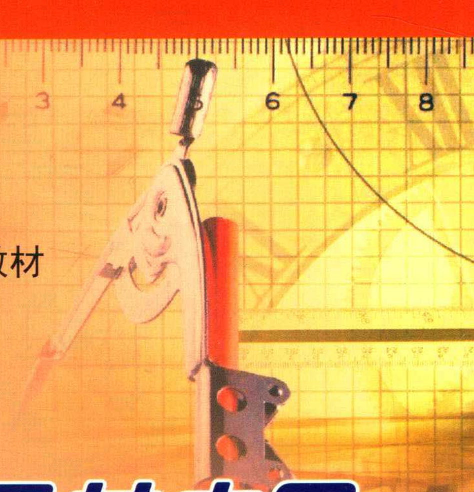
21世纪应用型本科院校规划教材

江苏省高等学校重点教材



线性代数及其应用

陈荣军 钱峰 主编

南京大学出版社

本科院校规划教材
高等学校重点教材

重点教材编号：2017-2-111

线性代数及其应用

主　编　陈荣军　钱　峰
副主编　高　枫　王志芳　胡学荣　许定亮
任雪静　王君甫　朱美玲　郭丽敏

南京大学出版社

内容提要

本书是在应用型本科院校大力推进公共数学改革的背景下，由常州工学院数理与化工学院组织编写的应用型本科省级重点教材. 内容包括行列式、矩阵及其运算、矩阵的初等变换与线性方程组、向量组的线性相关性、相似矩阵及二次型、线性空间与线性变换六个章节. 教材体现应用本科特色，立足知识、融入实验、强调实践、渗透文化，帮助学生做到"知识、能力、文化"三方面的有效训练. 教材在教学内容的选取和编排上，力图做到重点突出、层次清晰、难度得当，贴近应用型院校学生实际. 同时教材开辟拓展训练真题解析栏目，满足考研学生需要.

本书可作为高等学校理、工、管等各专业线性代数课程教材，也可用作为教学参考书和考研用书.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数及其应用 / 陈荣军，钱峰主编. —南京：南京大学出版社，2018.8

21 世纪应用型本科院校规划教材

ISBN 978-7-305-20780-8

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①陈… ②钱… Ⅲ. ①线性代数—高等学校—教材 Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 181153 号

出版发行 南京大学出版社
社 址 南京市汉口路 22 号 邮 编 210093
出 版 人 金鑫荣

书 名 线性代数及其应用
主 编 陈荣军 钱 峰
责任编辑 朱彦霖 刘 灿 编辑热线 025-83597482

照 排 南京理工大学资产经营有限公司
印 刷 江苏凤凰通达印刷有限公司
开 本 718×1000 1/16 印张 12.25 字数 214 千
版 次 2018 年 8 月第 1 版 2018 年 8 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-305-20780-8
定 价 30.00 元

网 址：http://www.njupco.com
官方微博：http://weibo.com/njupco
官方微信号：njuyuexue
销售咨询热线：(025)83594756

前　言

线性代数课程是应用型本科院校一门重要的必修课，其理论与方法广泛应用于后续课程及工程实践. 根据《国家中长期教育改革和发展规划纲要(2010—2020 年)》的要求，高校对专业人才的培养正由理论研究型向知识应用型扩展，要求着力拓宽学生知识视野，增强思维能力，提高实践能力；与此同时，随着信息技术水平不断发展，计算机与线性代数融合越来越密切. 因此，大力变革传统线性代数教材，更新教材内容，突出知识的应用和拓展，并适时吸纳新技术新方法，是时代发展的必然要求.

本书是在应用型本科院校大力推进公共数学改革的背景下，由常州工学院数理与化工学院组织编写的应用型本科省级重点教材，是编者根据多年教学经验，结合多元化学情条件与信息化教学新形势编写而成，初稿已在校内试行几轮，获得较好教学效果，受到授课教师与学生的一致好评.

教材的主要特点如下：

1. 通过实际案例引出知识点，将知识点明确化，同时培养学生线性代数思想和理论运用能力；

2. 利用电子化二维码技术，方便学生在线了解重点与难点，找到学习捷径；

3. 在精简相关繁琐理论推导和计算的基础上，选题力图做到整体层次分明而综合，题型精粹而全面，同时开辟拓展训练真题解析栏目，满足考研学生需要；

4. 融入实验教学内容，引进 Matlab 数学软件，注重理论的实践与应用；

5. 介绍有关数学历史人物生平，有助于学生数学文化素养的提升.

另外，与传统教材相比，本书具有纸质内容与数字化资源一体化设计的特点，线上资源涵盖教学要求、知识要点等内容，有利于学生自主学习，找到学习捷径.

本书的编写得到了常州工学院数理与化工学院全体数学老师无私且大力的帮助,得到了学校有关部门和领导的大力支持,在此向他们表示衷心的感谢.

本书是编者在新工科背景下对公共数学改革的一种探索,由于水平有限,教材中错误难免,恳请读者批评指正.

编　者

2018 年 2 月

目 录

第 1 章　行列式

扫码可见
电子资源

实际案例

医院营养师为病人配制的一份菜肴由蔬菜、鱼和肉松组成，这份菜肴需含 1 200 cal 热量，30 g 蛋白质和 300 mg 维生素 C，已知三种食物每100 g 中有关营养的含量如表 1 - 1 所示，试求所配菜肴中每种食物的数量.

表 1 - 1

	蔬菜	鱼	肉松
热量/cal	60	300	600
蛋白质/g	3	9	6
维生素 C/mg	90	60	30

行列式是线性代数中常用的工具. 本章主要介绍 n 阶行列式的定义、性质及其计算方法.

1.1　全排列及其逆序数

定义 1.1　把 n 个不同的元素排成一排，叫做这 n 个元素的全排列（简称排列）.

例如，自然数 1,2,3 构成的不同排列有 $3! = 6$ 种.

123，132，213，231，312，321

例 1.1　互异元素 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 构成的不同排列有 $n!$ 种.

证明　在 n 个元素中选取 1 个，　　　n 种取法.

在剩余 $n-1$ 个元素中选取 1 个，　$n-1$ 种取法.

在剩余 $n-2$ 个元素中选取 1 个，　$n-2$ 种取法.

………………　　　　　　…………

在剩余 2 个元素中选取 1 个，　　　2 种取法.

在剩余 1 个元素中选取 1 个，　　　1 种取法.

于是由乘法原理共有 $n!$ 种取法.

对于 n 个不同的元素，我们可以规定各元素之间有一个标准次序. 例如 n 个不同的自然数可规定从小到大为标准次序.

定义 1.2　在 n 个不同的元素按照某种约定次序构成的排列中，当某一对元素的先后次序与标准次序不同时，称它构成 1 个逆序. 一个排列中逆序的总数叫做这个排列的逆序数.

排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数记作 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)$. $\tau(p_1p_2\cdots p_n)$ 为奇数时，称 $p_1p_2\cdots p_n$ 为奇排列；$\tau(p_1p_2\cdots p_n)$ 为偶数时，称 $p_1p_2\cdots p_n$ 为偶排列. 当 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)$ 为零时，称 $p_1p_2\cdots p_n$ 为标准排列.

不妨设排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 为 1 至 n 这 n 个自然数的一个排列，规定从小到大为标准次序. 考虑元素 $p_i(i=1,2,\cdots,n)$，如果比 p_i 大的且排在 p_i 前面的元素有 τ_i 个，就说 p_i 的逆序数是 τ_i. 那么这个排列的逆序数为 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)=\tau_1+\cdots+\tau_n$.

例 1.2　排列 32541 中，$\tau=\tau_1+\cdots+\tau_5=0+1+0+1+4=6$. 故此排列为偶排列.

例 1.3　排列 $13\cdots(2n-1)24\cdots(2n)$，求逆序数.

解　记作 $p_1p_2\cdots p_np_{n+1}p_{n+2}\cdots p_{2n-1}p_{2n}$

$$\tau_1=0,\ \cdots,\ \tau_n=0,$$

$$\tau_{n+1}=n-1,\ \tau_{n+2}=n-2,\ \cdots,\ \tau_{2n}=0,$$

$$\tau=(n-1)+(n-2)+\cdots+1+0=\frac{1}{2}n(n-1).$$

定义 1.3　在一个排列中，把任意两个元素的位置互换，而其余的元素不动，就得到另一排列，这种作出新排列的手续叫做对换. 将相邻两个元素对换，叫做相邻对换.

例如，经过 1,2 对换，排列 1432 就成 2431. 显然，如果连续进行两次相同的对换，那么排列就还原了. 由此可知，一个对换把全部 n 级排列两两配对，使每两个配成对的 n 级排列在这个对换下互变.

关于排列的奇偶性，我们有下面的基本事实.

定理 1.1　对换改变排列的奇偶性.

这就是说，经过一次对换，奇排列变成偶排列，偶排列变成奇排列.

证明　先证相邻对换：　　　$\cdots jk\cdots$　　　(1)

经过 j,k 对换变成

$$\cdots kj \cdots \tag{2}$$

这里"…"表示那些不动的数. 显然，在排列(1)中如 j,k 与其他的数构成逆序数，则在排列(2)中仍然构成逆序数；如不构成逆序数则在(2)中也不构成逆序数；不同的只是 j,k 的次序. 如果原来 j,k 组成逆序，那么经过对换，逆序数减少一个；如果原来 j,k 不组成逆序，那么经过对换，逆序数就增加一个. 总之，排列的逆序数的奇偶性变了.

再证一般对换：
$$\cdots j i_1 i_2 \cdots i_s k \cdots \tag{3}$$

经过 j,k 对换，排列(3)变成

$$\cdots k i_1 i_2 \cdots i_s j \cdots \tag{4}$$

不难看出，这样一个对换可以通过一系列的相邻对换实现. 把 k 经过 $s+1$ 次相邻对换，排列(3)就变成 $\cdots kji_1i_2\cdots i_s\cdots$，再把 j 经过 s 次相邻对换，就变成排列(4). 因此，j,k 对换可以通过 $2s+1$ 次相邻对换来实现. $2s+1$ 是奇数. 相邻对换改变排列的奇偶性，奇数次相邻对换最终还是改变排列的奇偶性.

推论 1　奇排列变为标准排列的对换次数为奇数，偶排列变为标准排列的对换次数为偶数.

推论 2　在全部 n 个元素构成的排列中($n\geqslant 2$)，奇偶排列的个数相等，各有 $\frac{n!}{2}$ 个.

例如，在 1、2、3 三个数的排列中，132、213、321 为奇排列，123、231、312 为偶排列.

1.2　n 阶行列式的定义

我们现在给出 n 阶行列式的定义. 在给出 n 阶行列式的定义之前，先来看下二阶和三阶行列式的定义.

用消元法解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \tag{1-1}$$

通过消去 x_1,x_2，得

$$\begin{cases}(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-a_{12}b_2,\\(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=a_{11}b_2-b_1a_{21}.\end{cases}$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时,可求得方程组(1-1)的解为

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},x_2=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \tag{1-2}$$

式(1-2)中的分子、分母都是四个数分成两对相乘以后再相减,也是由方程组(1-1)的四个系数与常数项所确定. 考察分母 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$,是由方程组(1-1)的四个系数确定,把这四个数按它们在方程组中的位置,排成二行二列的数表

$$\begin{matrix}a_{11} & a_{12},\\ a_{21} & a_{22}.\end{matrix} \tag{1-3}$$

表达式 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 称为数表(1-3)所确定的二阶行列式,记作

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}. \tag{1-4}$$

数 $a_{ij}(i=1,2;j=1,2)$ 称为二阶行列式(1-4)的元素. 元素 a_{ij} 的第一个下标 i 称为行标,表示元素位于第 i 行,第二个下标 j 称为列标,表示元素位于第 j 列. 位于第 i 行第 j 列的元素称为行列式(1-4)的 (i,j) 元.

上述二阶行列式的定义,可用对角线法则来记忆. 参看图 1.1,从 a_{11} 到 a_{22} 的连线称为主对角线,从 a_{12} 到 a_{21} 的连线称为副对角线,因此,二阶行列式就是主对角线上两个元素的乘积减去副对角线上两个元素的乘积所得的差.

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}$$

图 1.1

由二阶行列式的概念,(1-2)式中的分子也可表示为

$$b_1a_{22}-a_{12}b_2=\begin{vmatrix}b_1 & a_{12}\\ b_2 & a_{22}\end{vmatrix},a_{11}b_2-b_1a_{21}=\begin{vmatrix}a_{11} & b_1\\ a_{21} & b_2\end{vmatrix}.$$

再记

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix},D_1=\begin{vmatrix}b_1 & a_{12}\\ b_2 & a_{22}\end{vmatrix},D_2=\begin{vmatrix}a_{11} & b_1\\ a_{21} & b_2\end{vmatrix}.$$

则方程组(1－1)的解可以表示成

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D},$$

其中分母 D 是由方程组的系数所确定的二阶行列式(称为系数行列式)，x_1 的分子 D_1 是用常数项 b_1, b_2 替换 D 中第一列元素所得的二阶行列式，x_2 的分子 D_2 是用常数项 b_1, b_2 替换 D 中第二列元素所得的二阶行列式.

例 1.4　求解二元线性方程组

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 = 12, \\ 2x_1 + x_2 = 1. \end{cases}$$

解　由于系数行列式 $D = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 - (-4) = 9 \neq 0,$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 12 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 12 - (-2) = 14,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 5 & 12 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 - 24 = -19,$$

所以原方程组的解为：$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{14}{9}, x_2 = \frac{D_2}{D} = -\frac{19}{9}$.

定义 1.4　设有 9 个数排成 3 行 3 列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}, \end{matrix} \tag{1-5}$$

记

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}, \end{aligned} \tag{1-6}$$

式(1－6)称为数表(1－5)所确定的三阶行列式.

三阶行列式是 6 项含有三个元素乘积的代数和，每项均为不同行不同列的三个元素乘积再冠以正负号，其规律遵循图 1.2 所示的对角线法则.

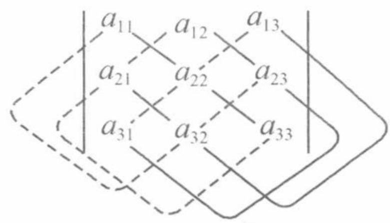


图 1.2

例 1.5 计算三阶行列式 $D=\begin{vmatrix}1 & -1 & 2\\ 3 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 4\end{vmatrix}$.

解 $$\begin{aligned}D&=1\times2\times4+(-1)\times1\times0+2\times3\times1-1\times1\times1-(-1)\times3\\&\quad\times4-2\times2\times0\\&=25.\end{aligned}$$

为了作出 n 阶行列式的定义,我们先研究三阶行列式的结构. 根据定义 1.4 可以看出:

等式(1-6)右边的每一项都是位于不同行、不同列的三个元素的乘积. 每一项都可以表示成:$\pm a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$,其中行标排成标准次序 123,列标排成 $p_1p_2p_3$,这是 1,2,3 的某个排列(共 6 种),对应了等式右边有 6 项. 6 项中带正号的三项列标排列为:123, 231, 312,这三个排列是偶排列;带负号的三项列标排列为:132, 213, 321,这三个排列是奇排列.

于是三阶行列式可写成

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=\sum_{p_1p_2p_3}(-1)^{\tau(p_1p_2p_3)}a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3},$$

其中 $\sum\limits_{(p_1p_2p_3)}$ 表示对 1、2、3 三个数的所有排列 $p_1p_2p_3$ 求和.

按此规律,可把行列式推广到一般形式.

定义 1.5 n^2 个数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$,排成 n 行 n 列的数表

$$\begin{matrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn},\end{matrix}\tag{1-7}$$

$$令\quad D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{p_1 p_2 \cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}. \tag{1-8}$$

式(1-8)称为数表(1-7)的 n 阶行列式,其中 $\sum\limits_{p_1 p_2 \cdots p_n}$ 表示对 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 这 n 个数的所有排列 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 求和.

行列式(1-8)常简记作 $\det(a_{ij})$,其中数 a_{ij} 为行列式 D 中的第 i 行、第 j 列的元素.

定义表明,为了计算 n 阶行列式,首先作所有可能由位于不同行不同列元素构成的乘积,把这些乘积的元素按行指标排成标准排列,然后由列指标所成的排列的奇偶性来决定这一项的正负号,最后把这些项全部加起来. 由定义立即看出,n 阶行列式是由 $n!$ 项组成的. 按此定义的二阶、三阶行列式与原有定义的二阶、三阶行列式显然是一致的.

当 $n=1$ 时,一阶行列式 $|a|=a$(注意不要与绝对值符号混淆). 主对角线以下(上)的元素都为 0 的行列式叫做上(下)三角形行列式;主对角线以下和以上的元素都为 0 的行列式叫做对角行列式.

例 1.6　计算 $D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & a_{nn} \end{vmatrix}, D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & \\ \vdots & \iddots & & \\ a_{n1} & & & 0 \end{vmatrix}$.

解　行列式中每一项是 n 个元素的乘积,且这 n 个元素取自不同的行和不同的列. 因为第 n 行中只有第 n 列的元素 a_{nn} 不显为零,因此只要考虑 $p_n=n$ 的那些项. 在第 $n-1$ 行中,只有 $a_{n-1,n-1}$,$a_{n-1,n}$ 不显为零,所以只考虑 $p_{n-1}=n-1$. 这样逐步推上去,不难得到,D_1 中只有一项 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 不显含 0,且列标构成排列的逆序数为:$\tau(12\cdots n)=0$,故

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

同理,D_2 中只有一项 $a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$ 不显含 0,且列标构成排列的逆序

数为

$$\tau(n\cdots21)=1+2+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2},$$

故

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & \\ \vdots & \iddots & & \\ a_{n1} & & & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

特别地,

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix}=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n,\quad \begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

1.3 行列式的性质

行列式的计算是一个重要的问题,也是一个很麻烦的问题. n 阶行列式一共有 $n!$ 项,当 n 较大时,直接从定义来计算行列式几乎不可能. 因此我们需要进一步讨论行列式的性质,利用这些性质可以化简行列式的计算.

记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

行列式 D^{T} 称为行列式 D 的转置行列式.

性质 1　行列式与它的转置行列式相等.

证明　令 $b_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$, 则