新世纪高等学校规划教材 · 大学公共课系列

大学数学

（第2版）

主编◎王彭德　周绍艳

DAXUE SHUXUE

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

新世纪高等学校规划教材 · 大学公共课系列

大学数学

（第2版）

主　编◎王彭德　周绍艳

副主编◎吴　波　李嘉元　张朝元

DAXUE SHUXUE

北京师范大学出版集团

BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP

北京师范大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

大学数学/王彭德，周绍艳主编．—2 版．—北京：北京师范大学出版社，2017.8

（新世纪高等学校规划教材．大学公共课系列）

ISBN 978-7-303-22718-1

Ⅰ.大…　Ⅱ.①王…　②周…　Ⅲ.高等数学-高等学校-教材　Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 210996 号

营销中心电话　010-62978190　62979006
北师大出版社科技与经管分社　www.jswsbook.com
电子信箱　jswsbook@163.com

出版发行：北京师范大学出版社 www.bnup.com
北京市海淀区新街口外大街 19 号
邮政编码：100875

印　　刷：三河市东兴印刷有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：787 mm×1092 mm　1/16
印　　张：12.75
字　　数：265 千字
版　　次：2017 年 8 月第 2 版
印　　次：2017 年 8 月第 1 次印刷
定　　价：29.80 元

策划编辑：刘风娟　姚斯研　　责任编辑：刘风娟　姚斯研
美术编辑：刘　超　　装帧设计：刘　超
责任校对：赵非非　　责任印制：赵非非

内容简介

本书可作为高等院校通识教育平台的文科、医学、农林等相关专业高等数学课程的教材，教学中讲授完全部内容(不含*部分)，预计需要54学时，课时较少的专业，教师可根据教学需要对教学内容灵活取舍.

本书内容包括：函数与极限、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、多元函数微积分、概率统计、数学思想方法简介八章内容. 在内容的选择上，既考虑到文科、医学、农林类高等数学学时的限制，又注意到数学学科的系统性和应用性，并适当淡化了一些繁难的理论推导，加强了数学文化方面的熏陶.

第 2 版前言

本书第 1 版是高等院校在通识教育阶段大学数学教材改革的成果，无论是教学内容的选取、教学方法的选择，还是教材体系的组合，都处在一个探索性阶段. 该教材经过 6 年的使用，根据各任课教师多年的教学改革实践经验，在修订中，听取了许多有大学数学教学经验的专家学者的宝贵意见，我们保留了原教材的体系和风格，在内容上做了一些局部的调整和改进，使得新版教材成为既具有通识教育特色，又能适应当前教学需要的大学数学教材。

第 2 版教材修订主要完善了一些概念的叙述和结论的解释，适当补充了一些极限的性质、定积分和三重积分的计算方法，删去部分繁难的例题和习题；以使教材的完整性、条理性、通俗性更加突出，在各章习题中增加了选择题，以供教师教学和学生练习时选用，相信对各章内容的理解会有一定的帮助。

第 2 版教材修订工作的具体分工如下：大理大学周绍艳负责第 1 章、第 6 章，张朝元负责第 2 章，李嘉元负责第 3 章，王彭德负责第 4 章、第 5 章，亢红道负责第 8 章，普洱学院吴波负责第 7 章，另外大理大学的毛崇斌、李梦巧、朱兴文、杨培亮等教师，以及学科教学(数学)专业的研究生王雨佳、王兰青同学参加了各章习题的修订工作，全书由王彭德教授统稿和审定。

本书在修订过程中，得到了大理大学、普洱学院等院校有关领导的支持，得到了北京师范大学出版社的大力支持，谨此表示衷心的感谢！

由于编者水平所限，本次修订不可避免地会存在不当之处，还恳请使用本书的广大教师和学生提出批评意见。

编者

2017 年 1 月

第 1 版前言

书中虽然没有“黄金屋”，然而由于数学有着应用上的广泛性，正如华罗庚所说的那样“宇宙之大，粒子之微，火箭之速，化工之巧，地球之变，生物之谜，日月之繁，无处不有数学的贡献”. 因此，它是现代公民必备的基础知识. 作为通识教育阶段的大学生来说，掌握一定的高等数学知识，无论对今后的学习，还是将来的社会工作都是十分有益的.

书中虽然没有“颜如玉”，然而数学是人类理性发展的一个缩影，它一方面是科学乃至艺术的工具，另一方面蕴含着许多人文精神. “数学是科学的皇后”“数学是科学的语言”“数学是思维的体操”“数学是艺术”“数学是真善美的体现”……这些来自不同角度的评说，充分地说明了学习数学对于提高人们的文化素养、思想品位、人格魅力都有着十分重要的意义. 一句话，数学是素质教育的必修内容，大学数学更是高等院校通识教育阶段必不可少的内容之一.

书中虽然没有“琼浆液”，然而它却倾注了我们所有编者多年来教授高等数学的心血. 在编写过程中，我们力图从数学的实际背景出发，采用形式化与通俗化的组合方式，简明扼要地介绍大学数学的基本知识及思想方法，围绕主要的数学概念、理论和方法，深入浅出地展开，努力做到学有所乐，乐有所获，获有所用，用有所成. 为通识教育献上我们的一片心.

高等院校在通识教育阶段开设大学数学的历史仅十余年，无论是教学内容的选取，教学方法的选择，还是教材体系的组合，都处在一个探索性阶段. 在编写过程中，为了使教材体系更具有科学性、趣味性和可读性，便于师生的教与学，我们听取了许多有大学数学教学经验的专家学者的宝贵意见，参阅了大量的资料，经过精心筛选，认真组织，反复修改，撰写了这本具有通识教育特色的大学数学教材，本书在内容的编排上，是根据面向 21 世纪通识教育阶段的研究成果而选定的，以 54 学时编写，使用中教师可根据不同专业、不同学时的需要灵活选用.

本书编写具体分工如下：大理学院周绍艳负责第 1 章，李嘉元负责第 2 章，王彭德负责第 4、5 章，亢红道负责第 8 章，曲靖师范学院刘俊负责第 6 章，思茅师范高等专科学校吴波负责第 7 章，安康学院王昭海负责第 3 章；另外大理学院的张朝元、毛崇斌、黑韶敏，文山学院的方艳溪，四川幼儿师专的唐越桥、周洪，昆明冶金高等专科学校的王荣参加了各章习题的编写工作，全书由王彭德统稿审定.

本书在编写过程中，得到了大理学院、曲靖师范学院、思茅师范高等专科学校、安康学院等院校的有关领导的支持，得到了北京师范大学出版社的大力支持，谨此表示衷心的感谢！

编写通识教育阶段的大学数学教材，目前还是一种尝试. 编写中尽管我们做了大量的工作，但由于作者水平有限，错误在所难免，希望专家学者及广大师生力斧匡正.

编者

2010 年 4 月

目 录

第 5 章 定积分及其应用 /72

第 6 章 多元函数微积分 /93

第 1 章 函数与极限

函数是高等数学研究的主要对象，反映了变量之间的一种相互依赖关系，而极限则是研究函数的一种基本工具. 本章将在初等数学的基础上介绍函数、函数极限及函数连续性等基本概念，为以后学习高等数学打下必要的基础.

1.1 函数

1.1.1 函数的概念

1. 函数的定义

定义 1 设 D,M 是两个实数集的非空子集，若存在对应法则 f，使得对于 D 内的每一个数 x，都有 M 中唯一确定的数 y 与之对应，则称 f 是定义在数集 D 上的函数，记为

$$f:D\to M$$
$$x\mapsto y$$

或记为

$$y=f(x),\quad x\in D$$

并称 x 为自变量，y 为因变量，D 为该函数的定义域，也记作 D_f.

函数关系反映的是变量之间的一种相互依赖关系，这种关系是由对应法则来反映的. 如：$y=\pi x^2, x\in[0,+\infty)$的对应法则就是自变量 x 的平方与 π 之积. 于是对于每一个非负实数 x，按照这个法则都有唯一确定的一个实数 y 与之对应，可理解为圆面积与圆的半径之间的相互依赖关系. 即 $y=\pi x^2, x\in[0,+\infty)$是一个函数.

取定一数 $x_0\in D$，称 $y_0=f(x_0)$为函数在 x_0 处的函数值，函数值 $f(x)$的全体所构成的集合叫做该函数的值域，记作 R_f 或 $f(D)$，即

$$R_f=f(D)=\{y\mid y=f(x), x\in D\}.$$

注意：记号 f 与 $f(x)$的含义是有区别的，f 表示自变量 x 与因变量 y 之间的对应法则，而 $f(x)$表示自变量 x 对应的函数值. 习惯上常用"$f(x), x\in D$"或"$y=f(x), x\in D$"来表示定义在 D 上的函数，这时应理解为由它所确定的函数 f.

如正弦函数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$

$$x\mapsto y=\sin x$$

把实数集 $\mathbf{R}$ 变到实数集 $\mathbf{R}$ 中去，且将每一个实数 x 唯一地变成另一个实数 $y=\sin x$，其定义域为 $D_f=\mathbf{R}$，值域为 $f(D)=[-1,1]$.

表示函数的记号除了常用的 f 外，还可用其他的英文字母或希腊字母，如"g""h""F""φ"等，相应的，函数可记为 $y=g(x)$，$y=h(x)$，$y=F(x)$，$y=\varphi(x)$等. 同样，自变量和因变量也可选用其他的英文字母. 但是在同一问题中，当讨论不同的函数时，需用不同的记号来

表示不同的函数. 如:对于半径为 r 的球,它的表面积为 $S=f(r)=4\pi r^2$,体积为 $V=g(r)=\frac{4}{3}\pi r^3$.

应该指出的是此处定义的函数由于只有一个自变量对应因变量,通常也称为一元函数.

2. 函数的定义域

从函数定义可知定义域、对应法则、值域是构成函数的三个要素,因此讨论函数时需要先明确函数的定义域.

函数的定义域通常按两种情形来确定:对有背景的实际问题,应根据实际背景中变量的实际意义确定其定义域;对纯粹数学问题,定义域是使表达式有意义的自变量取值的全体集合. 在确定函数定义域时常考虑以下几点:

(1)分式的分母不能为零;

(2)偶次根式的被开方数必须大于或等于零;

(3)对数的真数必须大于零,底数大于零且不等于 1.

例 1-1 函数 $y=\sqrt{x}+\sqrt[3]{\frac{1}{x-2}}-\ln(2x+1)$

它的定义域是满足 $x\geqslant 0$,$x-2\neq 0$ 及 $2x+1>0$ 的一切 x 取值的全体集合.

解得:$\{x|x\geqslant 0$ 且 $x\neq 2\}$.

例 1-2 函数 $y=c$ (c 为某固定常数),称为常数函数.

定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$,值域为 $\{c\}$,如图 1-1.

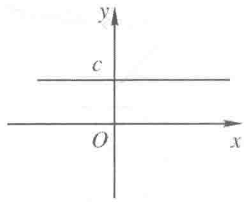


图 1-1

例 1-3 函数 $y=[x]$ 称为取整函数,x 为一切实数,$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

如:$[2.3]=2$,$[-4.7]=-5$,$[-4]=-4$

该函数的定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$,值域为整数集 $\mathbf{Z}$,如图 1-2.

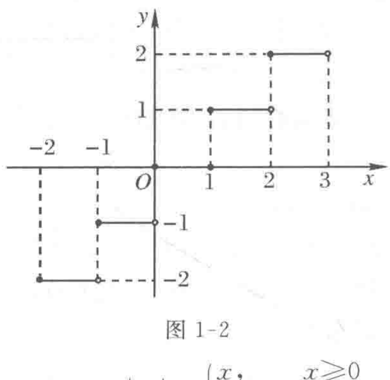


图 1-2

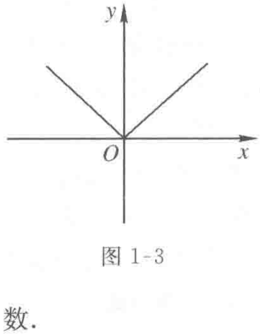


图 1-3

例 1-4 函数 $y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$,称为绝对值函数.

定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$,值域为 $[0,+\infty)$,如图 1-3.

例 1-5 函数 $y=f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x}, & 0\leqslant x\leqslant 4\\ 1+x, & x>4\end{cases}$,其定义域为 $D=[0,+\infty)$,值域为 $[0,4]\cup(5,+\infty)$.

像例 1-4、例 1-5 用两个或两个以上不同式子表达的函数称为分段函数.

由于定义域、对应法则、值域是构成函数的三个要素. 因此，对于两个函数，若定义域和对应法则都相同，则它们的值域也相同. 即若两个函数的定义域和对应法则都相同，则这两函数相同. 例如，函数 $f(x)=x+2$ 与 $h(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ 是两个不同的函数，因为它们的定义域不同. 但是，对于对应法则表达形式不同的两个函数，它们可能是相同的函数. 如：函数 $\varphi(x)=|x|, x\in\mathbf{R}$ 与 $\varphi(x)=\sqrt{x^2}, x\in\mathbf{R}$. 其对应法则表达形式不同，但它们却是相同的函数.

3. 函数的表示

函数通常可用解析法（也称公式法）、图像法（也称图形法）或表格法等表示.

以上各例的函数均用解析法表示. 用解析法表示的函数中如果有多个字母，要注意明确自变量与因变量. 如：$w=h(u)=2x^2\sqrt{u}-a^3u$ 就是以 u 为自变量，w 为因变量的一元函数，表达式中的 x 与 a 为常量. 如果将该表达式重记为 $w=g(a)=2x^2\sqrt{u}-a^3u$，则它变为以 a 为自变量，w 为因变量的一元函数，表达式中的 x 与 u 变为常量. 当然如果将该表达式写为 $w=2x^2\sqrt{u}-a^3u$，则自变量就不明确，即在函数的学习中也要明确函数的自变量与因变量.

在平面直角坐标系上，由函数 $y=f(x), x\in D$ 所确定的平面点集：

$$\{(x,y)\mid y=f(x), x\in D\}$$

称为函数 $y=f(x)$ 的图像，它通常是平面上的一条曲线，如例 1-2、例 1-4. 这就是用图像法来表示函数的依据.

例 1-6　某气象站用自动温度记录仪记下了一昼夜气温变化，如图 1-4 所示.

由图所知，对于每一时刻 t，都有唯一确定的温度 T 与之对应，因而这种曲线在区间 $[0,24]$ 上确定了一个函数，即用图像法表示函数.

函数也可以通过列出自变量的值与对应函数值的表格来表示，称为表格法.

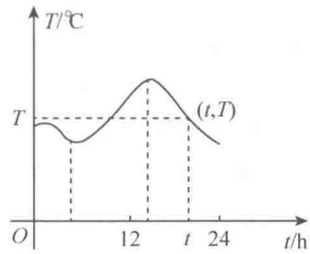


图 1-4

例 1-7　某城市某线路公共汽车的票价情况如表 1-1。

表 1-1

x/站	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
y/元	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4

由表 1-1 可以看出，票价 y 与所乘坐的站数 x 建立了明确的对应关系，每当 x 取一个值，由表可得 y 有唯一确定的一个对应值，因而也确定了一个函数，即表格法表示的函数.

也有一些函数难以用解析法、图像法或表格法来表示，只能用语言来描述. 如：定义在实数集上的狄利克雷(Dirichlet)函数：$f(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数},\\ 0, & x\text{ 为无理数}\end{cases}$ 等.

1.1.2 函数的 4 种特性

1. 函数的单调性

定义 2 设函数 $f(x)$的定义域为 D, $I\subseteq D$,若对任意 $x_1,x_2\in I$,当 $x_1<x_2$ 时,恒有

(1) $f(x_1)<f(x_2)$,则称函数 $f(x)$在区间 I 上(严格)单调增加,区间 I 称为 $f(x)$的(严格)单调递增区间;

(2) $f(x_1)>f(x_2)$,则称函数 $f(x)$在区间 I 上(严格)单调减少,区间 I 称为 $f(x)$的(严格)单调递减区间.

单调增加和单调减小函数统称为单调函数,也称函数具有单调性.

例如函数 $y=x^2$ 在区间$(-\infty,0)$内是单调减小的;在区间$(0,+\infty)$内是单调增加的.

而函数 $y=x$, $y=x^3$ 在区间$(-\infty,+\infty)$内都是单调增加的.

函数的单调性的判别在本书第 3 章还将继续介绍.

2. 函数的奇偶性

定义 3 设函数 $f(x)$的定义域为 D,是关于原点对称的区间,若对任意 $x\in D$,恒有

(1) $f(-x)=f(x)$,则称函数 $f(x)$为偶函数;

(2) $f(-x)=-f(x)$,则称函数 $f(x)$为奇函数.

例如,函数 $y=-2x^2+5$, $y=\cos x$, $y=\frac{1}{2}x^2$ 都是偶函数,函数 $y=x^3-7x$, $y=\sin x$, $y=x^3$ 都是奇函数,而函数 $y=\ln x$, $y=\sin x+\cos x$, $y=e^x$ 是非奇非偶函数.

从奇函数、偶函数的定义可知,若 $f(x)$为奇函数,则点$(x,f(x))$及$(-x,-f(x))$均在 $y=f(x)$的图像上;若 $f(x)$为偶函数,则点$(x,f(x))$及$(-x,f(x))$均在 $y=f(x)$的图像上,即奇函数的图像关于原点对称,偶函数的图像关于 y 轴对称,如图 1-5、图 1-6 所示.

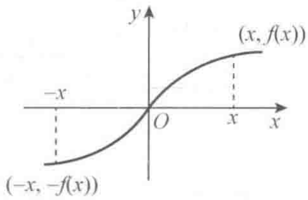


图 1-5

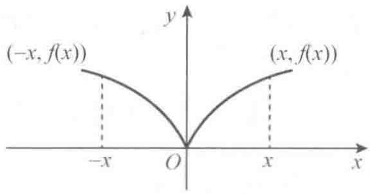


图 1-6

3. 函数的周期性

定义 4 设函数 $f(x)$的定义域为 D,如果存在常数 $T\neq 0$,使得对任意 $x\in D$,有$(x+T)\in D$,且

$$f(x+T)=f(x)$$

则称函数 $f(x)$为周期函数,T 为函数的周期,通常所说的周期是指函数的最小正周期.

例如,$y=\sin x$, $y=\cos x$ 是以 2π 为周期的周期函数,$y=\tan x$, $y=\cot x$ 是以 π 为周期的周期函数,即 $y=\sin(\omega x+\varphi)$, $y=\cos(\omega x+\varphi)$是以 $\frac{2\pi}{|\omega|}$ 为周期的周期函数,$y=\tan(\omega x+\varphi)$, $y=\cot(\omega x+\varphi)$是以 $\frac{\pi}{|\omega|}$ 为周期的周期函数,而 $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ 不是周期函数.

例 1-8　狄利克雷(Dirichlet)函数 $f(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数},\\ 0, & x\text{ 为无理数}\end{cases}$ 是周期函数,任何正有理数都是它的周期,但不存在最小正周期.

4. 函数的有界性

定义 5　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,$I\subseteq D$,如果存在常数 K,对任意 $x\in I$ 有

$$f(x)\leqslant K(\text{或 } f(x)\geqslant K)$$

则称 $f(x)$ 在数集 I 上有上界(或有下界).如果 $f(x)$ 在 I 上既有上界又有下界,则称 $f(x)$ 在 I 上有界,否则称为无界.

若函数 $y=f(x)$ 在 I 上有界,则该函数在 I 上的图像介于平行于 x 轴的两条直线 $y=M$ 与 $y=K$ 之间.

显然,函数 $f(x)$ 在 I 上有界等价于存在常数 $M>0$,对任意 $x\in I$,有

$$|f(x)|\leqslant M$$

或函数 $f(x)$ 在 I 上有界等价于存在常数 M_1 及 M_2,对任意 $x\in I$,有

$$M_1\leqslant f(x)\leqslant M_2$$

如函数 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界;函数 $y=x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内无界.

函数的四种特性中除有界性外,其他特性都是函数的特殊性质,而不是每个函数都一定具有的.

1.1.3　初等函数

1. 基本初等函数

以下 6 类函数统称为基本初等函数.

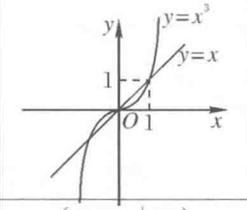
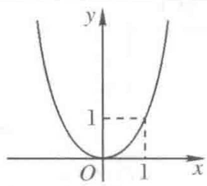
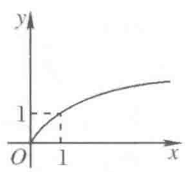
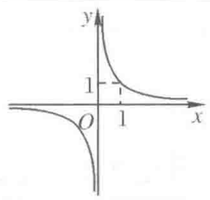
(1)常数函数:$y=C$(C 为常数)

定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$,值域为 $\{C\}$,图像见图 1-1.

(2)幂函数:$y=x^{\mu}$(μ 为实常数)

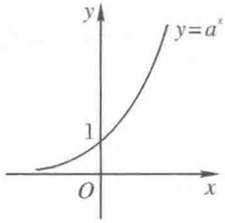
其定义域依 μ 的取值不同而不同,但无论 μ 为何值,它在 $(0,+\infty)$ 上总有定义,图像举例如表 1-2 所示.

表 1-2

μ 的值	$\mu=1,3$	$\mu=2$	$\mu=\frac{1}{2}$	$\mu=-1$
图像				
定义域	$(-\infty,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$	$[0,+\infty)$	$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

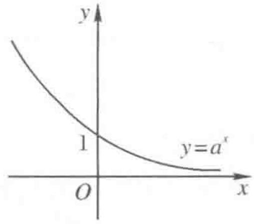
(3)指数函数:$y=a^x$($a>0$ 且 $a\neq 1$)

其定义域为 $(-\infty,+\infty)$,值域为 $(0,+\infty)$,图像过点 $(0,1)$,$a>1$ 时是增函数(如图 1-7);$0<a<1$ 时是减函数(如图 1-8).



$a>1$

图 1-7

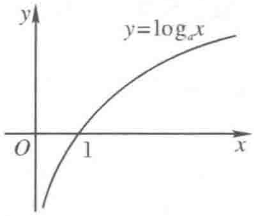


$0<a<1$

图 1-8

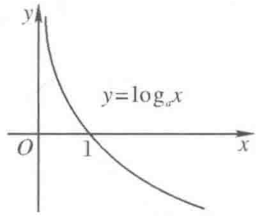
(4)对数函数：$y=\log_a x\quad(a>0$ 且 $a\neq 1)$

其定义域为$(0,+\infty)$，值域为$(-\infty,+\infty)$，图像过点$(1,0)$，当 $a>1$ 时是增函数(如图 1-9)；当 $0<a<1$ 时是减函数(如图 1-10).



$a>1$

图 1-9



$0<a<1$

图 1-10

特别 $y=\lg x$ 表示 $y=\log_{10}x$；$y=\ln x$ 表示 $y=\log_e x$，其中 $e=2.718\ 28\cdots$ 是一个无理数.

(5)三角函数

正弦函数 $y=\sin x$，定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$[-1,1]$.

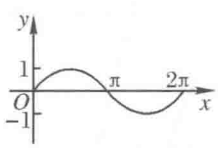
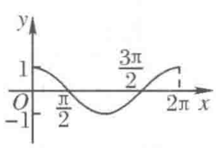
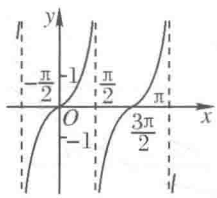
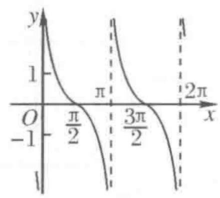
余弦函数 $y=\cos x$，定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$[-1,1]$.

正切函数 $y=\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$，定义域为$\left\{x\mid x\in\mathbf{R}\text{ 且 }x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$，值域为$(-\infty,+\infty)$.

余切函数 $y=\cot x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$，定义域为$\{x\mid x\in\mathbf{R}\text{ 且 }x\neq k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$，值域为$(-\infty,+\infty)$.

它们都是周期函数，其图像如表 1-3 所示.

表 1-3

$y=\sin x$	$y=\cos x$	$y=\tan x$	$y=\cot x$
			

除此之外，还有正割函数 $y=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$和余割函数 $y=\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$.