



新世纪高等学校规划教材·大学公共课系列

大学数学

(第2版)

主编◎王彭德 周绍艳

DAXUE SHUXUE



北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

新世纪高等学校规划教材·大学公共课系列

大学数学

(第2版)

主 编◎王彭德 周绍艳

副主编◎吴 波 李嘉元 张朝元

DAXUE SHUXUE



北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

大学数学/王彭德, 周绍艳主编. —2 版. —北京: 北京师范大学出版社, 2017. 8

(新世纪高等学校规划教材·大学公共课系列)

ISBN 978-7-303-22718-1

I. 大… II. ①王… ②周… III. 高等数学-高等学校-教材 IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2017) 第 210996 号

营销中心电话 010-62978190 62979006
北师大出版社科技与经管分社 www.jswsbook.com
电子信箱 jswsbook@163.com

出版发行: 北京师范大学出版社 www.bnup.com
北京市海淀区新街口外大街 19 号
邮政编码: 100875

印 刷: 三河市东兴印刷有限公司
经 销: 全国新华书店
开 本: 787 mm×1092 mm 1/16
印 张: 12.75
字 数: 265 千字
版 次: 2017 年 8 月第 2 版
印 次: 2017 年 8 月第 1 次印刷
定 价: 29.80 元

策划编辑: 刘凤娟 姚斯研 责任编辑: 刘凤娟 姚斯研
美术编辑: 刘 超 装帧设计: 刘 超
责任校对: 赵非非 责任印制: 赵非非

版权所有 侵权必究

反盗版、反侵权举报电话: 010-62978190

北京读者服务部电话: 010-62979006-8021

外埠邮购电话: 010-62978190

本书如有印装质量问题, 请与印制管理部联系调换。

印制管理部电话: 010-62979006-8006

内容简介

本书可作为高等院校通识教育平台的文科、医学、农林等相关专业高等数学课程的教材，教学中讲授完全部内容(不含*部分)，预计需要 54 学时，课时较少的专业，教师可根据教学需要对教学内容灵活取舍。

本书内容包括：函数与极限、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、多元函数微积分、概率统计、数学思想方法简介八章内容。在内容的选择上，既考虑到文科、医学、农林类高等数学学时的限制，又注意到数学学科的系统性和应用性，并适当淡化了一些繁难的理论推导，加强了数学文化方面的熏陶。

第2版前言

本书第1版是高等院校在通识教育阶段大学数学教材改革的成果，无论是教学内容的选取、教学方法的选择，还是教材体系的组合，都处在一个探索性阶段。该教材经过6年的使用，根据各任课教师多年的教学改革实践经验，在修订中，听取了许多有大学数学教学经验的专家学者的宝贵意见，我们保留了原教材的体系和风格，在内容上做了一些局部的调整和改进，使得新版教材成为既具有通识教育特色，又能适应当前教学需要的大学数学教材。

第2版教材修订主要完善了一些概念的叙述和结论的解释，适当补充了一些极限的性质、定积分和三重积分的计算方法，删去部分繁难的例题和习题；以使教材的完整性、条理性、通俗性更加突出，在各章习题中增加了选择题，以供教师教学和学生练习时选用，相信对各章内容的理解会有一定的帮助。

第2版教材修订工作的具体分工如下：大理大学周绍艳负责第1章、第6章，张朝元负责第2章，李嘉元负责第3章，王彭德负责第4章、第5章，亢红道负责第8章，普洱学院吴波负责第7章，另外大理大学的毛崇斌、李梦巧、朱兴文、杨培亮等教师，以及学科教学(数学)专业的研究生王雨佳、王兰青同学参加了各章习题的修订工作，全书由王彭德教授统稿和审定。

本书在修订过程中，得到了大理大学、普洱学院等院校有关领导的支持，得到了北京师范大学出版社的大力支持，谨此表示衷心的感谢！

由于编者水平所限，本次修订不可避免地会存在不当之处，还恳请使用本书的广大教师和学生提出批评意见。

编者

2017年1月

第1版前言

书中虽然没有“黄金屋”，然而由于数学有着应用上的广泛性，正如华罗庚所说的那样“宇宙之大，粒子之微，火箭之速，化工之巧，地球之变，生物之谜，日月之繁，无处不有数学的贡献”。因此，它是现代公民必备的基础知识。作为通识教育阶段的大学生来说，掌握一定的高等数学知识，无论对今后的学习，还是将来的社会工作都是十分有益的。

书中虽然没有“颜如玉”，然而数学是人类理性发展的一个缩影，它一方面是科学乃至艺术的工具，另一方面蕴含着许多人文精神。“数学是科学的皇后”“数学是科学的语言”“数学是思维的体操”“数学是艺术”“数学是真善美的体现”……这些来自不同角度的评说，充分地说明了学习数学对于提高人们的文化素养、思想品位、人格魅力都有着十分重要的意义。一句话，数学是素质教育的必修内容，大学数学更是高等院校通识教育阶段必不可少的内容之一。

书中虽然没有“琼浆液”，然而它却倾注了我们所有编者多年来教授高等数学的心血。在编写过程中，我们力图从数学的实际背景出发，采用形式化与通俗化的组合方式，简明扼要地介绍大学数学的基本知识及思想方法，围绕主要的数学概念、理论和方法，深入浅出地展开，努力做到学有所乐，乐有所获，获有所用，用有所成，为通识教育献上我们的一片心。

高等院校在通识教育阶段开设大学数学的历史仅十余年，无论是教学内容的选取，教学方法的选择，还是教材体系的组合，都处在一个探索性阶段。在编写过程中，为了使教材体系更具有科学性、趣味性和可读性，便于师生的教与学，我们听取了许多有大学数学教学经验的专家学者的宝贵意见，参阅了大量的资料，经过精心筛选，认真组织，反复修改，撰写了这本具有通识教育特色的大学数学教材，本书在内容的编排上，是根据面向21世纪通识教育阶段的研究成果而选定的，以54学时编写，使用中教师可根据不同专业、不同学时的需要灵活选用。

本书编写具体分工如下：大理学院周绍艳负责第1章，李嘉元负责第2章，王彭德负责第4、5章，亢红道负责第8章，曲靖师范学院刘俊负责第6章，思茅师范高等专科学校吴波负责第7章，安康学院王昭海负责第3章；另外大理学院的张朝元、毛崇斌、黑韶敏，文山学院的方艳溪，四川幼儿师专的唐越桥、周洪，昆明冶金高等专科学校的王荣参加了各章习题的编写工作，全书由王彭德统稿审定。

本书在编写过程中，得到了大理学院、曲靖师范学院、思茅师范高等专科学校、安康学院等院校的有关领导的支持，得到了北京师范大学出版社的大力支持，谨此表示衷心的感谢！

编写通识教育阶段的大学数学教材，目前还是一种尝试。编写中尽管我们做了大量的工作，但由于作者水平有限，错误在所难免，希望专家学者及广大师生力斧匡正。

编者

2010年4月

目 录

第 1 章 函数与极限 /1

1.1	函数	1
1.1.1	函数的概念	1
1.1.2	函数的 4 种特性	4
1.1.3	初等函数	5
1.2	函数的极限	8
1.2.1	数列的极限	8
1.2.2	函数的极限	10
1.2.3	无穷小与无穷大	13
1.3	计算函数极限的方法	15
1.3.1	函数极限的四则运算法则	15
1.3.2	复合函数的极限运算法则	16
1.3.3	无穷小的相关性质	17
1.3.4	两个重要极限	17
1.4	函数的连续性	18
1.4.1	函数的连续性	18
1.4.2	函数的间断点	19
1.4.3	初等函数的连续性	20
1.4.4	闭区间上连续函数的性质	21
习题 1		21

第 2 章 导数与微分 /25

2.1	导数的概念	25
2.1.1	变化率问题	25
2.1.2	导数的定义及几何意义	26
2.1.3	函数连续性与可导性的关系	28
2.2	求导法则	28
2.2.1	基本求导公式	28

2.2.2	函数的和、差、积、商的求导法则	29
2.2.3	复合函数的求导法则	30
2.2.4	隐函数的求导法	31
2.2.5	高阶导数	32
2.3	微分及其应用	33
2.3.1	微分的概念	33
2.3.2	微分的几何意义	34
2.3.3	微分的基本公式及运算法则	35
2.3.4	微分在近似计算中的应用	35
习题 2		36

第 3 章 导数的应用 /39

3.1	微分中值定理简介	39
3.1.1	罗尔定理	39
3.1.2	拉格朗日中值定理	41
3.1.3	柯西中值定理	43
3.2	导数在求函数极限中的应用	43
3.3	函数的单调性与曲线的凹凸性	46
3.3.1	函数的单调性	46
3.3.2	曲线的凹凸性	47
3.4	函数的极值与最大(小)值	49
3.4.1	函数的极值	49
3.4.2	函数的最大值和最小值	52
* 3.5	经济应用问题举例	53
习题 3		55

第 4 章 不定积分 /57

4.1	不定积分的概念与性质	57
4.1.1	原函数与不定积分的概念	57
4.1.2	基本积分公式	58
4.1.3	不定积分的性质	59
4.2	换元积分法与分部积分法	61
4.2.1	第一换元积分法(凑微分法)	61
4.2.2	第二换元积分法	63
4.2.3	分部积分法	65
* 4.3	有理函数的积分简介	67
习题 4		68

第5章 定积分及其应用 /72

5.1 定积分概念与性质	72
5.1.1 问题的提出	72
5.1.2 定积分的概念	74
5.1.3 定积分的性质	76
5.2 微积分基本公式	78
5.2.1 积分上限函数及导数	78
5.2.2 牛顿—莱布尼茨公式	79
5.3 定积分的计算	81
5.3.1 定积分的换元积分法	81
5.3.2 定积分的分部积分法	82
5.4 无穷区间上的反常积分	83
5.5 定积分的应用	84
5.5.1 微元法	85
5.5.2 在几何中的应用	85
5.5.3 在物理中的应用	88
5.5.4 在经济中的应用	89
5.5.5 在医学中的应用	90
习题 5	90

第6章 多元函数微积分 /93

6.1 多元函数	93
6.1.1 空间直角坐标系	93
6.1.2 空间曲面	95
6.1.3 多元函数	96
6.1.4 二元函数的极限与连续	97
6.2 偏导数与全微分	99
6.2.1 偏导数的概念与计算	99
6.2.2 高阶偏导数	102
6.2.3 全微分	103
6.3 多元复合函数的求导法则	105
6.3.1 多元复合函数的求导法则	105
6.3.2 一阶全微分形式不变性	107
6.4 二重积分	107
6.4.1 二重积分的概念	108
6.4.2 二重积分的性质	110
6.4.3 二重积分的计算	110

6.4.4	二重积分的应用	114
6.5	三重积分	114
6.5.1	三重积分的概念	114
6.5.2	三重积分的性质	115
6.5.3	三重积分的计算	115
习题 6		117

第 7 章 概率统计 /121

7.1	样本空间与随机事件	121
7.1.1	随机试验与样本空间	121
7.1.2	随机事件的关系与运算	121
7.2	随机事件的概率与计算	123
7.2.1	随机事件的概率及其性质	123
7.2.2	条件概率	125
7.2.3	事件的独立性	127
7.2.4	全概率公式与贝叶斯公式	129
7.3	随机变量及其分布	130
7.3.1	离散型随机变量及其分布	130
7.3.2	连续型随机变量及其分布	132
7.4	随机变量的期望与方差	134
7.4.1	期望	135
7.4.2	方差	136
7.5	描述统计	138
7.5.1	总体与样本	139
7.5.2	频数分布	140
7.5.3	特征量	144
7.6	推断统计	146
7.6.1	参数估计	147
7.6.2	假设检验	152
习题 7		154

第 8 章 数学思想方法简介 /159

8.1	化归思想方法	159
8.2	方程思想方法	160
8.3	函数思想方法	161
8.4	数学模型思想方法	163
8.5	整体化思想方法	165

8.6 公理化思想方法	166
8.7 无穷分析思维方法	168
8.8 概率统计思维方法	170
8.9 系统优化思维方法	171
8.10 计算逼近思维方法	174
习题 8	175

习题参考答案 /177

参考文献 /186

附 表 /187

附表 1 标准正态分布表	187
附表 2 泊松分布表	188
附表 3 t 分布表	189

第1章 函数与极限

函数是高等数学研究的主要对象,反映了变量之间的一种相互依赖关系,而极限则是研究函数的一种基本工具.本章将在初等数学的基础上介绍函数、函数极限及函数连续性等基本概念,为以后学习高等数学打下必要的基础.

1.1 函数

1.1.1 函数的概念

1. 函数的定义

定义1 设 D, M 是两个实数集的非空子集,若存在对应法则 f ,使得对于 D 内的每一个数 x ,都有 M 中唯一确定的数 y 与之对应,则称 f 是定义在数集 D 上的函数,记为

$$f: D \rightarrow M$$

$$x \mapsto y$$

或记为

$$y = f(x), \quad x \in D$$

并称 x 为自变量, y 为因变量, D 为该函数的定义域,也记作 D_f .

函数关系反映的是变量之间的一种相互依赖关系,这种关系是由对应法则来反映的.如: $y = \pi x^2, x \in [0, +\infty)$ 的对应法则就是自变量 x 的平方与 π 之积.于是对于每一个非负实数 x ,按照这个法则都有唯一确定的一个实数 y 与之对应,可理解为圆面积与圆的半径之间的相互依赖关系.即 $y = \pi x^2, x \in [0, +\infty)$ 是一个函数.

取定一数 $x_0 \in D$,称 $y_0 = f(x_0)$ 为函数在 x_0 处的函数值,函数值 $f(x)$ 的全体所构成的集合叫做该函数的值域,记作 R_f 或 $f(D)$,即

$$R_f = f(D) = \{y \mid y = f(x), x \in D\}.$$

注意:记号 f 与 $f(x)$ 的含义是有区别的, f 表示自变量 x 与因变量 y 之间的对应法则,而 $f(x)$ 表示自变量 x 对应的函数值.习惯上常用“ $f(x), x \in D$ ”或“ $y = f(x), x \in D$ ”来表示定义在 D 上的函数,这时应理解为由它所确定的函数 f .

如正弦函数 $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$

$$x \mapsto y = \sin x$$

把实数集 $\mathbf{R}$ 变到实数集 $\mathbf{R}$ 中去,且将每一个实数 x 唯一地变成另一个实数 $y = \sin x$,其定义为 $D_f = \mathbf{R}$,值域为 $f(D) = [-1, 1]$.

表示函数的记号除了常用的 f 外,还可使用其他的英文字母或希腊字母,如“ g ”“ h ”“ F ”“ φ ”等,相应的,函数可记为 $y = g(x), y = h(x), y = F(x), y = \varphi(x)$ 等.同样,自变量和因变量也可选用其他的英文字母.但是在同一问题中,当讨论不同的函数时,需用不同的记号来

表示不同的函数. 如: 对于半径为 r 的球, 它的表面积为 $S=f(r)=4\pi r^2$, 体积为 $V=g(r)=\frac{4}{3}\pi r^3$.

应该指出的是此处定义的函数由于只有一个自变量对应因变量, 通常也称为一元函数.

2. 函数的定义域

从函数定义可知定义域、对应法则、值域是构成函数的三个要素, 因此讨论函数时需要先明确函数的定义域.

函数的定义域通常按两种情形来确定: 对有背景的实际问题, 应根据实际背景中变量的实际意义确定其定义域; 对纯粹数学问题, 定义域是使表达式有意义的自变量取值的全体集合. 在确定函数定义域时常考虑以下几点:

- (1) 分式的分母不能为零;
- (2) 偶次根式的被开方数必须大于或等于零;
- (3) 对数的真数必须大于零, 底数大于零且不等于 1.

例 1-1 函数 $y=\sqrt{x}+\sqrt[3]{\frac{1}{x-2}}-\ln(2x+1)$

它的定义域是满足 $x\geq 0, x-2\neq 0$ 及 $2x+1>0$ 的一切 x 取值的全体集合.

解得: $\{x|x\geq 0 \text{ 且 } x\neq 2\}$.

例 1-2 函数 $y=c$ (c 为某固定常数), 称为常数函数.

定义域为 $D=(-\infty, +\infty)$, 值域为 $\{c\}$, 如图 1-1.

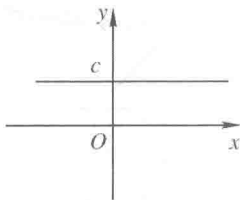


图 1-1

例 1-3 函数 $y=[x]$ 称为取整函数, x 为一切实数, $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

如: $[2.3]=2, [-4.7]=-5, [-4]=-4$

该函数的定义域为 $D=(-\infty, +\infty)$, 值域为整数集 $\mathbf{Z}$, 如图 1-2.

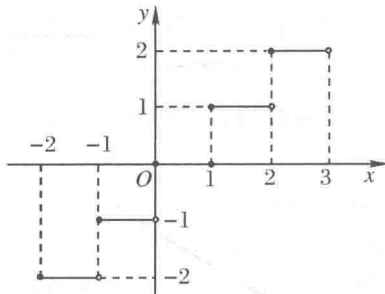


图 1-2

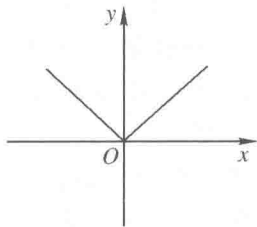


图 1-3

例 1-4 函数 $y=|x|=\begin{cases} x, & x\geq 0 \\ -x, & x< 0 \end{cases}$, 称为绝对值函数.

定义域为 $D=(-\infty, +\infty)$, 值域为 $[0, +\infty)$, 如图 1-3.

例 1-5 函数 $y=f(x)=\begin{cases} 2\sqrt{x}, & 0\leq x\leq 4 \\ 1+x, & x> 4 \end{cases}$, 其定义域为 $D=[0, +\infty)$, 值域为 $[0, 4]\cup$

$(5, +\infty)$.

像例 1-4、例 1-5 用两个或两个以上不同式子表达的函数称为分段函数.

由于定义域、对应法则、值域是构成函数的三个要素. 因此, 对于两个函数, 若定义域和对应法则都相同, 则它们的值域也相同. 即若两个函数的定义域和对应法则都相同, 则这两函数相同. 例如, 函数 $f(x)=x+2$ 与 $h(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$ 是两个不同的函数, 因为它们的定义域不同. 但是, 对于对应法则表达形式不同的两个函数, 它们可能是相同的函数. 如: 函数 $\varphi(x)=|x|, x \in \mathbf{R}$ 与 $\varphi(x)=\sqrt{x^2}, x \in \mathbf{R}$. 其对应法则表达形式不同, 但它们却是相同的函数.

3. 函数的表示

函数通常可用解析法(也称公式法)、图像法(也称图形法)或表格法等表示.

以上各例的函数均用解析法表示. 用解析法表示的函数中如果有多个字母, 要注意明确自变量与因变量. 如: $w=h(u)=2x^2\sqrt{u}-a^3u$ 就是以 u 为自变量, w 为因变量的一元函数, 表达式中的 x 与 a 为常量. 如果将该表达式重记为 $w=g(a)=2x^2\sqrt{u}-a^3u$, 则它变为以 a 为自变量, w 为因变量的一元函数, 表达式中的 x 与 u 变为常量. 当然如果将该表达式写为 $w=2x^2\sqrt{u}-a^3u$, 则自变量就不明确, 即在函数的学习中也要明确函数的自变量与因变量.

在平面直角坐标系上, 由函数 $y=f(x), x \in D$ 所确定的平面点集:

$$\{(x, y) | y=f(x), x \in D\}$$

称为函数 $y=f(x)$ 的图像, 它通常是平面上的一条曲线, 如例 1-2、例 1-4. 这就是用图像法来表示函数的依据.

例 1-6 某气象站用自动温度记录仪记下了一昼夜气温变化, 如图 1-4 所示.

由图所知, 对于每一时刻 t , 都有唯一确定的温度 T 与之对应, 因而这种曲线在区间 $[0, 24]$ 上确定了一个函数, 即用图像法表示函数.

函数也可以通过列出自变量的值与对应函数值的表格来表示, 称为表格法.

例 1-7 某城市某线路公共汽车的票价情况如表 1-1.

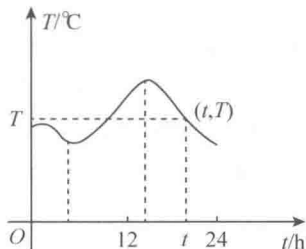


图 1-4

表 1-1

$x/\text{站}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$y/\text{元}$	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4

由表 1-1 可以看出, 票价 y 与所乘坐的站数 x 建立了明确的对应关系, 每当 x 取一个值, 由表可得 y 有唯一确定的一个对应值, 因而也确定了一个函数, 即表格法表示的函数.

也有一些函数难以用解析法、图像法或表格法来表示, 只能用语言来描述. 如: 定义在实数集上的狄利克雷(Dirichlet)函数: $f(x)=\begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数,} \\ 0, & x \text{ 为无理数} \end{cases}$ 等.

1.1.2 函数的4种特性

1. 函数的单调性

定义 2 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $D, I \subseteq D$, 若对任意 $x_1, x_2 \in I$, 当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有

(1) $f(x_1) < f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上(严格)单调增加, 区间 I 称为 $f(x)$ 的(严格)单调递增区间;

(2) $f(x_1) > f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上(严格)单调减少, 区间 I 称为 $f(x)$ 的(严格)单调递减区间.

单调增加和单调减小函数统称为单调函数, 也称函数具有单调性.

例如函数 $y=x^2$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 内是单调减小的; 在区间 $(0, +\infty)$ 内是单调增加的.

而函数 $y=x, y=x^3$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内都是单调增加的.

函数的单调性的判别在本书第 3 章还将继续介绍.

2. 函数的奇偶性

定义 3 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 是关于原点对称的区间, 若对任意 $x \in D$, 恒有

(1) $f(-x) = f(x)$, 则称函数 $f(x)$ 为偶函数;

(2) $f(-x) = -f(x)$, 则称函数 $f(x)$ 为奇函数.

例如, 函数 $y = -2x^2 + 5, y = \cos x, y = \frac{1}{2}x^2$ 都是偶函数, 函数 $y = x^3 - 7x, y = \sin x, y = x^3$ 都是奇函数, 而函数 $y = \ln x, y = \sin x + \cos x, y = e^x$ 是非奇非偶函数.

从奇函数、偶函数的定义可知, 若 $f(x)$ 为奇函数, 则点 $(x, f(x))$ 及 $(-x, -f(x))$ 均在 $y=f(x)$ 的图像上; 若 $f(x)$ 为偶函数, 则点 $(x, f(x))$ 及 $(-x, f(x))$ 均在 $y=f(x)$ 的图像上, 即奇函数的图像关于原点对称, 偶函数的图像关于 y 轴对称, 如图 1-5、图 1-6 所示.

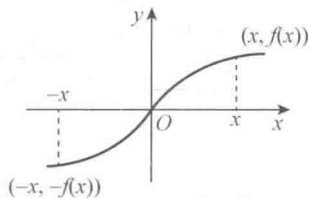


图 1-5

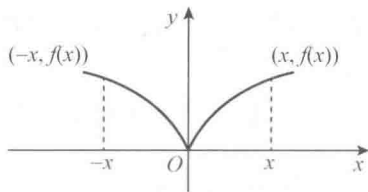


图 1-6

3. 函数的周期性

定义 4 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 如果存在常数 $T \neq 0$, 使得对任意 $x \in D$, 有 $(x+T) \in D$, 且

$$f(x+T) = f(x)$$

则称函数 $f(x)$ 为周期函数, T 为函数的周期, 通常所说的周期是指函数的最小正周期.

例如, $y = \sin x, y = \cos x$ 是以 2π 为周期的周期函数, $y = \tan x, y = \cot x$ 是以 π 为周期的周期函数, 即 $y = \sin(\omega x + \varphi), y = \cos(\omega x + \varphi)$ 是以 $\frac{2\pi}{|\omega|}$ 为周期的周期函数, $y = \tan(\omega x + \varphi), y = \cot(\omega x + \varphi)$ 是以 $\frac{\pi}{|\omega|}$ 为周期的周期函数, 而 $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ 不是周期函数.

例 1-8 狄利克雷(Dirichlet)函数 $f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数,} \\ 0, & x \text{ 为无理数} \end{cases}$ 是周期函数,任何正有理数都是它的周期,但不存在最小正周期.

4. 函数的有界性

定义 5 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $D, I \subseteq D$, 如果存在常数 K , 对任意 $x \in I$ 有

$$f(x) \leq K \text{ (或 } f(x) \geq K \text{)}$$

则称 $f(x)$ 在数集 I 上有上界(或有下界). 如果 $f(x)$ 在 I 上既有上界又有下界, 则称 $f(x)$ 在 I 上有界, 否则称为无界.

若函数 $y=f(x)$ 在 I 上有界, 则该函数在 I 上的图像介于平行于 x 轴的两条直线 $y=M$ 与 $y=K$ 之间.

显然, 函数 $f(x)$ 在 I 上有界等价于存在常数 $M>0$, 对任意 $x \in I$, 有

$$|f(x)| \leq M$$

或函数 $f(x)$ 在 I 上有界等价于存在常数 M_1 及 M_2 , 对任意 $x \in I$, 有

$$M_1 \leq f(x) \leq M_2$$

如函数 $y=\sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界; 函数 $y=x^2$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内无界.

函数的四种特性中除有界性外, 其他特性都是函数的特殊性质, 而不是每个函数都一定具有的.

1.1.3 初等函数

1. 基本初等函数

以下 6 类函数统称为基本初等函数.

(1) 常数函数: $y=C$ (C 为常数)

定义域为 $D=(-\infty, +\infty)$, 值域为 $\{C\}$, 图像见图 1-1.

(2) 幂函数: $y=x^\mu$ (μ 为实常数)

其定义域依 μ 的取值不同而不同, 但无论 μ 为何值, 它在 $(0, +\infty)$ 上总有定义, 图像举例如表 1-2 所示.

表 1-2

μ 的值	$\mu=1, 3$	$\mu=2$	$\mu=\frac{1}{2}$	$\mu=-1$
图像				
定义域	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$[0, +\infty)$	$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

(3) 指数函数: $y=a^x$ ($a>0$ 且 $a \neq 1$)

其定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $(0, +\infty)$, 图像过点 $(0, 1)$, $a>1$ 时是增函数(如图 1-7); $0<a<1$ 时是减函数(如图 1-8).

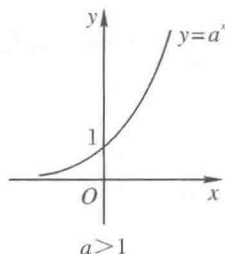


图 1-7

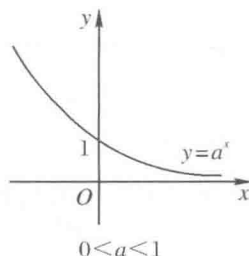


图 1-8

(4) 对数函数: $y = \log_a x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$)

其定义域为 $(0, +\infty)$, 值域为 $(-\infty, +\infty)$, 图像过点 $(1, 0)$, 当 $a > 1$ 时是增函数(如图 1-9); 当 $0 < a < 1$ 时是减函数(如图 1-10).

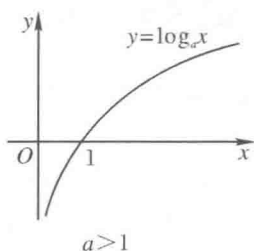


图 1-9

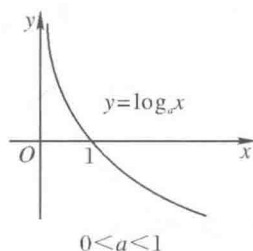


图 1-10

特别 $y = \lg x$ 表示 $y = \log_{10} x$; $y = \ln x$ 表示 $y = \log_e x$, 其中 $e = 2.718\ 28\cdots$ 是一个无理数.

(5) 三角函数

正弦函数 $y = \sin x$, 定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $[-1, 1]$.

余弦函数 $y = \cos x$, 定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $[-1, 1]$.

正切函数 $y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, 定义域为 $\{x | x \in \mathbf{R} \text{ 且 } x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\}$, 值域为 $(-\infty, +\infty)$.

余切函数 $y = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$, 定义域为 $\{x | x \in \mathbf{R} \text{ 且 } x \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$, 值域为 $(-\infty, +\infty)$.

它们都是周期函数, 其图像如表 1-3 所示.

表 1-3

$y = \sin x$	$y = \cos x$	$y = \tan x$	$y = \cot x$

除此之外, 还有正割函数 $y = \sec x = \frac{1}{\cos x}$ 和余割函数 $y = \csc x = \frac{1}{\sin x}$.