

中国水利教育协会

高等学校水利类专业教学指导委员会

共同组织



全国水利行业“十三五”规划教材（普通高等教育）

环境水力学

主 编 刘国东 王 焱



中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

中国水利教育协会
高等学校水利类专业教学指导委员会

共同组织



全国水利行业“十三五”规划教材（普通高等教育）

环境水力学

主 编 刘国东 王 焱



中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

· 北京 ·

内 容 提 要

本教材包括7个章节：第1章绪论；第2章迁移扩散基本理论；第3章剪切流的分散；第4章射流、羽流和浮射流；第5章河流水质模型；第6章湖泊（水库）水质模型；第7章地下水水质模型。教材在介绍相关基本概念、基本理论的基础上完善了相关水质模型，增加了运用知识解决实际问题的模型应用，有针对性地突出学科发展的新特点，进一步满足学生学习的新需求。

本书作为全国水利行业“十三五”规划教材，适用于全国各类院校的水文与水资源工程专业，也可以作为环境科学、环境工程和其他与水环境相关专业的本科生教材。

图书在版编目（CIP）数据

环境水力学 / 刘国东, 王焱主编. — 北京 : 中国水利水电出版社, 2018.5
全国水利行业“十三五”规划教材. 普通高等教育
ISBN 978-7-5170-6546-3

I. ①环… II. ①刘… ②王… III. ①环境水力学—高等学校—教材 IV. ①X52

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第127809号

书 名	全国水利行业“十三五”规划教材（普通高等教育） 环境水力学 HUANJING SHUILIXUE
作 者	主编 刘国东 王焱
出版发行	中国水利水电出版社 (北京市海淀区玉渊潭南路1号D座 100038) 网址: www.waterpub.com.cn E-mail: sales@waterpub.com.cn 电话: (010) 68367658 (营销中心)
经 售	北京科水图书销售中心(零售) 电话: (010) 88383994、63202643、68545874 全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排 版	中国水利水电出版社微机排版中心
印 刷	天津嘉恒印务有限公司
规 格	184mm×260mm 16开本 9.25印张 219千字
版 次	2018年5月第1版 2018年5月第1次印刷
印 数	0001—3000册
定 价	22.00元

凡购买我社图书，如有缺页、倒页、脱页的，本社营销中心负责调换

版权所有·侵权必究

前言

“环境水力学”是高等院校水利类各有关专业的一门主要课程。其主要内容是研究污染物在水体中混合、输移的规律及其应用，探求因混合、输移而形成的污染物浓度随空间和时间的变化关系，为水质评价与预报、水质规划与管理、排污工程的规划设计以及水资源保护的合理措施提供基本依据。

2006年《水文与水资源工程专业规范》（简称“规范”）要求为水文与水资源工程专业讲授“环境水力学”时需要增加水质模型的内容。单独使用《环境水力学》或《水质模型》教材均不能达到《规范》要求，如果同时使用上述两本教材会有大量重复内容，因此编写新版的《环境水力学》教材是非常必要的，也是专业规范的要求。

本次编写的教材为新编教材，参考、综合了国内数本《环境水力学》及其相关教材，主要包括赵文谦编著的《环境水力学》、徐孝平编写的《环境水力学》、杨志峰编著的《环境水力学原理》、李大美和黄克中编著的《环境水力学》、黄真理主编的《中国环境水力学》、陈崇希和李国敏编著的《地下水溶质运移理论及模型》、雅·贝尔著的《地下水水力学》、孙訥正的《地下水污染—数学模型和数值方法》等教材和著作。本书虽然属于本科教材，在编写过程中选用了新公式和环境影响评价导则推荐公式。主编人员已为四川大学本科生讲授《环境水力学及水质模型》16年，在教学实践的基础上，为了更好地适应教学改革发展的需要，同时考虑环境水力学的新发展和环境影响评价的要求，对原有《环境水力学》教材的内容和结构做了更新和扩充：强化了环境水力学的基本概念、水质扩散迁移的基本规律和基本方程；充实水质模型的内容及其解析解公式，增加了与日益重视的地下水和海洋环境保护相关的地下水水质模型和河口水质模型，将理论与实践紧密结合起来，加强学生的实践感知。

本书由刘国东、王焱主编，参加编写的有夏菁、贺欣悦、刘稳、胡月、

目录

前言

第 1 章 绪论	1
1.1 环境水力学研究内容和研究方法	1
1.2 环境水力学相关概念	3
第 2 章 迁移扩散基本理论	6
2.1 分子扩散菲克定律与扩散方程	6
2.2 扩散方程的解	8
2.3 若干条件下一维扩散方程的解	12
2.4 二维和三维扩散方程的解	16
2.5 随流扩散方程及其特定解	19
2.6 紊动扩散	26
第 3 章 剪切流的分散	37
3.1 剪切分散的概念及分散方程	37
3.2 剪切层流的分散	40
3.3 剪切紊流的分散	42
3.4 天然河流中的扩散和分散	45
第 4 章 射流、羽流和浮射流	55
4.1 概述	55
4.2 射流的基本规律	55
4.3 淹没射流	59
4.4 羽流的基本规律	64
4.5 浮射流的基本规律	70
第 5 章 河流水质模型	74
5.1 水质模型及其分类	74
5.2 河流水质污染特性及基本运移方程	75
5.3 河水中溶解氧与有机物降解模型	81
5.4 QUAL-II 综合水质模型	88

5.5	河口水质模型	92
第 6 章	湖泊（水库）水质模型	96
6.1	湖泊（水库）污染特性	96
6.2	湖泊（水库）水质模型	98
6.3	湖泊（水库）富营养化模型	101
6.4	湖泊（水库）分层流动水温模型	103
第 7 章	地下水水质模型	105
7.1	基本概念	105
7.2	地下水水质污染特性与水动力弥散	107
7.3	地下水溶质运移数学模型	110
7.4	地下水水质模型的解析解	112
附录		126
附录 1	常用符号与单位	126
附录 2	拉普拉斯变换	128
附录 3	几个重要函数	130
参考文献		138

位置随时间的变化,从而得出污染物浓度或其他指标的变化规律。根据实验场所分为室内实验和现场实验:室内实验有水槽实验、沙柱实验、模拟实验等;现场实验是在现场水体的固定点上,利用漂浮物和示踪剂跟踪水流的轨迹和分散情况,主要有水团追踪实验、示踪实验等。

2. 数量级分析法

流体混合是一个很复杂的问题,且影响水环境的因素很多,因此,需要忽略一些次要的影响因素,仅考虑主要的影响因素,采用数量级分析法对所研究的问题迅速给出相当量级的数值解答,列出几个重要参数的函数关系,并对这些关系的合理性近似作出判断。这种方法的基础是量纲分析和数量级分析。

3. 解析分析法

通过数学分析建立污染物浓度随时间与空间变化的数学表达式,或运用这些数学公式分析污染物随时间或空间的变化情况。

4. 随机分析法

运用随机数学理论建立污染物浓度随时间与空间变化的数学表达式,或运用随机数学理论分析污染物随时间或空间的变化情况。

5. 数值模拟法

在计算机上,运用有限差分法、有限元(边界元)等方法,对污染物的扩散、弥散、混合等问题进行模拟,分析污染物随时间或空间的变化。

以上几种方法各有优缺点,解决实际问题时既可分别采用,对于复杂问题,又可根据需要同时采用。

1.1.3 环境水力学的发展

自 1921 年泰勒(G. I. Taylor)首次提出水流的紊动扩散理论,至今已近百年。期间经历了一段缓慢的发展阶段,直至 20 世纪 60 年代后期才有了较大的发展,逐步形成为水力学的一个重要分支学科,同时也是一门交叉学科。

环境水力学借鉴了许多应用学科领域的经典理论作为本学科建立和发展的理论基础。如 1855 年由德国生理学家菲克提出的菲克定律;1921 年从化工传质问题的研究中得到的紊动扩散泰勒理论。20 世纪 70 年代,国际水利研究协会(International Association for Hydraulic Research, IAHR)成立了环境水力学组,中国水利学会水力学专业委员会也成立了环境水力学组。在国外,传统的土木工程系纷纷更名为土木与环境工程系,增设了与环境有关的课程,如环境水力学、水环境数学模型等。国内许多大学、科研单位设立了环境水力学研究机构,开始招收环境水力学研究方向的硕士、博士学位研究生。IAHR 2009 年通过新名“International Association for Hydro-Environment Engineering and Research”,2010 年将中文名称定为“国际水利与环境工程协会”,扩大了水利和环境交叉科学研究范围。为了适应环境水力学研究的蓬勃发展,IAHR 每两年要召开一次环境水力学国际研讨会,并出版环境水力学会议论文集;中国水利学会水力学专业委员会每两年也召开一次全国性的环境水力学学术会议,及时了解学科发展动态和方向,增进国内同仁的学术交流,正式出版环境水力学会议论文集。

近 40 年来,国际上权威性的水力学刊物,如 IAHR 的 *Journal of Hydraulic Research*、ASCE (美国土木工程师学会, American Society of Civil Engineers) 的 *Journal of Hydraulic Engineering* 等增加了环境水力学方面的文章, ASCE 新增了 *Journal of Environmental Engineering*, IAHR 在 *Journal of Hydraulic Research* 中新增了环境水力学专辑。与此同时,国内相应刊物中环境水力学方面文章的比例也大大增加。在国外,有德国卡尔斯路赫 (Karlsruhe) 大学罗迪 (W. Rodi, 1982) 主编的 *Turbulent Buoyant Jets and Plumes*, 德国斯图加特 (Stuttgart) 大学 W. 金士博 (Kinseloach, 1987) 的《水环境数学模型》, 美国路易斯安那 (Louisiana) 州立大学辛格 (V. P. Singh) 和瑞士联邦理工学院 (Swiss Federal Institute of Technology) 哈格 (W. H. Hager, 1996) 主编的 *Environmental Hydraulics* 等。随着环境水力学的进一步发展,我国相继出版了几本环境水力学方面的教材,较早的有香港大学李行伟 (Joseph Hun-Wei Lee, 1981) 的 *Theory of Buoyant Jets and Its Environmental Applications*、成都科技大学赵文谦 (1986) 的《环境水力学》、河海大学张书农 (1988) 的《环境水力学》、武汉水利电力大学徐孝平 (1991) 的《环境水力学》、清华大学余常昭 (1992) 的《环境流体力学导论》等。另外,国内还出版了与环境水力学相关的一些著作,如西安理工大学沈晋、沈冰等 (1992) 的《环境水文学》、武汉水利电力大学李炜、槐文信 (1997) 的《浮力射流的理论及应用》以及李炜 (1999) 主编的《环境水力学研究进展》等。

目前,环境水力学研究较为广泛深入的主要有 3 个领域:射流混合机理、分层流和天然水体中污染物的运输规律。随着全球水环境问题的日益突出、人类对生存质量要求的不断提高和现代科学技术的快速发展,环境水力学在研究内容、方法和手段上都有了新的变化。就研究内容而言,越来越多地涉及生态系统的变化,环境水力学不再是传统意义上的污染水力学,而是向着生态水力学的方向发展。就研究方法而言,结合水环境系统的特点,运用数理统计、非确定性分析方法等;随着系统科学的发展,模糊随机系统分析、灰色系统分析等方法也将在环境水力学的研究中广泛应用。就研究手段而言,数字图像处理技术、“3S”技术 (地理信息系统 GIS、遥感系统 RS、全球定位系统 GPS) 和专家系统等一些新技术在环境水力学中的应用,有力地推动着环境水力学的发展。

1.2 环境水力学相关概念

1.2.1 浓度

污染物或示踪剂在水中的浓度是研究水环境问题最重要的指标。单位水体中所含某种污染物的质量称为该种物质的质量浓度,简称浓度,以 C 表示。浓度可能是处处不同的,用瞬时极限的方法可表示为

$$C = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \Delta M / \Delta V \quad (1.1)$$

式中: ΔM 为 ΔV 水体体积内所含该种物质的质量。

环境监测部门常用 ppm (百万分之一) 表示浓度,即 1kg 水中含有 1mg 物质的浓度为 1ppm。浓度的常用单位是 mg/L 或 g/L。在三维扩散方程中浓度 C 的量纲为

$[\text{ML}^{-3}]$ ，而在一维扩散方程中 C 的量纲为 $[\text{ML}^{-1}]$ 。

一般来说，水体中含有物质的浓度是时间和空间坐标的函数，即

$$C = C(x, y, z, t) \quad (1.2)$$

在紊动水流中，不仅水流运动参数随时间而变化，而且浓度值也具有随机变化的特性，所以需要研究浓度的时间平均值 $\bar{C}$ ； $\bar{C}$ 可用下式定义：

$$\bar{C}(x, y, z, t_0) = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} C(x, y, z, t) dt \quad (1.3)$$

浓度的时间平均值 $\bar{C}$ 仍是空间坐标、取平均的时段 T 和初始时刻 t_0 的函数。

1.2.2 稀释度

稀释度也可作为反映纳污水体被污染的一种指标。稀释度 S 定义为

$$S = \text{样品总体积} / \text{样品中所含污水体积}$$

稀释度 $S=1$ ，表明污水未得到任何稀释；若 $S=\infty$ ，则说明样品中所含污水体积为 0，样品为纯净水体。

1.2.3 通量

通量表示的是物质移动量的大小，也可作为反映纳污水体被污染的一种指标，分为质量通量和体积通量。质量通量是指单位时间内通过单位面积的污染物质量，量纲为 $[\text{ML}^{-2}\text{T}^{-1}]$ ，如 $\text{mg}/(\text{cm}^2 \cdot \text{s})$ 、 $\text{kg}/(\text{m}^2 \cdot \text{h})$ 等，常用 q 或 F 表示。体积通量是指单位时间通过单位面积的污染物体积，量纲为 $[\text{LT}^{-1}]$ ，如 cm/s 、 m/s 等。

1.2.4 动力活性物质和动力惰性物质

从力学的角度看问题，有些物质混入水体中可以显著影响水的密度，从而影响水体（即环境水体）的力学特性；而有些物质则不会。因此，我们称前者为动力活性物质，后者为动力惰性物质。动力惰性物质是密度与环境水体密度相等或几乎相等的污染物质，它的混入不影响环境水体原有的动力特性，取质点进行力学分析时不必将它与环境水体分开，动力活性物质介入环境水体后就会改变其动力特性，如冷却水排放，或异重流的侵入。

1.2.5 保守物质和非保守物质

从物理的生化的角度看问题，有些物质混合到环境水体中会起生物化学反应或生物降解，生成新的物质，而改变其原有浓度；但有些物质却不会，前者被称为非保守物质，后者为保守物质。我们将保守的动力惰性物质称作示踪质（或示踪剂）。

1.2.6 污染源及其类型

污染源是造成水域污染的污染物发生源，通常指向水域排放有害物质或对水域产生有害影响的场所、设备和装置。

按污染源在水域的存在形式可分为点源、线源、面源、有限分布源和无限分布源。按污染源在时间分布上可分为瞬时源、连续源和间歇源。瞬时源是指污染物在瞬时内排入水域，时间连续源是指污染物在相当长时间内持续不断地排入水域，间歇源是指污染物在一

定时间内不定时间断性地排入水域。

在实际问题中，绝对的点源、无限长的线源和无限大的面源是不存在的，只是对面积很小的面源、长度很大的线源和面积很大的面源的近似处理；瞬时源也是对排放时间很短的污染源的一种近似，如行驶在江海中油轮事故泄漏、核武器试验的核污染等。

1.2.7 水质模型

水质模型是描述水体中物质混合、输移、转化规律的数学模型总称。是以环境水力学基本理论为基础，根据物质守恒原理，建立水体中水质组分的浓度或质量随时间和空间变化的数学关系式。

第2章 迁移扩散基本理论

2.1 分子扩散菲克定律与扩散方程

分子扩散是指物质分子由高浓度向低浓度的运动过程（即存在浓度梯度是分子扩散的必要条件）。分子扩散过程是不可逆的；而且分子在扩散过程中也会受到阻力（来自分子之间、分子与固壁之间的碰撞）。除分子扩散之外，还有热扩散（由温度梯度引起）、压力扩散（由压力梯度引起）等，都具有相同或相似的扩散过程。

应当指出，污染物质在水体中的扩散是以多种方式进行的，如随流扩散、紊动扩散、剪切弥散等。其中分子扩散所占的比例极小，即分子扩散对于水环境问题并无多少直接意义。但因污染物的其他扩散方式与分子扩散有着类似的过程，因此人们常借助于成熟的分子扩散理论来描述和求解环境水力学问题。也就是说，分子扩散理论是研究污染物在水中扩散的重要理论基础。

2.1.1 菲克定律

分子扩散理论以德国生理学家菲克（Adolf Eugen Fick, 1829—1901）提出的菲克定律为基础发展起来的。他认为盐分在溶液中的扩散现象可以和热传导类比，提出分子扩散定律如下：单位时间通过单位面积的溶质质量 q 与该面积上的溶质浓度梯度 $\frac{dC}{dn}$ 成正比，即

$$q = -D \frac{dC}{dn} \quad (2.1)$$

式中： q 为溶质通量，表示单位时间通过单位面积的溶质质量，量纲为 $[ML^{-2}T^{-1}]$ ； D 为分子扩散系数，量纲为 $[L^2T^{-1}]$ ； n 为扩散断面法线上的距离，量纲为 $[L]$ ； $\frac{dC}{dn}$ 为溶质浓度梯度，无量纲；负号表示溶质分子总是由高浓度处向低浓度处扩散。

对于各向异性浓度场，在笛卡尔坐标系中式（2.1）可写成分量形式：

$$q_x = -D_x \frac{\partial C}{\partial x}; \quad q_y = -D_y \frac{\partial C}{\partial y}; \quad q_z = -D_z \frac{\partial C}{\partial z}$$

式（2.1）称为菲克定律。

2.1.2 分子扩散基本微分方程

在浓度场中，取一微分六面体（图 2.1）。六面体的边长为 dx 、 dy 和 dz ，其中心点坐标为 (x, y, z) ，浓度为 $C(x, y, z)$ 。式（2.1）中示踪质的质量通量 q_i ，在六面体中心点处的 3 个分量分别为 q_x 、 q_y 、 q_z 。以 x 方向为例，扩散进入和离开六面体的示踪质的

质量通量（按泰勒级数展开，并略去二次以上的高次微量）分别为

$$\left(q_x - \frac{\partial q_x}{\partial x} \frac{dx}{2}\right) dy dz \text{ 和 } \left(q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} \frac{dx}{2}\right) dy dz$$

那么， x 方向 dt 时段内进入和离开的示踪质质量差值为

$$-\frac{\partial q_x}{\partial x} dx dy dz dt$$

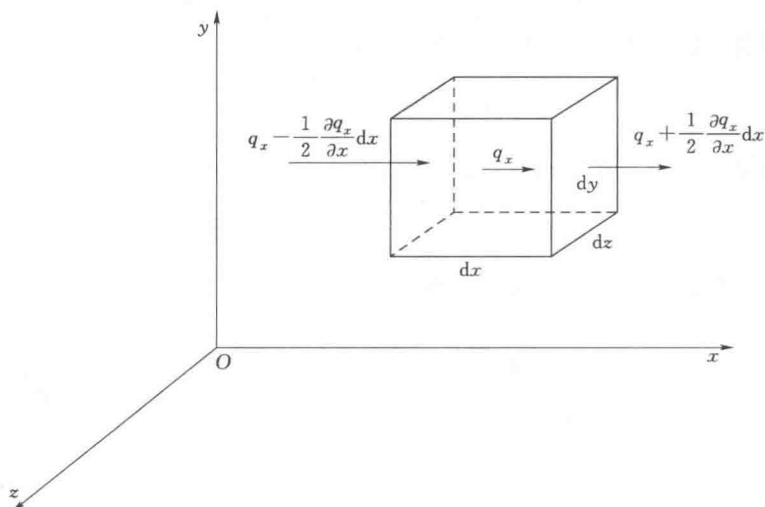


图 2.1 分子扩散微分六面体示意图

同理，在 y 、 z 方向 dt 时段内进入和离开的示踪质质量差值分别为

$$-\frac{\partial q_y}{\partial y} dy dz dx dt \text{ 和 } -\frac{\partial q_z}{\partial z} dz dx dy dt$$

则 dt 时段内进入和离开六面体的示踪质质量差值为

$$-\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}\right) dx dy dz dt$$

由于进出六面体物质质量的变化导致溶质储存量发生变化，其变化量为

$$\Delta M = \Delta C dV = \frac{\partial C}{\partial t} dt dx dy dz$$

根据质量守恒定律， dt 时段内进入微分六面体的溶质质量差应等于该时段内微分体内的溶质质量储存量的变化量。即

$$\frac{\partial C}{\partial t} dx dy dz dt = -\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}\right) dx dy dz dt$$

或

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}\right) \quad (2.2)$$

运用菲克定律：

$$q_x = -D_x \frac{\partial C}{\partial x}; \quad q_y = -D_y \frac{\partial C}{\partial y}; \quad q_z = -D_z \frac{\partial C}{\partial z}$$

得

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_y \frac{\partial C}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D_z \frac{\partial C}{\partial z} \right) \quad (2.3)$$

式(2.3)称为分子扩散基本微分方程(非均质各向异性)。

对于均质各向异性浓度场,有

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + D_z \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \quad (2.4)$$

对于均质各向同性浓度场(D 为常数),有

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right) \quad (2.5)$$

或用拉普拉斯算子表示,其形式为

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \nabla^2 C \quad (2.6)$$

对于平面二维扩散(均质各向异性场),其形式为

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \quad (2.7)$$

对于一维扩散,其形式为

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad (2.8)$$

2.2 扩散方程的解

在数学物理方程上,前节所建立的分子扩散基本微分方程属于二阶抛物型偏微分方程。在比较简单的初始条件和边界条件下(这两个条件合称为定解条件)可求得其解析解;对于复杂的定解条件,只能借助于近似方法求解。扩散方程的求解不仅与定解条件有关,而且还与污染源的形式和排放方式有关。

污染物排入水域中形成扩散,这个水域可能是一维空间,也可能是二维或三维空间,因此就对应有一维、二维或三维扩散方程。值得注意的是,把水域视为二维和一维只是一种近似、简化处理方法,便于找出规律;实际水域都是三维空间。在扩散时间上有稳态扩散和非稳态扩散,但是非稳态是绝对的,稳态是相对的;稳态也是一种近似、简化处理方法。

2.2.1 扩散方程的基本解

为了便于研究和以后构造各种解的工作,本节先讨论在瞬时单位面源情形下的一维扩散方程的基本解,一维扩散基本微分方程为

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$$

在如下定解条件下求解:在 $t=0$ 时,示踪质全部集中在污染源点,也是坐标原点,即 $C(x,0) = M\delta(x)$,其中 M 为示踪质总质量, $\delta(x)$ 为迪拉克(Ditac) δ 函数。浓缩

在无限小的坐标原点位置上的单位面源的示踪质，在 x 轴的正负两个方向上没有边界限制地向无穷远处扩散，于是有边界条件 $C(\pm\infty, t) = 0$ 和 $\partial C(\pm\infty, t)/\partial x = 0$ ，见图 2.2 (a)。

此方程可用几种数学方法求得基本解，在此采用量纲分析方法求解。待解函数浓度分布 $C(x, t)$ 只是 M 、 x 、 t 和 D 的函数，因为分子扩散系数是物性常数，方程是线性的（这表示扩散过程是线性的），所以浓度 C 与瞬时注入的示踪量 M 成正比，在一维扩散中，浓度量纲为 $[ML^{-1}]$ ，故浓度 C 应与 M 除以某一特征长度成正比。分子扩散系数 D 的量纲是 $[L^2T^{-1}]$ ，所以 $\sqrt{Dt}$ 是一个合适的特征长度，由量纲分析得到如下关系：

$$C = \frac{M}{\sqrt{4\pi Dt}} f\left(\frac{x}{\sqrt{4\pi Dt}}\right) = \frac{M}{\sqrt{4\pi Dt}} f(\eta) \quad (2.9)$$

式中：自变量 $\eta = x/\sqrt{4Dt}$ 和函数 $f(\eta)$ 是无量纲数组和函数。 4π 和 4 是预先加上的，因为这样做会使解答更加简明。

把式 (2.9) 代入式 (2.8) 得到一个变系数的线性常微分方程

$$\frac{d^2 f}{d\eta^2} + 2\eta \frac{df}{d\eta} + 2f = 0$$

利用边界条件，解得函数 $f(\eta)$ ：

$$f(\eta) = C_0 e^{-\eta^2} \quad (2.10)$$

因为示踪质为保守物质，任何时刻分布在扩散空间内的物质总量保持不变，则有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} C dx = M$$

根据这个条件求得式 (2.10) 的积分系数 $C_0 = 1$ 。于是，瞬时单位面源一维扩散方程的基本解为

$$C(x, t) = \frac{M}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} = \frac{M}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right) \quad (2.11)$$

该浓度分布函数表达式与概率论中的正态分布（即高斯分布）函数表达式是一样的。若以时间 t 为参数，可以绘出浓度沿 x 轴的分布，如图 2.2 (b) 所示。从图中可知，随着时间 t 的增加，扩散范围变宽而浓度峰值变小，分布曲线趋于平坦。式中的 $M/\sqrt{4\pi Dt}$ 是任何时刻的源点浓度。这个解对应着污染源点与坐标原点重叠的情况，对于污染源点与坐标原点不重叠的情况，且计算时间不从零时刻算起，则有更一般形式的浓度表达式，即

$$C(x, t) = \frac{M}{\sqrt{4\pi D(t-t_0)}} \exp\left[-\frac{(x-x_s)^2}{4D(t-t_0)}\right] \quad (2.12)$$

式中： x_s 为污染源位置坐标； t_0 为污染源释放时间。

2.2.2 浓度分布阶矩

浓度分布的许多特征量常借助于浓度分布的各阶矩来表示。矩的概念在力学中已屡见

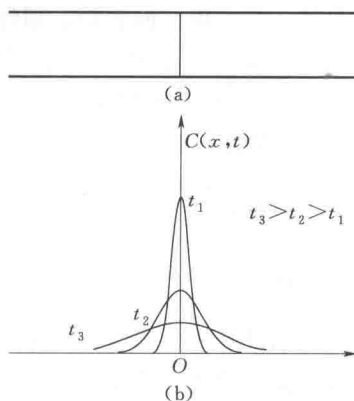


图 2.2 一维扩散方程示意图

不鲜,如力矩、面积矩、惯性矩等。浓度分布的各阶矩定义如下:

$$\begin{aligned}\text{零阶矩} \quad M_0 &= \int_{-\infty}^{+\infty} C(x, t) dx \\ \text{一阶矩} \quad M_1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} x C(x, t) dx \\ \text{二阶矩} \quad M_2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 C(x, t) dx \\ P \text{ 阶矩} \quad M_p &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^p C(x, t) dx\end{aligned}$$

不难看出,零阶矩是浓度曲线与 x 轴所包围的面积,也就是全部扩散物质的质量,对于保守物质零阶浓度矩 M_0 为常数。

令浓度分布的质心距 x 坐标原点的水平距离为 μ , 由浓度矩定义可知

$$\mu = M_1 / M_0 \quad (2.13)$$

质量中心的水平坐标 μ , 在统计数学里称为数学期望或均值,式 (2.13) 表明此值与时间 t 无关。令 σ^2 为浓度分布的方差,则

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 C(x, t) dx / M_0 = (M_2 / M_0) - \mu^2 \quad (2.14)$$

方差 σ^2 是衡量分布扩展的一种尺度。 σ^2 越小,表示分布曲线越趋于集中在均值附近。把浓度分布函数式 (2.11) 代入式 (2.14) 求积分得方差 σ^2 和标准差 σ :

$$\sigma^2 = 2Dt \quad \text{和} \quad \sigma = \sqrt{2Dt} \quad (2.15)$$

这说明方差 σ^2 随时间 t 的增加而呈线性增长,时间越久,扩展越大。利用式 (2.15) 可推出计算扩散系数的公式:

$$\frac{d\sigma^2}{dt} = 2D \quad (2.16)$$

这是扩散方程的一个特性:任意一个有限的初始浓度分布,不管它的形状如何,最后会衰变为正态分布(高斯分布),它的方差增长率为 $2D$ 。三阶矩是分布扭曲的量度,很容易证明,正态分布的三阶矩(和所有奇次矩)为 0,并且所有的偶次矩都可以用二阶矩来表示。若在一个不长的时间间隔内,以差分代替上式的微分,则有

$$D = \frac{1}{2} \frac{\Delta\sigma_t^2}{\Delta t} \quad \text{或} \quad D = \frac{1}{2} \frac{\sigma_2^2 - \sigma_1^2}{t_2 - t_1} \quad (2.17)$$

式中: σ_t^2 、 σ_1^2 和 σ_2^2 分别为 t 、 t_1 和 t_2 时刻的方差。若已知不同时刻的浓度分布,应用式 (2.17) 可估算扩散系数。通常把标准差 σ 作为扩展宽度的量度,正态分布在 4σ 的范围内,包括了约 95% 的总质量或浓度分布线下的面积。在许多实际问题中,扩散云团的宽度以 4σ 来估算。代入标准差的计算式 (2.15),浓度分布公式 (2.11) 可写为

$$C = \frac{M}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \quad (2.18)$$

2.2.3 物质扩散的随机游动理论

从气体分子运动理论得知,气体分子在不断进行随机运动,即布朗运动。一个分子在两次与其他分子碰撞之间的运动距离称为自由程。研究扩散问题可以把分子运动简化,按

随机游动 (Random walk) 问题进行分析。

假设分子的自由程为一固定值 l ，只研究一维空间，并假设分子运动与 x 轴平行，每个分子沿正 x 方向运动和沿负 x 方向运动的概率相等，在这些简化假定下，任一分子经过 N 次运动以后，从原来位置前进的距离为 $\pm l \pm l \pm l$ (共有 N 项)，因系列中出现十、一号的机会相等，所以总共有 2^N 个可能性。设出现十号的次数为 p ，出现一号的次数为 q ，则有

$$p + q = N, \text{ 并令 } p - q = s \quad (2.19)$$

由式 (2.19) 得

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{2}(N + s) = \frac{N}{2} \left(1 + \frac{s}{N}\right) \\ q &= \frac{1}{2}(N - s) = \frac{N}{2} \left(1 - \frac{s}{N}\right) \end{aligned} \quad (2.20)$$

经过 N 次运动后，沿方向前进的距离为 sl ，这种情况出现的可能组合为 $N! / (p! q!)$ ，因此其概率为

$$P = \frac{N! / (p! q!)}{2^N} \quad (2.21)$$

将式 (2.20) 代入式 (2.21) 得

$$P = \frac{N!}{2^N \left[\frac{N}{2} \left(1 + \frac{s}{N}\right) \right]! \left[\frac{N}{2} \left(1 - \frac{s}{N}\right) \right]!} \quad (2.22)$$

对式 (2.22) 加以简化，并求得当 N 极大时， P 的极限值为

$$P = \sqrt{\frac{2}{\pi N}} \exp\left(-\frac{s^2}{2N}\right) \quad (2.23)$$

这就是一个分子在运动 N 次以后，从原来的位置前进 sl 距离的概率。

令 a 为分子运动速度， t 为分子运动 N 次所经历的时间，又令 $sl = x$ ，则 $N = at/l$ 代入式 (2.23) 得

$$P = \sqrt{\frac{2l}{\pi at}} \exp\left(-\frac{x^2}{2atl}\right) \quad (2.24)$$

式 (2.24) 与式 (2.11) 具有相似的形式。式 (2.11) 表示在 t 时刻 x 处示踪质的浓度，式 (2.24) 表示携带示踪质的分子在 t 时刻到达 x 处的概率，两者至少应成比例。因此，可得扩散系数 D 为

$$D = \frac{1}{2} la = \frac{Nl^2}{2t} \quad (2.25)$$

代入式 (2.24)，得

$$P = \frac{l}{\sqrt{\pi Dt}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right) \quad (2.26)$$

现进一步计算在 t 时刻分子位于 x 与 $x + \delta x$ 之间的概率 δP 。分子到达 x 后，下一步运动仍有 $1/2$ 机会前进， $1/2$ 机会后退。因每一步的距离为 l ，下一步运动中没有离开 x 至 $x + \delta x$ 范围的机会为 $\delta x/2l$ ，则

$$\begin{aligned}\delta P &= \left[\frac{l}{\sqrt{\pi Dt}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right) \right] \frac{\delta x}{2l} \\ &= \frac{\delta x}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right)\end{aligned}\quad (2.27)$$

上式表明分子沿 x 轴方向作随机运动的概率密度 $(\delta P/\delta x)$ 分布符合正态分布, 其标准差 σ 为

$$\sigma = \sqrt{2Dt} \quad (2.28)$$

其均值 $\bar{x}$ 为

$$\bar{x} = \frac{\int_0^{+\infty} x dP}{\int_0^{+\infty} dP} = 2\sqrt{\frac{Dt}{\pi}} \quad (2.29)$$

可见均值与标准差都和 $\sqrt{t}$ 成比例, 均方差 $\overline{x^2}$ (或 σ^2) 与 t 呈线性增长。

$$\sigma^2 = \overline{x^2} = \frac{\int_0^{+\infty} x^2 dP}{\int_0^{+\infty} dP} = 2Dt \quad (2.30)$$

上述结果表明, 从随机游动分析分子扩散所得到的结果与非克扩散理论的结果是一致的, 虽然这是在 N 为大数、时间 t 较长, 而且作了简化假定的情况下得到的, 但基本上反映了分子扩散的实际情况。显然, 上面的结论只有当扩散时间比经历平均自由程所需的时间长得多时才能成立。而且在分子互撞到下一步这段时间内没有后效或史前效应, 即分子运动没有记忆行为。任一随机过程如果在任何时刻它的进一步发展完全由该时刻的状态确定, 而与它的过去和未来状态均无关系, 则这种过程通常称为马尔可夫 (Markov) 过程。

2.3 若干条件下一维扩散方程的解

上一节所求的浓度分布函数是在静止水域中的分子扩散, 且是瞬时点源与坐标原点重合的一维扩散方程的基本解。因为扩散方程是线性的, 在线性边界条件下, 可用这个基本解叠加构造其他定解条件下的解。

2.3.1 起始分布源

假设初始污染源不是一个点, 而是均匀地分布在空间一定范围上, 浓度为 C_0 , 这就是起始分布源。在初始时刻, 分布范围内的污染物同时释放。这种情况可考虑为若干个瞬时点源的叠加, 按叠加原理求解。

在污染源分布范围内任一点 ξ (点源位置坐标) 处 $d\xi$ 微小长度上污染源质量为 $dM = C_0 d\xi$, 这一微小段污染源在 x 点处产生的浓度值为 dC , 根据式 (2.12) 有

$$dC = \frac{dM}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}\right] = \frac{C_0 d\xi}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}\right]$$