清华大学出版社“十三五”规划教材
高等院校大学数学系列教材

高等数学

天津农学院数学教研室 编

清华大学出版社

高等院校大学数学系列教材

高等数学

天津农学院数学教研室 编

清华大学出版社
北京

内容简介

本书共10章，主要内容包括：函数、极限与连续，导数与微分，微分中值定理与导数的应用，不定积分，定积分及其应用，微分方程，空间解析几何简介，多元函数微分学及其应用，二重积分，曲线积分等．每章都配有习题及总习题，书末还附有习题参考答案．

本书可作为高等院校非数学专业本科学生的教材或教学参考用书．

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/天津农学院数学教研室编．—北京：清华大学出版社，2018
(高等院校大学数学系列教材)
ISBN 978-7-302-50207-4

Ⅰ．①高…　Ⅱ．①天…　Ⅲ．①高等数学－高等学校－教材　Ⅳ．①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第114521号

责任编辑：佟丽霞
封面设计：傅瑞学
责任校对：刘玉霞
责任印制：李红英

出版发行：清华大学出版社
网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地　　址：北京清华大学学研大厦A座　　邮　　编：100084
社 总 机：010-62770175　　邮　　购：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质量反馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：三河市吉祥印务有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×260mm　　**印　　张**：19　　**字　　数**：456千字
版　　次：2018年6月第1版　　**印　　次**：2018年6月第1次印刷
印　　数：1～1500
定　　价：42.00元

产品编号：074591-01

前言

本书是为普通高等院校非数学专业高等数学课程编写的教材，在保持结构严谨、内容通俗易懂的同时，注重基础，加强应用，尽量减少繁琐而又难以起到启发思维作用的逻辑证明．在编写的过程中，我们特别注重对学生的基本运算能力、分析问题及解决问题能力的培养．

参与本书编写的人员均是天津农学院的教师：崔军文（第 1 章 1.1～1.6 节、第 9 章），朱文新（第 1 章 1.7～1.9 节、第 8 章），穆志民（第 2 章、第 6 章），俞竺君（第 3 章 3.1～3.2 节），孙丽洁（第 3 章 3.3～3.4 节），刘琦（第 3 章 3.5～3.6 节），张海燕（第 4 章），徐利艳（第 5 章），张振荣（第 7 章），王学会（第 10 章 10.1 节），金惠兰（第 10 章 10.2 节），房宏（第 10 章 10.3 节），王学会负责第 10 章的审稿工作，张海燕负责全书的统稿工作．

天津农学院基础科学学院和教材科的领导及教师在本书的出版过程中给予了大力的协助，在此一并致谢！

由于编者水平有限，书中难免有不妥之处，敬请广大读者不吝指正．

编　者

2017 年 11 月于天津

目录

第1章 函数、极限与连续

初等数学的研究对象基本上是不变的量，而高等数学是以变量作为研究对象的一门数学．函数刻画的就是变量之间的某种依赖关系，用极限来研究函数是高等数学的一种基本方法．本章在复习函数有关内容的基础上，着重学习函数极限的概念及其求法，使读者能够熟练掌握这些内容，为后面的学习打下良好的基础．

1.1 函数的基本概念

1.1.1 函数的定义

在一个问题中往往同时存在几个变量在变化，而这些变量并不是孤立地变化的，它们相互联系并遵循着一定的变化规律，下面先来分析两个例子．

例 1 圆的面积．考虑圆的面积 A 与它的半径 r 之间的相依关系．大家知道，它们之间符合如下公式：

$$A=\pi r^2.$$

当半径 r 在区间 $(0,+\infty)$ 内任意取定一个数值时，由上式可以唯一确定圆的面积 A 的相应数值．

例 2 自由落体运动．设物体下落的时间为 t，落下的距离为 s．假定开始下落的时刻为 $t=0$，那么 s 与 t 之间的相依关系符合如下公式：

$$s=\frac{1}{2}gt^2,$$

其中，g 是重力加速度．假定物体着地的时刻为 $t=T$，那么当时间 t 在闭区间 $[0,T]$ 上任意取定一个数值时，由上式可以唯一确定 s 的相应数值．

撇开上面这两个例子中所涉及变量的实际意义，就会发现，它们都反映了两个变量之间的相依关系，这种相依关系就是当其中的一个变量在其变化范围内任意取定一个数值时，另一个变量就有唯一确定的数值与之对应，两个变量之间的这种相依关系就是函数概念的实质．

定义 1 设 D 为非空实数集，若存在一个对应法则 f，使得对 D 中的任意实数 x，按照法则 f 都有唯一确定的实数 y 与之对应，则称 f 是定义在 D 上的函数，记作 $y=f(x)$．其中 x 称为自变量，y 称为因变量，数集 D 称为函数 $f(x)$ 的定义域．

函数值的集合

$$f(D)=\{y\,|\,y=f(x),x\in D\}$$

称为函数 $y=f(x)$ 的值域，记作 R_f.

表示函数的记号是任意选取的，除了常用的记号 f 外，还可以用其他字母，例如 ϕ,φ 等，这时函数就分别记作 $y=\phi(x)$，$y=\varphi(x)$ 等. 有时还直接用因变量的记号来表示函数，即把函数记作 $y=y(x)$. 但应该注意在同一问题中，讨论几个不同的函数时，为了表示它们的区别，需要用不同的符号来表示函数. 例如，函数 $y=y_1(x)$，$y=y_2(x)$.

函数的对应法则和函数的定义域是函数的两个要素. 如果两个函数的定义域相同，对应法则也相同，那么这两个函数就是相同的，否则就是不同的. 例如，函数 $f(x)=x$ 与 $g(x)=\sqrt{x^2}$ 不相同，因为二者的对应法则不同.

在实际问题中，函数的定义域是根据问题的实际意义而确定的. 如例 1 中，定义域 $D=(0,+\infty)$；例 2 中，定义域 $D=[0,T]$.

在高等数学中，有时不考虑函数的实际意义，而研究用抽象解析式来表示的函数，这时我们约定：函数的定义域就是使得函数解析式有意义的一切自变量的全体构成的集合. 例如，函数 $y=\sqrt{4-x^2}$ 的定义域为闭区间 $[-2,2]$，函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的定义域为开区间 $(-1,1)$.

函数的表示方法除了用解析式来表示外，还可以用表格、图像来表示，因此函数的表示方法主要有三种：表格法、图像法、解析法(公式法).

如果函数的自变量在定义域内任取一个数值时，对应的函数值有且只有一个，则称这种函数为单值函数；否则称为多值函数. 本书中所讨论的函数若无特殊说明，均指单值函数.

在函数中，有的时候一个函数要用几个表达式来表示，这种在定义域的不同范围内，对应法则用不同的表达式来表示的函数，称为分段函数. 例如，函数 $y=\begin{cases}2x+1, & x\geqslant 0,\\ e^x, & x<0\end{cases}$ 就是一个分段函数.

下面来给出几个函数的例子.

例 3 常函数 $y=2$，其定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$，值域为 $W=\{2\}$. 它的图形是一条平行于 x 轴的直线，如图 1.1 所示.

例 4 绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0,\end{cases}$$

其定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$，值域为 $W=[0,+\infty)$. 它的图形是两条从原点出发的射线，如图 1.2 所示.

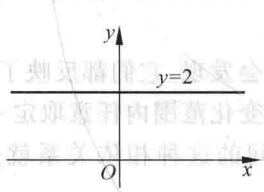

图 1.1

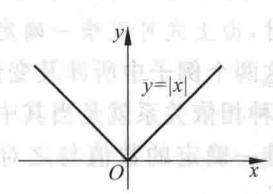

图 1.2

例 5 符号函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$$

其定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$，值域为 $W=\{-1,0,1\}$. 它的图形是原点和两条平行于 x 轴的射线，如图 1.3 所示. 对于任何实数 x，总有等式 $x=\operatorname{sgn}x\cdot|x|$ 成立.

例 6 取整函数. 设 x 为任一实数，不超过 x 的最大整数称为 x 的整数部分，记作 $[x]$，例如

$$\left[\frac{4}{9}\right]=0,\quad [\sqrt{2}]=1,\quad [\pi]=3,\quad [-1]=-1,\quad [-3.6]=-4.$$

若把 x 看成自变量，则函数 $y=[x]$ 称为取整函数. 其定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$，值域为 $W=\mathbb{Z}$. 它的图形为阶梯曲线，在 x 为整数值处发生跳跃，且跳跃的高度为 1，如图 1.4 所示.

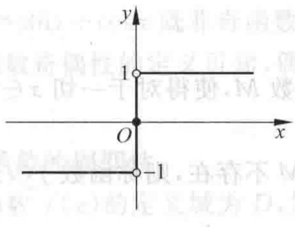

图 1.3

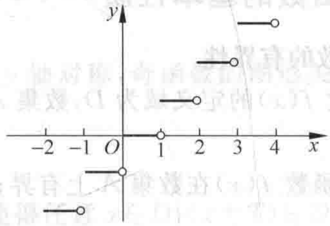

图 1.4

1.1.2 反函数与复合函数

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 W. 一般地，对于任一数值 $y\in W$，在 D 中有一个确定数值 x 与之对应，这个数值 x 适合关系：

$$f(x)=y.$$

此时，如果把 y 看作自变量，x 看作因变量，按照函数概念，得到一个新的函数 $x=\varphi(y)$，则称这个新的函数 $x=\varphi(y)$ 为原来函数 $y=f(x)$ 的反函数，记作 $x=f^{-1}(y)$. 相对于反函数 $x=f^{-1}(y)$ 来说，原来的函数 $y=f(x)$ 称为直接函数. 习惯上，用字母 x 表示函数的自变量，用字母 y 表示函数的因变量. 这样，反函数 $x=f^{-1}(y)$ 可表示为 $y=f^{-1}(x)$ 的形式. 由于函数的实质是对应法则，我们改变的只是表示函数的自变量和因变量的字母，而没有改变函数的对应法则，所以函数 $x=f^{-1}(y)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 实质上还是同一个函数.

在同一个坐标平面上，直接函数 $y=f(x)$ 与反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称(见图 1.5). 因为如果 $P(a,b)$ 是函数 $y=f(x)$ 图形上的点，则 $Q(b,a)$ 就是函数 $y=f^{-1}(x)$ 图形上的点；反之，若 $Q(b,a)$ 是函数 $y=f^{-1}(x)$ 图形上的点，则 $P(a,b)$ 就是函数 $y=f(x)$ 图形上的点，而点 $P(a,b)$ 和点 $Q(b,a)$ 是关于直线 $y=x$ 对称的，故函数 $y=f(x)$ 与函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称.

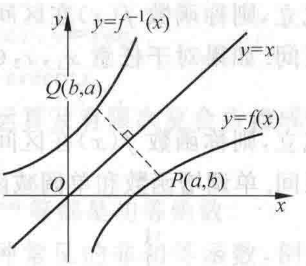

图 1.5

例如，对数函数 $y=\log_a x$ 的反函数是指数函数 $y=a^x$，二者的图形关于直线 $y=x$ 对称.

下面来讨论复合函数.

一般地，若函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_1，函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域为 D_2、值域为 W_2，并且 $W_2\subset D_1$，那么对于每个数值 $x\in D_2$，有确定的数值 $u\in W_2$ 与之对应，而 $W_2\subset D_1$，相应地也有确定的数值 y 与数值 u 对应. 即对于每个数值 $x\in D_2$，通过变量 u 有确定的数值 y 与之

对应，这样我们就得到了一个以 x 为自变量、以 y 为因变量的函数，这个函数称为由函数 $y=f(u)$ 与函数 $u=\varphi(x)$ 构成的复合函数，记作 $y=f[\varphi(x)]$. 其中 $y=f(u)$ 称为外层函数，$u=\varphi(x)$ 称为内层函数，u 称为中间变量.

例如，函数 $y=\sin x^2$ 就是一个由 $y=\sin u$ 与 $u=x^2$ 构成的复合函数，复合函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，它也是内层函数 $u=x^2$ 的定义域.

必须注意，不是任何两个函数都能构成复合函数. 例如，$y=\arcsin u$ 与 $u=2+x^2$ 就不能构成复合函数，因为内层函数 $u=2+x^2$ 的值域完全不在外层函数 $y=\arcsin u$ 的定义域内.

1.1.3 函数的基本性质

1. 函数的有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，数集 $A\subset D$. 如果存在正数 M，使得对于一切 $x\in A$，恒有

$$|f(x)|\leqslant M$$

成立，则称函数 $f(x)$ 在数集 A 上有界；如果这样的正数 M 不存在，则称函数 $f(x)$ 在数集 A 上无界.

例如，函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界函数. 因为对于所有 x，都有 $|\sin x|\leqslant 1$，$|\cos x|\leqslant 1$. 而函数 $y=x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是无界函数.

从几何图形上看，函数 $f(x)$ 在数集 A 上有界，就是函数 $f(x)$ 在数集 A 上的图形位于直线 $y=-M$ 与 $y=M$ 之间.

有界函数的另一种等价定义如下.

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，数集 $A\subset D$. 如果存在两个数 m，M，使得对于一切 $x\in A$，恒有

$$m\leqslant f(x)\leqslant M$$

成立，则称函数 $f(x)$ 在数集 A 上有界.

2. 函数的单调性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$，如果对于任意 $x_1,x_2\in I$，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1)<f(x_2)$$

成立，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增函数(见图 1.6). 区间 I 称为函数 $f(x)$ 的单调增区间. 如果对于任意 $x_1,x_2\in I$，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1)>f(x_2)$$

成立，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调减函数(见图 1.7). 区间 I 称为函数 $f(x)$ 的单调减区间. 单调增函数和单调减函数统称为单调函数. 单调增区间和单调减区间统称为单调区间.

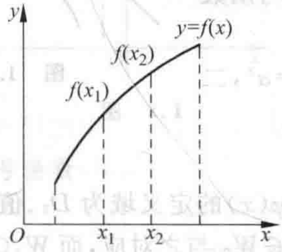

图 1.6

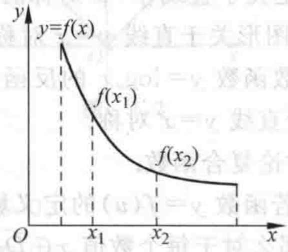

图 1.7

例如,函数 $y=x^2$ 在区间$(-\infty,0]$上是单调减函数,在区间$[0,+\infty)$上是单调增函数,但在区间$(-\infty,+\infty)$上不具有单调性. 函数 $y=x^3$ 在区间$(-\infty,+\infty)$上是单调增函数.

3. 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$的定义域 D 关于坐标原点对称(即若 $x\in D$,则 $-x\in D$). 如果对于任何 $x\in D$,恒有

$$f(-x)=-f(x)(f(-x)=f(x))$$

成立,则称函数 $f(x)$为奇(偶)函数.

例如,函数 $f(x)=\sin x, f(x)=x^3$ 是奇函数. 函数 $f(x)=\cos x, f(x)=x^2$ 是偶函数. 函数 $f(x)=\sin x+\cos x$ 既非奇函数也非偶函数.

由函数奇偶性的定义可知,偶函数的图形关于 y 轴对称,奇函数的图形关于坐标原点对称.

4. 函数的周期性

设函数 $f(x)$的定义域为 D,如果存在正数 T,使得任意 $x\in D$,$(x+T)\in D$,恒有

$$f(x+T)=f(x)$$

成立,则称函数 $f(x)$为周期函数,正数 T 称为函数 $f(x)$的周期.

通常所说的周期均指其最小正周期. 例如,函数 $\sin x, \cos x$ 的周期均为 $T=2\pi$. 函数 $\tan x, \cot x$ 的周期均为 $T=\pi$.

思考题 任何周期函数都有最小正周期吗?

1.1.4 初等函数

基本初等函数是指中学时所学过的以下六类函数,由于它们在高等数学中具有非常基础但很重要的地位,希望读者熟练掌握这些函数的性质及其图形等,这里不再一一赘述.

(1) 常函数:$y=C$(C 为常数).

(2) 幂函数:$y=x^\mu$(μ 是常数).

(3) 指函数:$y=a^x(a>0,a\neq1)$.

(4) 对数函数:$y=\log_a x(a>0,a\neq1)$.

(5) 三角函数:$y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x, y=\cot x, y=\sec x, y=\csc x$.

(6) 反三角函数:$y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x, y=\operatorname{arccot} x$.

所谓**初等函数**,是指由常数和基本初等函数经有限次四则运算及有限次复合所构成的,并可用一个式子来表示的函数.

例如,函数 $y=\sin(2x+1), y=\log_a(1+\sqrt{1+x^2}), y=10^{\arcsin x}$ 等都是初等函数.

在实际应用中也常常遇到非初等函数. 分段函数就是一种常见的非初等函数,例如,$y=\begin{cases}\sin 2x, & x\geqslant0,\\ 1+x^2, & x<0\end{cases}$ 就是一个非初等函数.

习题 1.1

1. 求下列函数的表达式:

(1) 已知 $f(x+1)=x^2+x$,求 $f(x)$;

(2) 已知 $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}$,求 $f(x)$;

(3) 已知 $2f(x)+f(1-x)=x^2$,求 $f(x)$;

(4) 已知 $f(x_1+x_2)=\sin x_1\cos x_2+\cos x_1\sin x_2$,求 $f(x)$.

2. 求下列函数的定义域:

(1) $y=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$; (2) $y=\tan(x+2)$;

(3) $y=\arcsin(x-3)$; (4) $y=\ln(x+1)$;

(5) $y=\frac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$; (6) $y=\sqrt{3-x}+\arctan\frac{1}{x}$.

3. 下列各题中,函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同? 为什么?

(1) $f(x)=\lg x^2, g(x)=2\lg x$;

(2) $f(x)=x, g(x)=\sqrt{x^2}$;

(3) $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}, g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$;

(4) $f(x)=1, g(x)=\sec x^2-\tan x^2$.

4. 判断下列函数在所给区间上的单调性:

(1) $f(x)=e^{\cos x}, x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$; (2) $f(x)=e^{-\sin x}, x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$;

(3) $f(x)=\sin(\sin x), x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$; (4) $f(x)=\cos(\sin x), x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

5. 下列函数中哪些是偶函数? 哪些是奇函数? 哪些既非奇函数又非偶函数?

(1) $y=x(x-1)(x+1)$; (2) $y=\frac{1-x^2}{1+x^2}$;

(3) $y=\sin x-\cos x+1$; (4) $y=\frac{a^x+a^{-x}}{2}$;

(5) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$; (6) $y=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$.

6. 下列各函数中哪些是周期函数? 对于周期函数,指出其周期.

(1) $y=\cos(x-2)$; (2) $y=\sin 4x$;

(3) $y=2+\sin\pi x$; (4) $y=x\cos x$;

(5) $y=\cos^2 x$.

7. 设 $f(x)$ 的定义域为 $D=[0,1]$,求下列各函数的定义域:

(1) $f(x^2)$; (2) $f(\sin x)$;

(3) $f(x+a)(a>0)$; (4) $f(x+a)+f(x-a)(a>0)$.

8. 设 $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$,求 $f_4(x)=f(f(f(f(x))))$.

9. 讨论狄利克雷(Dirichlet)函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数},\\ 0, & x\text{ 为无理数}\end{cases}$$

的单调性、有界性、周期性.