfrac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$.

④ $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$ ($\boldsymbol{a}\neq 0$, $\boldsymbol{b}\neq 0$).

⑤ $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\dfrac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$.

(2)向量的向量积

设向量 $\boldsymbol{c}$ 由向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 按下列方式确定:

$$|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta;\ \boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{a} \text{ 且 } \boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{b};\ \boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c} \text{ 成右手系},$$

则称向量 $\boldsymbol{c}$ 为向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的向量积,记作 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$, 又称为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的叉积.

向量积满足下列运算规律:

① $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$.

②分配律 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$.

③数乘结合律 $(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$.

向量积的几何意义:模 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$ 等于以向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积.

注 若 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$, $\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$, 则

① $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$.

② $\boldsymbol{a}\,/\!/\,\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\dfrac{a_x}{b_x}=\dfrac{a_y}{b_y}=\dfrac{a_z}{b_z}\ (\boldsymbol{a}\neq 0,\boldsymbol{b}\neq 0)$.

③ $\triangle ABC$ 的面积为 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$.

(3)向量的混合积

称向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的运算 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ 为向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的混合积,记作 $[\boldsymbol{abc}]$.

注　若 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$, $\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$, $\boldsymbol{c}=(c_x,c_y,c_z)$ 则

① $[\boldsymbol{abc}]=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}$.

② $[\boldsymbol{abc}]$ 等于以向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为棱的平行六面体的体积.

③三向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面 $\Leftrightarrow[\boldsymbol{abc}]=0$.

二、平面方程

1. 平面的方程

(1)点法式方程　过点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$,以 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$ 为法向量的点法式方程为

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

注　与平面垂直的任意非零向量都叫做平面的法向量.

(2)一般方程　$Ax+By+Cz+D=0$,其法向量为 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$.

注　若 $A=0$,平面平行于 x 轴;$A=B=0$,平面平行于 xOy 面;$D=0$,平面过原点.

(3)截距式方程　$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$,其中 a,b,c 分别为平面的 x 截距,y 截距,z 截距.

(4)平面束方程　过直线 $\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$ 的平面束方程为

$$(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0.$$

注　求过一条定直线且满足某个条件的平面方程,一般用平面束来完成.

2. 点到平面的距离

点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的距离为

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

3. 两平面的关系

设有两平面

$$\Pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad \Pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

(1) $\Pi_1 \perp \Pi_2 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.

(2) $\Pi_1 /\!/ \Pi_2 \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$.

(3)平面 Π_1 与 Π_2 的夹角 θ 满足

$$\cos\theta = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

注 设平面 Π_1, Π_2 的法向量分别是 $\boldsymbol{n}_1$, $\boldsymbol{n}_2$,则 $\boldsymbol{n}_1$ 与 $\boldsymbol{n}_2$ 所夹的不超过 $\dfrac{\pi}{2}$ 的角叫做 Π_1 与 Π_2 的夹角.

三、直线方程

1. 直线的方程

(1)直线的标准式方程　过点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 且平行于非零向量 (m,n,p) 的标准式方程为 $\dfrac{x-x_0}{m} = \dfrac{y-y_0}{n} = \dfrac{z-z_0}{p}$.

注 标准式方程又称为直线的点向式方程或对称式方程,称 (m,n,p) 为所给直线的方向向量.

(2)参数方程 $\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$,其中 t 为参数.

(3)一般方程 $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$.

注 一般式方程表示的直线的方向向量为 $\boldsymbol{s} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$.

2. 点到直线的距离

点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 到直线 $\dfrac{x-x_1}{m} = \dfrac{y-y_1}{n} = \dfrac{z-z_1}{p}$ 的垂直距离为

$$d=\frac{\left|\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ m & n & p \end{vmatrix}\right|}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

3. 两直线间的关系

设直线 l_1，l_2 的方程分别为

$$l_1:\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1},\quad l_2:\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}.$$

(1) $l_1\perp l_2 \Leftrightarrow m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$.

(2) $l_1 /\!/ l_2 \Leftrightarrow \frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}$.

(3) 直线 l_1，l_2 的夹角 φ 满足

$$\cos\varphi=\frac{|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}.$$

注　设直线 l_1，l_2 的方向向量分别是 $\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2$，则 $\boldsymbol{s}_1$ 与 $\boldsymbol{s}_2$ 所夹的不超过 $\frac{\pi}{2}$ 的角叫做 l_1 与 l_2 的夹角.

4. 直线与平面的关系

设直线 l 与平面 Π 的方程分别为

$$l:\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p},\ \pi:Ax+By+Cz+D=0.$$

(1) $\pi\perp l \Leftrightarrow \frac{m}{A}=\frac{n}{B}=\frac{p}{C}$.

(2) $\pi /\!/ l \Leftrightarrow Am+Bn+Cp=0$.

(3) 直线 l 与平面 Π 的夹角 φ 满足

$$\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

注　定义直线 l 的方向向量与平面 Π 的的法向量的夹角为直线 l 与平面 Π 的夹角.

四、空间曲面与曲线

1. 空间曲面的一般方程

$$F(x,y,z)=0.$$

2. 常见的曲面

(1) 柱面　直线 L 沿定曲线 C 平行移动时所生成的曲面叫做柱面，定曲线 C 叫做柱

面的准线,动直线 L 叫做柱面的母线.

注 曲面方程 $F(x,y,z)=0$ 中如果缺少一个变量,则在空间表示的图形为柱面,此时柱面的母线与所缺变量同名的坐标轴平行.

(2)旋转曲面 以一条平面曲线绕其平面上的一定直线旋转一周所成的曲面叫做旋转曲面,旋转曲线叫做旋转曲面的母线,定直线叫做旋转曲面的轴.

注 yOz 面上的曲线 C:$\begin{cases}f(y,z)=0\\x=0\end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周所得旋转曲面的方程为 $f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$;绕 y 轴旋转一周所得旋转曲面的方程为 $f(y,\pm\sqrt{x^2+z^2})=0$.

3. 常见的二次曲面方程

(1)球面 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$.

(2)椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

(3)椭圆锥面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$.

(4)双曲抛物面 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=2z$.

(5)椭圆抛物面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=2z$.

(6)单叶双曲面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

(7)双叶双曲面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1$.

4. 空间曲线方程

(1)一般方程 若两曲面 $F(x,y,z)=0$ 与 $G(x,y,z)=0$ 相交于曲线 C,则 C 可用方程组

$$\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$$

表示,称为空间曲线的一般方程.

(2)参数方程 如果空间曲线 C 上任一点的三个坐标 (x,y,z) 都可以用参数 t 的函数表示,则方程组

$$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\\z=z(t)\end{cases}$$

叫做空间曲线 C 的参数方程.

5. 空间曲线在坐标面上投影曲线方程

在曲线 C 的方程 $\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$ 中消去 z，得方程 $H(x,y)=0$，它是包含曲线 C 且母线平行于 z 轴的柱面，称为曲线 C 的投影柱面. 于是曲线 C 在 xOy 面上的投影曲线为

$$\begin{cases}H(x,y)=0\\z=0\end{cases}.$$

习题全解

习题 7.1　空间直角坐标系与向量

1. 设 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$，试用向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 表示向量 $2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}$.

解　$2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}=2(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c})-3(-\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=5\boldsymbol{a}+11\boldsymbol{b}-7\boldsymbol{c}$.

2. 用向量的方法证明：三角形两边中点的连线平行于第三边，且长度等于第三边长度的一半.

解　在 $\triangle ABC$ 中，设边 AC 的中点为 D，边 CB 的中点 E，联结 DE. 由 $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{EC}$ 得

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{DC}+2\overrightarrow{CE}=2(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CE})=2\overrightarrow{DE},$$

故 $\overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{DE}$，且 $|\overrightarrow{AB}|=2|\overrightarrow{DE}|$，即三角形两边中点的连线平行于第三边，且长度等于第三边长度的一半.

3. 求平行于向量 $\boldsymbol{a}=(6,7,-6)$ 的单位向量.

解　向量 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量为 $\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$，故平行于向量 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量为

$$\pm\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\pm\frac{1}{11}(6,7,-6)=\pm\left(\frac{6}{11},\frac{7}{11},\frac{-6}{11}\right),$$

其中 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{6^2+7^2+(-6)^2}=11$.

4. 空间直角坐标系中，指出 $A(1,-2,3)$，$B(2,3,-4)$，$C(2,-3,-4)$，$D(-2,-3,1)$ 各点分别在哪个卦限.

解　A 点在第四卦限，B 点在第五卦限，C 点在第八卦限，D 点在第三卦限.

5. 求点 $M(4,-3,5)$ 到各坐标轴的距离.

解　点 M 到 x 轴的距离 $d_1=\sqrt{(-3)^2+5^2}=\sqrt{34}$，

点 M 到 y 轴的距离 $d_2=\sqrt{4^2+5^2}=\sqrt{41}$，

点 M 到 z 轴的距离 $d_3 = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5$.

6. 设已知两点 $M_1(4,\sqrt{2},1)$，$M_2(3,0,2)$，计算向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模、方向余弦和方向角.

解 向量 $\overrightarrow{M_1M_2} = (3-4, 0-\sqrt{2}, 2-1) = (-1, -\sqrt{2}, 1)$；

向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模 $|\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{2})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$；

向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的方向余弦分别为 $\cos\alpha = \dfrac{-1}{2}$，$\cos\beta = \dfrac{-\sqrt{2}}{2}$，$\cos\gamma = \dfrac{1}{2}$；

向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的方向角分别是 $\alpha = \dfrac{2}{3}\pi$，$\beta = \dfrac{3}{4}\pi$，$\gamma = \dfrac{\pi}{3}$.

7. 已知三点 $A(1,-1,3)$，$B(-2,0,5)$，$C(4,-2,1)$，问这三点是否在一直线上？

解 $\overrightarrow{AB} = (-2-1, 0-(-1), 5-3) = (-3,1,2)$，$\overrightarrow{AC} = (4-1, -2-(-1), 1-3) = (3,-1,-2)$，由 $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AC}$ 得向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 平行共线，故这三点是在一直线上.

8. 从点 $A(2,-1,7)$ 沿向量 $\boldsymbol{a} = 8\boldsymbol{i} + 9\boldsymbol{j} - 12\boldsymbol{k}$ 的方向取一线段 AB，长为 34，求 B 点的坐标.

解 设 $B(x,y,z)$，则

$$\overrightarrow{AB} = (x-2, y+1, z-7).$$

由 $\overrightarrow{AB} \parallel \boldsymbol{a}$，且 $|\overrightarrow{AB}| = 34$，得

$$\begin{cases} \dfrac{x-2}{8} = \dfrac{y+1}{9} = \dfrac{z-7}{-12} \\ \sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-7)^2} = 34 \end{cases},$$

解得 $x = 18$，$y = 17$，$z = -17$. 故所求 B 点的坐标为 $(18,17,-17)$.

9. 如果一向量与三个坐标轴正向的夹角都相等，那么该向量的三个方向角是否均为 $\dfrac{\pi}{3}$？

解 不是. 因为任意一个向量的三个方向角 α，β，γ 应满足

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

当 $\alpha = \beta = \gamma$ 时，有 $\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，即

$$\alpha = \beta = \gamma = \arccos\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \neq \frac{\pi}{3},$$

而由于 $\cos^2\dfrac{\pi}{3} + \cos^2\dfrac{\pi}{3} + \cos^2\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{3}{4} \neq 1$，因此三个方向角均为 $\dfrac{\pi}{3}$ 的向量是不存在的.

10. 若用 μ，υ，ω 表示一向量分别与坐标面 xOy，yOz，zOx 的夹角，是否也有等式 $\cos^2\mu+\cos^2\upsilon+\cos^2\omega=1$？

解　不是. 设 α，β，γ 为该向量的方向角，应有

$$\begin{aligned}\cos^2\mu+\cos^2\upsilon+\cos^2\omega&=\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)\\&=\sin^2\gamma+\sin^2\alpha+\sin^2\beta\\&=1-\cos^2\gamma+1-\cos^2\alpha+1-\cos^2\beta\\&=3-(\cos^2\gamma+\cos^2\alpha+\cos^2\beta)=3-1=2.\end{aligned}$$

习题 7.2　向量的乘积

1. 设 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$，求：

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 及 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$；

(2) $(-2\boldsymbol{a})\cdot3\boldsymbol{b}$ 及 $\boldsymbol{a}\times2\boldsymbol{b}$；

(3) $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 的夹角的余弦.

解　(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(3,-1,-2)\cdot(1,2,-1)$

$$=3\times1+(-1)\times2+(-2)\times(-1)=3.$$

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\3&-1&-2\\1&2&-1\end{vmatrix}=5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+7\boldsymbol{k}.$$

(2) $(-2\boldsymbol{a})\cdot3\boldsymbol{b}=-6(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=-6\times3=-18$，

$$\boldsymbol{a}\times2\boldsymbol{b}=2(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=2(5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+7\boldsymbol{k})=10\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+14\boldsymbol{k}.$$

(3) $\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\dfrac{3}{\sqrt{3^2+(-1)^2+(-2)^2}\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}}=\dfrac{3}{2\sqrt{21}}$.

2. 设 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$ 为单位向量，且 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=0$，求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$.

解　由 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，得

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{c}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+2\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=0,$$

而已知 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|=1$，所以有

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=-\frac{1}{2}(|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{c}|^2)=-\frac{3}{2}.$$

3. 求向量 $\boldsymbol{a}=(4,-3,4)$ 在向量 $\boldsymbol{b}=(2,2,1)$ 上的投影.

解　向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影为

$$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\frac{4\times2+(-3)\times2+4\times1}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}=2.$$

4. 设 $\boldsymbol{a}=(3,5,-2)$，$\boldsymbol{b}=(2,1,4)$，问 λ 与 μ 有怎样的关系，能使得 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$ 与 z 轴