中国矿业大学研究生院教学改革与建设项目（YJSJG2017015）资助

机械系统动力学

习题及解答

刘初升　武继达　编

Jixie Xitong Donglixue

Xiti Ji Jieda

中国矿业大学出版社

中国矿业大学研究生院教学改革与建设项目(YJSJG2017015)资助

机械系统动力学习题及解答

刘初升　武继达　编

中国矿业大学出版社

内容提要

本书由单自由度系统振动、多自由度系统振动、连续体振动、振动分析与仿真的数值方法、非线性振动基础等五部分组成。本书是作者根据多年的理论研究和科研教学实践经验编写而成的，从理论和应用两个方面深入浅出地阐述了动力学建模方法与动力学特性分析过程，详细介绍了机械系统动力学的数值方法基本原理及其推演过程。

图书在版编目(CIP)数据

机械系统动力学习题及解答/刘初升，武继达编. —徐州：中国矿业大学出版社，2017.8

ISBN 978-7-5646-3669-2

Ⅰ. ①机… Ⅱ. ①刘… ②武… Ⅲ. ①机械动力学—题解 Ⅳ. ①TH113—44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 203575 号

书　　名　机械系统动力学习题及解答
编　　者　刘初升　武继达
责任编辑　杨　洋
出版发行　中国矿业大学出版社有限责任公司
（江苏省徐州市解放南路　邮编 221008）
营销热线　(0516)83885307　83884995
出版服务　(0516)83885767　83884920
网　　址　http://www.cumtp.com　**E-mail**:cumtpvip@cumtp.com
印　　刷　江苏淮阴新华印刷厂
开　　本　787×960　1/16　**印张** 8.25　**字数** 150 千字
版次印次　2017 年 8 月第 1 版　2017 年 8 月第 1 次印刷
定　　价　16.00元

前　言

物理学中，将一个物体相性对于另一个物体位置的变化称为机械运动。机械振动是机械运动的特殊的运动形式，广泛存在于机械、土木、矿山、化工等众多领域中。随着机械设备和结构的大型化、复杂化、重载化的发展趋势，机械振动问题将愈发凸显。如何从具体工程问题中抽象出动力学模型并进行数学建模、分析和求解已成为科研学者和工程技术人员的必备技能。

本书包括单自由度系统振动、多自由度系统振动、连续体振动、振动分析与仿真的数值方法、非线性振动基础等五部分，在选题时偏重于具有工程实际应用背景的题目，解答时注重了规范性和条理性，有助于读者加深对相应振动理论的理解。全部题目均给出了解题步骤及答案。本书内容可作为《机械动力学》（刘初升等著，中国矿业大学出版社 2013 版）的补充，也可作为高等院校工科各专业的本科生、硕士研究生以及从事机械与结构振动有关工作的工程人员的参考书。

本书是作者多年科研教学工作的积累，编写过程中参考了国内外相关文献，在此对文献的作者们表示感谢，同时感谢中国矿业大学研究生院教学改革与建设项目的支持。作者的研究生王振乾、邹梦麒、王帅、袁驰、宋宝成等在本书的文字录入、插图绘制、习题解答等方面做了许多工作，在此一并感谢。

限于作者水平，书中错误与不妥之处在所难免，恳请广大同行及读者指正。对本书的意见和建议请发送至邮箱 liuchusheng@126.com。

作者

2017 年 8 月于矿大南湖校区

目　录

第 1 章　单自由度系统振动

1-1　求出如图 1-1(a)及图 1-1(b)所示系统的等效弹簧刚度，并求它们对应的运动方程和固有频率。

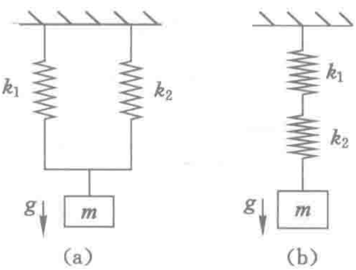

图 1-1

解：对并联弹簧：

$$F_1=k_1x,F_2=k_2x$$

$$F=F_1+F_2=(k_1+k_2)x$$

因而等效弹簧刚度为：

$$k_e=F/x=k_1+k_2$$

对于串联弹簧：

$$F=k_1x_1=k_2x_2$$

$$x=x_1+x_2=\frac{F}{k_1}+\frac{F}{k_2}$$

从而得等效弹簧刚度为：

$$k_e=\frac{F}{x}=\frac{1}{1/k_1+1/k_2}=\frac{k_1k_2}{k_1+k_2}$$

以弹簧自由状态为初始位置，系统的运动方程可以写为：

$$m\ddot{x}=-k_e(\delta+x)+mg$$

其中因 $k_e\delta=mg$，于是运动方程变为：

$$m\ddot{x}+k_e x=0$$

固有频率为：

$$\omega_n=\sqrt{k_e/m}$$

因此，对于并联弹簧系统：

$$\omega_n=\sqrt{k_e/m}=\sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}}$$

对于串联弹簧系统：

$$\omega_n=\sqrt{k_e/m}=\sqrt{\frac{k_1k_2}{(k_1+k_2)m}}$$

1-2　一个均质半圆盘，质量为 m，半径为 r，自由铰接于它的中心，如图 1-2 所示。求小摆角振荡的固有频率。

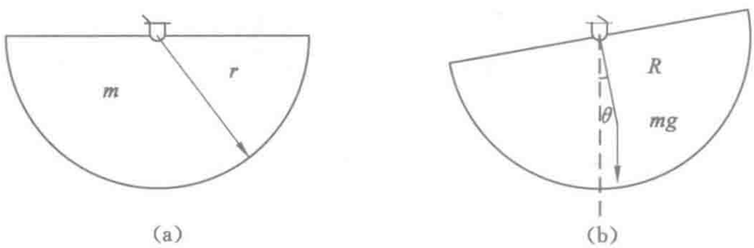

图 1-2

解：应用牛顿转矩方程：

$$\sum M=J\ddot{\theta}$$

圆盘的转动惯量：

$$J=\frac{1}{2}mr^2$$

质心与圆盘中心的距离为：

$$R=\frac{4r}{3\pi}$$

因而得到复原力矩 $M=mgR\sin\theta$，运动方程为：

$$\frac{1}{2}mr^2\ddot{\theta}=-\frac{4r}{3\pi}mg\sin\theta$$

对于微小转角，可令 $\sin\theta=\theta$，运动方程变为：

$$\ddot{\theta}+\frac{8g}{3\pi r}\theta=0$$

因此其固有频率为：

$$\omega_n=\sqrt{\frac{8g}{3\pi r}}$$

1-3　求图 1-3 所示弹簧-质量-滑轮系统的固有频率(绳子与滑轮之间不打滑)。

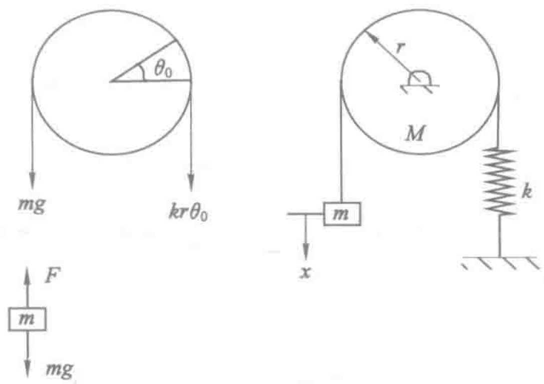

图 1-3

解：用能量法，系统的动能为：

$$T=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2=\frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2$$

系统的势能为：

$$U=\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}kr^2\theta^2$$

其中转动惯量：

$$J=\frac{1}{2}Mr^2$$

由于系统的总能量维持不变，因此有：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(T+U)=0$$

即

$$mr^2\dot{\theta}\ddot{\theta}+\frac{1}{2}Mr^2\dot{\theta}\ddot{\theta}+kr^2\theta\dot{\theta}=0$$

整理得：

$$\dot{\theta}r^2\left(m\ddot{\theta}+\frac{1}{2}M\ddot{\theta}+k\theta\right)=0$$

因为$\dot{\theta}$不可能总是等于零，因此有：

$$(2m+M)\ddot{\theta}+2k\theta=0$$

即

$$\ddot{\theta}+\frac{2k}{2m+M}\theta=0$$

求得其固有频率为：

$$\omega_n=\sqrt{\frac{2k}{2m+M}}$$

1-4 一质量为 m 的物体由 4 个刚度均为 k 的弹簧连接，如图 1-4 所示。求该系统的等效弹簧刚度。

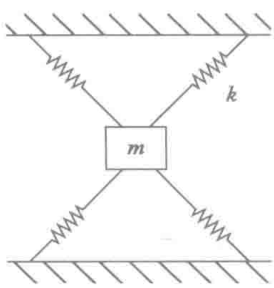

图 1-4

解：根据刚度的定义，等效弹簧刚度 $k_e=F/x$。下面分别求出 F 及 x 即可。

画出质量的受力图，因其只能在竖直方向上运动，得：

$$F=T(\cos\theta-\mathrm{d}\theta)\approx T\cos\theta$$

当弹簧的变形与弹簧长度相比较小时，弹簧的变形满足：

$$\Delta=x\cos\theta$$

则：

$$k_e = \frac{F}{x} = \frac{T\cos\theta}{\Delta/\cos\theta} = \frac{T}{\Delta}\cos^2\theta = k\cos^2\theta$$

1-5　弹簧的刚度为 k，弹簧质量不可忽略，如图 1-5 所示。求该系统的固有频率。

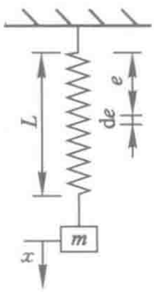

图 1-5

解：用能量法，系统的动能为：

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\dot{x}}{L}\right)^2\int_0^L e^2\,\mathrm{d}e \\ &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\dot{x}}{L}\right)^2\frac{L^3}{3} \\ &= \frac{1}{2}\left(m + \frac{1}{3}\rho L\right)\dot{x}^2 \end{aligned}$$

系统的势能为：

$$U = \frac{1}{2}kx^2$$

由于系统的总能量保持不变，因此有：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(T+U) = 0$$

即

$$\left(m + \frac{1}{3}\rho L\right)\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} = 0$$

整理得：

$$\left[\left(m + \frac{1}{3}\rho L\right)\ddot{x} + kx\right]\dot{x} = 0$$

因 $\dot{x}$ 不能总为 0，因此有：

$$\left(m + \frac{1}{3}\rho L\right)\ddot{x} + kx = 0$$

将上式改写成如下形式：

$$\ddot{x} + \frac{k}{m + \rho L/3}x = 0$$

因此求得系统的固有频率为：

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m + \rho L/3}}$$

1-6 一个单摆系统如图 1-6 所示，求该系统的固有频率。

(1) 摆杆的质量可以忽略；

(2) 摆杆的质量不可忽略(摆杆质量为 M)。

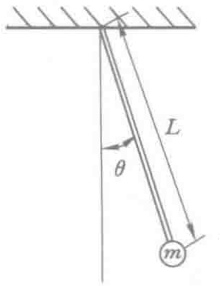

图 1-6

解：(1) 摆杆的质量可以忽略，则：

$$T=\frac{1}{2}m\dot{x}^2=\frac{1}{2}m(L\dot{\theta})^2$$

$$U=mgL(1-\cos\theta)$$

由于系统的总能量保持不变，因此：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(T+U)=mL^2\dot{\theta}\ddot{\theta}+mgL\sin\theta\dot{\theta}=0$$

整理得：

$$\ddot{\theta}+\frac{g}{L}\sin\theta=0$$

对于微小摆角，$\sin\theta\approx\theta$，运动方程变为：

$$\ddot{\theta}+\frac{g}{L}\theta=0$$

因此有：

$$\omega_n=\sqrt{\frac{g}{L}}$$

(2) 摆杆的质量不可忽略，其质心在摆杆的中点，则：

$$T=\frac{1}{2}m(L\dot{\theta})^2+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}M(L\dot{\theta})^2$$

$$U=mgL(1-\cos\theta)+Mg\frac{L}{2}(1-\cos\theta)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(T+U)=\left(m+\frac{M}{3}\right)L^2\dot{\theta}\ddot{\theta}+gL\left(m+\frac{M}{2}\right)\sin\theta\dot{\theta}=0$$

由于$\dot{\theta}$不能一直为 0，得：

$$\ddot{\theta}+\left(\frac{m+M/2}{m+M/3}\sin\theta\right)\frac{g}{L}=0$$

对于微小摆角，$\sin\theta\approx\theta$，运动方程变为：

$$\ddot{\theta}+\frac{m+M/2}{m+M/3}\frac{g}{L}\theta=0$$

因此有：

$$\omega_n=\sqrt{\frac{m+M/2}{m+M/3}\frac{g}{L}}$$

1-7　一质量为 m，半径为 r 的圆柱体用刚度为 k 的弹簧连接，在粗糙的水平表面上做无滑动的自由滚动，如图 1-7 所示。求该系统的固有频率。

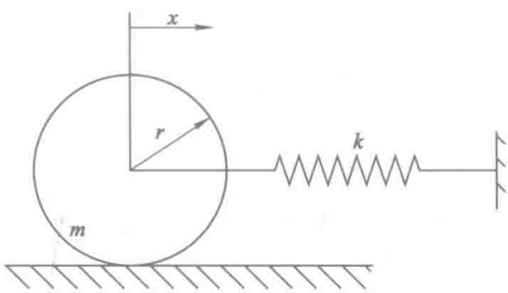

图 1-7

解：用能量法，系统的动能为：

$$T=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mr^2\right)\left(\frac{\dot{x}}{r}\right)^2=\frac{3}{4}m\dot{x}^2$$

势能为：

$$U=\frac{1}{2}kx^2$$

由$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(T+U)=0$，得：

$$\left(\frac{3}{2}m\ddot{x}+kx\right)\dot{x}=0$$

因为$\dot{x}$不能总为 0，因此得：

$$\frac{3}{2}m\ddot{x}+kx=0$$

因而：

$$\omega_n=\sqrt{\frac{2k}{3m}}$$

1-8 如图 1-8 所示的系统，绳索假设是不可伸缩的。假设质量 m 被移动少许位移后释放，用能量法求该系统的固有频率。

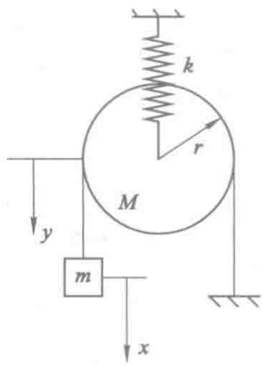

图 1-8

解：用能量法，系统的动能为：

$$T=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}M\dot{y}^2+\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}M\left(\frac{\dot{x}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}Mr^2\right)\left(\frac{\dot{x}}{2r}\right)^2$$

$$=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{3}{16}M\dot{x}^2$$

系统的势能为：

$$U=\frac{1}{2}ky^2=\frac{1}{2}k\left(\frac{x}{2}\right)^2=\frac{1}{8}kx^2$$

由 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(T+U)=0$，得：

$$\left(4m\ddot{x}+\frac{3}{2}M\ddot{x}+kx\right)\dot{x}=0$$

因为 $\dot{x}$ 不能总为 0，因此有：

$$4m\ddot{x}+\frac{3}{2}M\ddot{x}+kx=0$$

因此得：

$$\omega_n=\sqrt{\frac{2k}{8m+3M}}$$

1-9　一质量为 m 的圆柱体由刚度为 k 的弹簧连接，在倾角为 θ 的平面上做纯滚动，如图 1-9 所示。求该系统的固有频率。

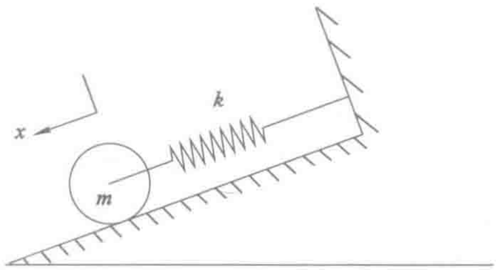

图 1-9

解：设弹簧的静变形为 Δ，则其与质量 m 的关系为：

$$mg=\frac{k\Delta}{\sin\theta}$$

用能量法，系统的动能为：

$$T=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mr^2\right)\left(\frac{\dot{x}}{r}\right)^2=\frac{3}{4}m\dot{x}^2$$

系统的势能为：

$$U=\frac{1}{2}k\ (x+\Delta)^2-\frac{1}{2}k\Delta^2-mgx\sin\theta=\frac{1}{2}kx^2$$

由 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(T+U)=0$，得：

$$\left(\frac{3}{2}m\ddot{x}+kx\right)\dot{x}=0$$

因为 $\dot{x}$ 不能总为 0，因此得：

$$\frac{3}{2}m\ddot{x}+kx=0$$

因而可得：

$$\omega_n=\sqrt{\frac{2k}{3m}}$$

从结果可以看出，无论是竖直弹簧还是斜着放置的弹簧，其静变形与引起静变形的重力在势能差中可以相互抵消。

1-10 一长为 l 的悬臂梁，截面为边长 a 的正方形，质量 m，固定在梁的自由端，如图 1-10 所示。悬臂梁的弹性模量为 EI，将质量 m 稍微位移后释放，求该系统的固有频率。

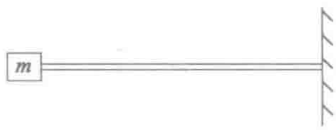

图 1-10

解：由材料力学的知识可知，由质量 m 产生的悬臂梁自由端的挠度为：

$$\delta=\frac{mgl^3}{3EI}$$

对于小振荡，悬臂梁可以视为弹性，其等效弹簧刚度为：

$$k_e=\frac{mg}{\delta}=\frac{mg}{\frac{mgl^3}{3EI}}=\frac{3EI}{l^3}$$

梁的截面惯性矩为：

$$I=\frac{b^3h}{12}=\frac{a^4}{12}$$

对于无阻尼振动，运动方程为：

$$m\ddot{x}+kx=0$$

固有频率为：

$$\omega_n=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{3EI}{ml^3}}=\sqrt{\frac{Ea^4}{4ml^3}}$$

1-11 求图 1-11 所示系统的固有频率及等效摆长，已知物体关于 O 点的回转半径为 r。

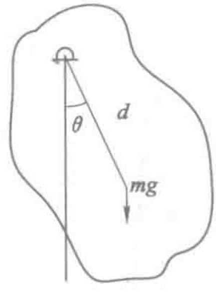

图 1-11

解：用能量法，系统的动能为：

$$T=\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2$$

系统的势能为：

$$U=mgd(1-\cos\theta)$$

由$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(T+U)=0$得：

$$\dot{\theta}(J\ddot{\theta}+mgd\sin\theta)=0$$

因为 $\dot{\theta}$ 不能总为 0，且在微小摆角下，$\sin\theta\approx\theta$，得：

$$J\ddot{\theta}+mgd\theta=0$$

求得：

$$\omega_n=\sqrt{\frac{mgd}{J}}$$

物体关于 O 点的转动惯量为：

$$J=mr^2$$

因此，系统的固有频率为：

$$\omega_n=\sqrt{\frac{gd}{r^2}}$$

与单摆的固有频率 $\omega_n=\sqrt{\frac{g}{l}}$ 比较得等效摆长为：

$$l_e=\frac{r^2}{d}$$

1-12　如图 1-12 所示的系统处于静止状态，给质量 m 一个 0.04 m/s 的初速度，求其随后的位移及速度。

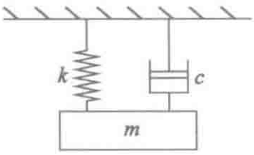

图 1-12

已知：c=60 N·s/m，k=1 600 N/m，m=4 kg。

解：系统的运动方程为：

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=0$$

固有频率为：

$$\omega_n=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{1\,600}{4}}(\mathrm{rad/s})=20(\mathrm{rad/s})$$

而其阻尼比为：

$$\xi=\frac{c}{2m\omega_n}=\frac{60}{2\times 4\times 20}=0.375<1$$

因此为弱阻尼系统，其通解为：

$$x=e^{-\xi\omega_n t}(C_1\cos\omega_d t+C_2\sin\omega_d t)$$

式中，

$$\omega_d=\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_n=18.54(\text{rad/s})$$

由初始条件：$t=0$ s 时，$x=0$ cm，$\dot{x}=0.04$ m/s，代入其通解得：

$$C_1=0,C_2=0.002\,16$$

因此其随后的位移及速度分别为：

$$x=0.002\,16e^{-7.5t}\sin 18.54t(\text{m})$$

$$\dot{x}=e^{-7.5t}(0.04\cos 18.54t-0.016\,2\sin 18.54t)(\text{m/s})$$

1-13 对于上题系统，设激振力 $F_0\sin\omega t=10\sin 15t$ 作用在质量上，计算该质量的位移及速度。

解：如上题所求，瞬态响应是：

$$x_c=Ae^{-7.5t}\sin(18.54t+\varphi)$$

式中，

$$\varphi=\arctan\frac{C_1}{C_2}$$

稳态响应是：

$$\begin{aligned}x_p&=\frac{F_0}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2+(c\omega)^2}}\sin(\omega t-\varphi)\\&=\frac{10}{\sqrt{(1\,600-4\times 15^2)^2+(60\times 15)^2}}\sin(15t-\varphi)\\&=0.008\,77\sin(15t-0.91)\end{aligned}$$

式中，

$$\varphi=\arctan\frac{2\xi\dfrac{\omega}{\omega_n}}{1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2}=\arctan\frac{2\times 0.375\times\dfrac{15}{20}}{1-\left(\dfrac{15}{20}\right)^2}=0.91(\text{rad})$$

这时，

$$x=x_c+x_p=Ae^{-7.5t}\sin(18.56t+\varphi)+0.008\,77\sin(15t-0.91)$$