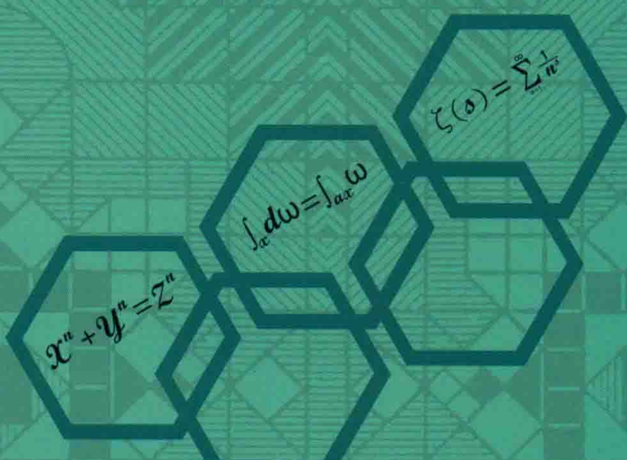
DAXUESHENG SHUXUE JINGSAI JIAOCHENG
—GAODENG SHUXUE (JICHUPIAN)

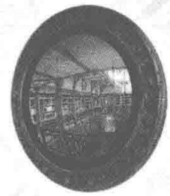
大学生数学竞赛教程
——高等数学
（基础篇）

王树忠　于 禄　孟桂芝　主编



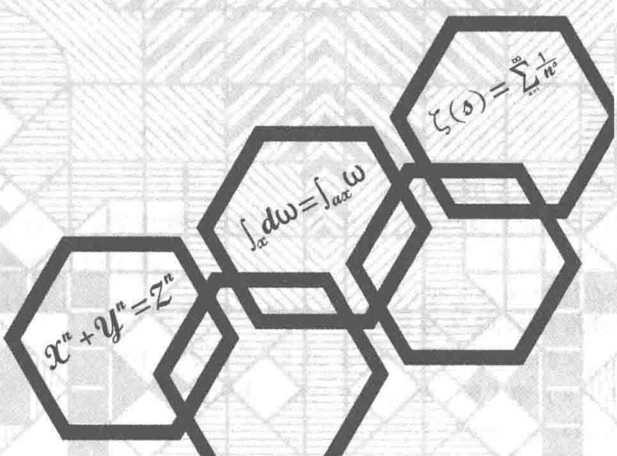
哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

DAXUESHENG SHUXUE JINGSAI JIAOCHENG
—GAODENG SHUXUE (JICHUPIAN)



大学生数学竞赛教程
——高等数学
（基础篇）

● 王树忠　于 禄　孟桂芝　主编



哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本书分高等数学基础篇和高等数学提高篇两册，基础篇主要包括高等数学基础知识点的讲解和相应的练习题，起到温故知新的作用；提高篇主要包括对高等数学综合性试题的分析和解答，注重数学抽象思维的呈现，以提高学生综合分析和解决问题的能力为目的.

本书可供准备参加全国大学生数学竞赛的非数学专业的学生和老师作为应试教程，也适合理工科大学生在学习和复习高等数学课程时使用以及考研时参考阅读.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 基础篇/王树忠，于禄，孟桂芝主编. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2018. 9

大学生数学竞赛教程

ISBN 978 - 7 - 5603 - 7656 - 1

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①王… ②于… ③孟… Ⅲ. ①高等数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 204929 号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 刘立娟 刘家琳 穆 青 陈雅君 宋 淼
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传 真 0451 - 86414749
网 址 http://hitpress.hit.edu.cn
印 刷 哈尔滨市石桥印务有限公司
开 本 787mm×960mm 1/16 印张 20.5 字数 397 千字
版 次 2018 年 9 月第 1 版 2018 年 9 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978 - 7 - 5603 - 7656 - 1
定 价 128.00(全 2 册)

前　　言

本书是哈尔滨理工大学全国大学生数学竞赛(非数学类)辅导用书，为配合我校的大学生参加数学竞赛而编写.书中紧密配合大学生数学竞赛的要求，内容上覆盖了数学竞赛的大纲，重点突出、难点适当，同时便于学生自学自测；选材上突出了题目的典型性、代表性，解法的启发性、灵活性，题材广泛，题型多样，讲题示法，以题明理，注重解题思路和规律的分析，解题的方法和技巧的提炼，以及有关注意事项的阐释；写作上编者力求做到逻辑严谨，文字简洁，语言流畅，深入浅出，便于学生掌握.

本书分高等数学基础篇和高等数学提高篇两册.基础篇按高等数学章节排序，侧重基础知识点的讲解和相应练习，起到温故知新的作用.王树忠编写1～4章，于禄编写5～8章，孟桂芝编写9～11章.提高篇则是以专题形式展开，对高等数学综合性试题进行分析、解答，注重数学抽象思维的呈现，以提高学生综合分析和解决问题的能力为目的.并配有近十年的大学生数学竞赛预赛试题和决赛试题以及自编竞赛模拟题供学习者参考练习.罗来珍编写1～3专题，班立群编写4～7专题，张旭负责编写模拟试题及整理历届全国大学生数学竞赛试题.本书能有效提升参加大学生数学竞赛学生的综合水平，也适合理工科大学生在学习和复习高等数学课程时使用，更是理工科大学生考研时复习高等数学的有效用书.

限于编者的水平，书中难免出现疏漏，恳请读者及同行指正.

编者

2018 年 7 月

目　　录

第一章　极限与连续

§1　函数与极限

一、知识要点

1. 函数的概念和基本性质.

2. 掌握函数的特性:单调性、奇偶性、有界性、周期性.

3. 熟练计算复合函数的表达式.

4. 极限的定义与性质.

5. 极限的运算法则.

6. 数列的极限的性质.

(1) 唯一性:若$\{a_n\}$收敛,且有$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=A$及$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=B$,则$A=B$;

(2) 有界性:若$\{a_n\}$收敛,则$\{a_n\}$有界(其逆命题不真,如$x_n=(-1)^n$);

(3) 保号性:如果$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$,且$a>0$(或$a<0$),那么存在正整数$N$,当$n>N$时有$a_n>0$(或$a_n<0$).

推论:如果数列$\{a_n\}$从某一项起有$x_n\geqslant 0$(或$x_n\leqslant 0$),且$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$,那么$a\geqslant 0$(或$a\leqslant 0$).

注1:数列极限的性质中需要注意:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a\Leftrightarrow\{x_n\}$的任一子列都收敛于$a$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a\Leftrightarrow\{x_n\}$的奇子列$\{x_{2n+1}\}$和偶子列$\{x_{2n}\}$都收敛于$a$.

注2: 常用的极限公式:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} q^n=0\ (|q|<1)$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1\ (a>0)$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$;

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n}=0$；

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^k}{a^n}=0\ (a>1)$.

7. 极限存在的两个准则.

(1) 夹逼定理:若存在正数 δ,对于任意满足 $0<|x-x_0|<\delta$ 的 x 都有 $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant\psi(x)$,且 $\lim\varphi(x)=\lim\psi(x)=A$,则 $\lim f(x)=A$.

若存在自然数 N,当 $n>N$ 时,恒有 $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$,且有 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

(2) 单调有界有极限定理:单调递增有上界(或单调递减有下界)的数列必有极限.

8. 两个重要极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$,推广:$\lim\limits_{f(x)\to 0}\dfrac{\sin f(x)}{f(x)}=1,f(x)\neq 0$;

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$.

9. 函数的极限的性质.

(1) 唯一性:若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在,且有 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 及 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=B$,则 $A=B$;

(2) 有界性:若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在,则存在正数 δ,使得 $f(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$ 内有界;

(3) 保号性:若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,且 $A>0$(或 $A<0$),那么存在常数 $\delta>0$,使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,有 $f(x)>0$(或 $f(x)<0$).

二、例题分析

例 1 设 $f(x)=\mathrm{e}^x+2,f[\varphi(x)]=x^2$,求 $\varphi(x)$.

解 由 $f(x)=\mathrm{e}^x+2$ 知 $f[\varphi(x)]=\mathrm{e}^{\varphi(x)}+2$,又 $f[\varphi(x)]=x^2$,所以

$$\mathrm{e}^{\varphi(x)}+2=x^2$$

从而

$$\varphi(x)=\ln(x^2-2)\quad(x\in(-\infty,-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},+\infty))$$

例 2 设 $f(x)=\begin{cases}\ln x, & x>0\\ x, & x\leqslant 0\end{cases}$,且 $g(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 1\\ x^3, & x>1\end{cases}$,求 $f[g(x)]$.

解法 1(先内后外法)　由题意,有

$$f[g(x)]=\begin{cases}f(x^2), & x\leqslant 1\\ f(x^3), & x>1\end{cases}=\begin{cases}\ln x^2, & x^2>0\text{ 且 }x\leqslant 1\\ x^2, & x^2\leqslant 0\text{ 且 }x\leqslant 1\\ \ln x^3, & x^3>0\text{ 且 }x>1\\ x^3, & x^3\leqslant 0\text{ 且 }x>1\end{cases}=$$

$$\begin{cases}\ln x^2, & x\leqslant 1\text{ 且 }x\neq 0\\ 0, & x=0\\ \ln x^3, & x>1\end{cases}$$

解法 2(先外后内法)　由题意,有

$$f[g(x)]=\begin{cases}\ln g(x), & g(x)>0\\ g(x), & g(x)\leqslant 0\end{cases}=\begin{cases}\ln x^2, & x\leqslant 1\text{ 且 }g(x)>0\\ \ln x^3, & x>1\text{ 且 }g(x)>0\\ x^2, & x\leqslant 1\text{ 且 }g(x)\leqslant 0\\ x^3, & x>1\text{ 且 }g(x)\leqslant 0\end{cases}$$

因为

$$\begin{aligned}g(x)>0&\Leftrightarrow x^2>0\text{ 且 }x\leqslant 1\text{ 或 }x^3>0\text{ 且 }x>1\\ &\Leftrightarrow x\leqslant 1\text{ 且 }x\neq 0\text{ 或 }x>1\Leftrightarrow x\neq 0\end{aligned}$$

所以 $g(x)>0\Leftrightarrow x\neq 0$. 故

$$f[g(x)]=\begin{cases}\ln x^2, & x\leqslant 1\text{ 且 }x\neq 0\\ \ln x^3, & x>1\text{ 且 }x\neq 0\\ x^2, & x\leqslant 1\text{ 且 }x=0\\ x^3, & x>1\text{ 且 }x=0\end{cases}=\begin{cases}\ln x^2, & x\leqslant 1\text{ 且 }x\neq 0\\ 0, & x=0\\ \ln x^3, & x>1\end{cases}$$

例 3　设 $f(x)$ 满足条件 $2f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{a}{x}$($a$ 为常数),且 $f(0)=0$,证明:$f(x)$ 是奇函数.

证明　因为

$$2f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{a}{x} \qquad ①$$

所以

$$2f\left(\frac{1}{x}\right)+f(x)=ax \qquad ②$$

由式 ①② 有

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{a(2-x^2)}{3x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

显然 $f(x)$ 是奇函数.

例 4 设 $y=\begin{cases}x, & x<1\\ x^3, & 1\leqslant x\leqslant 2\\ 3^x, & x>2\end{cases}$,求其反函数.

解 当 $x<1$ 时,$y=x$,故其反函数为 $y=x,x\in(-\infty,1)$;

当 $1\leqslant x\leqslant 2$ 时,$y=x^3$,故其反函数为 $y=\sqrt[3]{x},x\in[1,8]$;

当 $x>2$ 时,$y=3^x$,故其反函数为 $y=\log_3 x,x\in(9,+\infty)$.

从而反函数为 $y=\begin{cases}x, & x<1\\ \sqrt[3]{x}, & 1\leqslant x\leqslant 8.\\ \log_3 x, & x>9\end{cases}$

注 常见的分段函数:

(1) 绝对值函数 $f(x)=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$;

(2) 符号函数 $\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$;

(3) 最大值函数 $\max\{f(x),g(x)\}=\begin{cases}f(x), & f(x)\geqslant g(x)\\ g(x), & f(x)<g(x)\end{cases}$;

(4) 取整函数 $f(x)=[x]$,其中$[3.5]=3,[-3.5]=-4$.

例 5 计算下列数列的极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt{n^2+1}-n)$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{n}\right)$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left[\left(x+\dfrac{1}{n}a\right)+\left(x+\dfrac{2}{n}a\right)+\cdots+\left(x+\dfrac{n-1}{n}a\right)\right]$;

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\cdots\cdot\sqrt[2^n]{2}$;

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{15}+\cdots+\dfrac{1}{4n^2-1}\right)$;

(6) 设$\{x_n\}$满足$x_1=a,x_2=b,x_{n+2}=\frac{x_{n+1}+x_n}{2}(n=1,2,\cdots)$,求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解 (1) 原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1}=\frac{1}{2}$;

(2) 原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2-1}{2}\times\frac{3-1}{3}\times\cdots\times\frac{n-1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$;

(3) 原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{(n-1)x+\frac{a}{n}[1+2+\cdots+(n-1)]\right\}=$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[(n-1)x+\frac{a}{n}\cdot\frac{(n-1)n}{2}\right]=$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-1}{n}\left(x+\frac{a}{2}\right)=x+\frac{a}{2}$;

(4) 原式$=\lim\limits_{n\to\infty}2^{\frac{1}{2}}\cdot2^{\frac{1}{2^2}}\cdot\cdots\cdot2^{\frac{1}{2^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}2^{1-(\frac{1}{2})^n}=2$;

(5) 因为$\frac{1}{4n^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$,所以

原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right]=$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}$

(6) 由$x_{n+2}=\frac{x_{n+1}+x_n}{2}$,得

$$x_{n+2}-x_{n+1}=-\frac{1}{2}(x_{n+1}-x_n)\quad(n=1,2,\cdots)$$

所以,当$n\geqslant3$时,有

$$\begin{aligned}x_n-x_{n-1}=&-\frac{1}{2}(x_{n-1}-x_{n-2})=\\&\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}(x_2-x_1)=\\&\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}(b-a)\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}x_n=&x_1+\sum_{k=2}^{n}(x_k-x_{k-1})=x_1+(b-a)\sum_{k=0}^{n-2}\left(-\frac{1}{2}\right)^k=\\&a+\frac{2}{3}(b-a)\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]\end{aligned}$$

所以$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\frac{1}{3}(2b+a)$.

例 6 求下列数列的极限:

(1) 设 $x_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}$,求$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$;

(2) 设 $x_n=\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}$,求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$;

(3) 设 $x_n=\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_k^n}$ ($a_i(i=1,2,\cdots,k)$ 皆为大于零的常数,$k\in\mathbf{N}$),求$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$;

(4) 求$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}$;

(5) 求$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}\sin(n!)}{n+1}$.

解 (1) 令 $y_n=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\cdots\cdot\frac{2n}{2n+1}$,则有

$$0<x_n<y_n$$

$$0<x_n^2<x_ny_n=\frac{1}{2n+1}$$

于是 $0<x_n<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$. 又 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}=0$,由夹逼准则知 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$.

(2) 因为

$$\frac{n(n+1)}{2(n^2+n+n)}\leqslant x_n\leqslant\frac{n(n+1)}{2(n^2+n+1)}$$

而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2(n^2+n+n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2(n^2+n+1)}=\frac{1}{2}$$

故

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\frac{1}{2}$$

(3) 记 $a=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$,则

$$\sqrt[n]{a^n}\leqslant\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_k^n}\leqslant\sqrt[n]{ka^n}$$

而

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{k}=1,\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n}=a$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_k^n}=a=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$$

(4) 解法 1：因为

$$0<\frac{2^n}{n!}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{2}{n}\leqslant\frac{4}{n}$$

而$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4}{n}=0$,故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}=0$$

解法 2:设

$$x_n=\frac{2^n}{n!},\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{\dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{2^n}{n!}}=\frac{2}{n+1}\leqslant 1$$

故 $x_{n+1}\leqslant x_n$,即$\{x_n\}$单调递减.

又 $x_n>0$,即$\{x_n\}$有下界,从而$\{x_n\}$收敛.

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,由 $x_{n+1}=\frac{2}{n+1}x_n$, 得 $a=0\cdot a$,故 $a=0$,即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

(5) 解法 1:由于

$$0\leqslant\left|\frac{\sqrt[3]{n^2}\sin(n!)}{n+1}\right|\leqslant\frac{\sqrt[3]{n^2}}{n+1}<\frac{\sqrt[3]{n^2}}{n}=\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$$

因此

$$-\frac{1}{\sqrt[3]{n}}<\frac{\sqrt[3]{n^2}\sin(n!)}{n+1}<\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$$

而

$$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}=0$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}\sin(n!)}{n+1}=0$$

解法 2:因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}}{1+\dfrac{1}{n}}=0$$

而$|\sin(n!)|\leqslant 1$，由于无穷小量与有界函数的乘积仍是无穷小量，故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}\sin(n!)}{n+1}=0$$

例 7 计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)}$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n^2+k}$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}\cos\dfrac{x}{2^k}(x\neq 0)$.

解 (1) 因为

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]=\frac{1}{4}$$

(2) 首先根据极限式的特点，我们有

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+n}<\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+k}<\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+1}$$

而

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2+1}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2+n}=\frac{1}{2}$$

由夹逼定理可知

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+k}=\frac{1}{2}$$

(3) 因为

$$\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{x}{2^k}=\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}=$$

$$\frac{\cos \frac{x}{2}\cos \frac{x}{2^2}\cdots\cos \frac{x}{2^n}\sin \frac{x}{2^n}}{\sin \frac{x}{2^n}} =$$

$$\frac{\frac{1}{2^n}\sin x}{\sin \frac{x}{2^n}}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\cos \frac{x}{2^k} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2^n}\sin x}{\sin \frac{x}{2^n}} = \frac{\sin x}{x}$$

例 8 证明下列数列极限存在,并求极限.

(1) 设 $x_1 = 2, x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right)(n = 1,2,\cdots)$;

(2) 设 $x_n = \frac{11 \times 12 \times 13 \times \cdots \times (n+10)}{2 \times 5 \times 8 \times \cdots \times (3n-1)}(n = 1,2,\cdots)$;

(3) 设 $x_1 > a > 0$,且 $x_{n+1} = \sqrt{ax_n}(n = 1,2,\cdots)$.

证明 (1) 因为 $x_n > 0$,且当 $n > 1$ 时,有

$$x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{1}{x_{n-1}}\right) \geqslant \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{x_{n-1} \cdot \frac{1}{x_{n-1}}} = 1$$

又

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1 - x_n^2}{2x_n} \leqslant 0$$

所以 $\{x_n\}$ 单调递减且有下界,从而 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在.

设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 则有 $a = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)$, 知 $a = \pm 1$, 又由于 $x_n \geqslant 1$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

(2) 因为 $x_{n+1} = \frac{n+11}{3n+2}x_n$,所以,当 $n > 20$ 时,有

$$0 < x_{n+1} < \frac{1}{2}x_n < x_n$$

故 $\{x_n\}$ 单调递减且有下界,从而 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在.

设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$,则 $a = \frac{1}{3}a$,得 $a = 0$,即 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

(3) 解法 1：用数学归纳法证明$\{x_n\}$有界.

① 当 $n=1$ 时，$x_1>a$；

② 假设 $n=k$ 时，$x_k>a$ 成立，则当 $n=k+1$ 时，有

$$x_{k+1}=\sqrt{ax_k}>\sqrt{a\cdot a}=a$$

由数学归纳法知$\{x_n\}$有下界.

又 $x_{n+1}=\sqrt{ax_n}<\sqrt{x_n^2}=x_n$，故$\{x_n\}$单调递减，从而$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在.

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，由 $x_n>a$ 知

$$A\geqslant a>0$$

于是，由

$$\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{ax_n}$$

有 $A^2=aA$，因为 $A\neq 0$，所以 $A=a$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

解法 2：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}a^{\frac{1}{2}}x_{n-1}^{\frac{1}{2}}=\lim\limits_{n\to\infty}a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{1}{2^2}}\cdot x_{n-2}^{\frac{1}{2^2}}=$

$\lim\limits_{n\to\infty}a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{1}{2^2}}\cdot\cdots\cdot a^{\frac{1}{2^{n-1}}}\cdot x_1^{\frac{1}{2^{n-1}}}=$

$\lim\limits_{n\to\infty}a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}}\cdot x_1^{\frac{1}{2^{n-1}}}=$

$\lim\limits_{n\to\infty}a^{\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)}\cdot x_1^{\frac{1}{2^{n-1}}}=a.$

例 9 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(4x+1)^{30}(9x+2)^{20}}{(6x-1)^{50}}$；

(2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 1}(1+2x)^{3x-1}$.

解 (1) 原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(4+\dfrac{1}{x}\right)^{30}\left(9+\dfrac{2}{x}\right)^{20}}{\left(6-\dfrac{1}{x}\right)^{50}}=\dfrac{4^{30}\times 9^{20}}{6^{50}}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{10}$；

(2) 原式$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)+(x^2-1)+\cdots+(x^n-1)}{x-1}=$

$\lim\limits_{x\to 1}[1+(x+1)+\cdots+(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1)]=$

$1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$；

(3) 因为$\lim\limits_{x\to 1}(1+2x)=3$，$\lim\limits_{x\to 1}(3x-1)=2$，所以

$$\lim_{x\to 1}(1+2x)^{3x-1}=3^2=9$$

注 对于幂指函数 $f(x)^{g(x)}(f(x)>0)$，若

$$\lim f(x)=a>0,\lim g(x)=b$$

则

$$\lim f(x)^{g(x)}=a^b$$

例 10 证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ 不存在.

证明 因为

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=-1$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}=1$$

所以$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ 不存在.

注 $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$.

例 11 计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x-x\arctan x}{e^x+x}$；

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$；

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+x^2+1}{2^x+x^3}(\sin x+\cos x)$；

(4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$.

解 (1) 分 $x\to+\infty$ 与 $x\to-\infty$ 两种情况计算，有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-x\arctan x}{e^x+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\dfrac{x\arctan x}{e^x}}{1+\dfrac{x}{e^x}}=1\text{（最后一步用到了}\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0\text{）}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x-x\arctan x}{e^x+x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\dfrac{e^x}{x}-\arctan x}{\dfrac{e^x}{x}+1}=\frac{\pi}{2}$$