"十二五"国家重点图书出版规划

物理学名家丛书

轨道力学基础

Fundamentals of Orbital Dynamics

刘林 侯锡云 著

高等教育出版社

"十二五"国家重点图书出版规划

物理学名家丛书

轨道力学基础

Fundamentals of Orbit Dynamics

刘林　侯锡云　著

高等教育出版社·北京

内容提要

本书是轨道力学领域的基础教材，书中针对太阳系中小天体（包括人造天体）运动所涉及的两类数学模型（受摄二体问题和受摄限制性三体问题）作了全面阐述。本书对于受摄二体问题的基本概念作了详尽而系统的论述，包括近代天体力学中解决该类问题所采用的各种分析方法（又称普遍摄动法）：经典摄动法、平均根数法和变换方法；对于受摄限制性三体问题，就圆型限制性三体问题存在的雅可比积分和五个平动解的动力学特征（特别是相关的稳定性问题）作了系统论述，既可为太阳系轨道力学的研究工作打下必备的基础，又可为其在航天领域的应用提供理论依据。最后考虑到轨道力学工程应用领域的需要，以一章的篇幅对各类天体运动的轨道确定方法作了较详尽的介绍。另外，在本教材的附录中，作为数学工具，对求解常微分方程的数值方法（曾在受摄二体问题的求解问题中称为特别摄动法）作了必要的介绍，包括单步法、多步法和哈密顿算法（亦称辛算法）。

为了便于读者阅读，书中对时空参考系、无摄运动和受摄运动的概念等天体力学基础知识都作了必要的阐述。全书共分 12 章，主要针对太阳系中小天体（包括人造天体，即各类空间探测器）的质心运动，论述解决相应轨道问题的基本方法。本书理论体系完整，并注意与实际应用的紧密联系，既具基础性又具实用性，可作为高等学校天文、应用数学、应用物理、一般力学和航天动力学等领域高年级本科生和研究生学习轨道力学的基础教材，也可作为有关科技人员的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

轨道力学基础 / 刘林，侯锡云著. --北京：高等教育出版社，2018.9

ISBN 978-7-04-048742-8

Ⅰ. ①轨… Ⅱ. ①刘… ②侯… Ⅲ. ①轨道力学-高等学校-教材 Ⅳ. ①O3

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 253514 号

Guidao Lixue Jichu

策划编辑 忻 蓓　　责任编辑 高聚平　　封面设计 杨立新　　版式设计 于 婕
插图绘制 杜晓丹　　责任校对 高 歌　　责任印制 田 甜

出版发行	高等教育出版社	网　　址	http://www.hep.edu.cn
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.hepmall.com.cn
印　　刷	北京信彩瑞禾印刷厂		http://www.hepmall.com
开　　本	787mm×960mm 1/16		http://www.hepmall.cn
印　　张	33.75		
字　　数	610 千字	版　　次	2018 年 9 月第 1 版
购书热线	010-58581118	印　　次	2018 年 9 月第 1 次印刷
咨询电话	400-810-0598	定　　价	58.00 元

物 料 号　48742-00

前　言

本书研究天体运动的基础知识。相应的运动是指太阳系中各类天体(特别是小天体,包括人造天体,即各类航天器)的质心运动,亦称轨道运动,因此本书书名取为《轨道力学基础》。只有当两天体相距较近时,才考虑它们之间的非质点(确切地说是对密度分布均匀的球形天体的"修正")效应,即在一般情况下,相应的动力学问题对应的是 N 个质点的力学系统,即所谓的 $N(N\geqslant2)$ 体问题。

众所周知,对于一般 N 体问题(指 N 个"质点"在相互之间引力作用下的运动问题),只有 $N=2$ 对应的二体问题才是可积的,且已给出了完整的分析解。当 $N\geqslant3$ 时,只找出 10 个经典积分,即动量积分、动量矩积分和能量积分,在求解问题上,至今无任何实质性的新进展。因此,关于一般 N 体问题,无论是三体问题还是少体问题(N 不大,如太阳系中太阳和八大行星组成的九体问题)或是多体问题(N 较大),主要着重于定性研究,如系统的构形、演化性态与稳定性等方面。尽管这些研究很重要,可揭示相应力学系统的一些本质现象,但与实际应用有一定距离;而在解决这类实际问题时往往采用求解常微分方程初值问题的数值方法。然而,我们所处的太阳系,各天体的运动,特别是小天体的运动(包括各类空间探测器)所处的力学环境,基本上只有一个或两个主要外力源,其他外力作用相当于小扰动,因此可以分别处理成受摄二体问题或受摄限制性三体问题。在限制性问题中也有一种状态可以归结为受摄二体问题,严格地说是受摄限制性二体问题,但就求解方法和过程而言与一般受摄二体问题无本质差别,因此,通常不再区分受摄限制性二体问题和受摄二体问题,就统称为受摄二体问题。

本书针对上述两类数学模型,系统阐述解决问题的理论基础和具体方法,内容的介绍和编排都尽可能便于直接引用,但其目的更重要的是从基本原理出发,对论及的命题作必要的逻辑推导,并试图阐明采用这些过程的缘由,从而为读者进一步学习相关知识和开展独立研究工作打下基础。

轨道力学知识的学习,既可以像学数学那样作为一种逻辑思维的训练,从而获得对原理和形式逻辑关系的普遍了解,又可以从实用角度获得掌握解决具体问题的方法。前者当然不可忽视,而后者同样是本书内容安排所侧重的方面,主要是阐述近代天体力学中有关解决轨道问题的一些重要方法,包括分析方法和必要的定性分析以及作为计算手段的数值方法。

阅读本书应具备一定的天文知识、理论力学及微积分学基础。此外,为了对某些推导能够彻底理解,还需要掌握线性代数、常微分方程等领域的有关知识。

本书的内容大致分为如下几个部分：

（1）绪论阐明轨道力学问题的具体背景和相应数学模型的建立，即受摄二体问题和受摄限制性三体问题。

（2）第1章研究和处理上述两类数学问题的时空参考系。

（3）第2章阐述二体问题的完全解和轨道力学中常用的基本关系式。

（4）第3章至第6章阐述受摄二体问题的处理方法和构造相应摄动分析解的几种方法，即天体力学问题中的经典摄动法（亦即常微分方程解析理论中的小参数幂级数解的构造方法）、改进的摄动法（即平均根数法和拟平均根数法）和变换方法，这类分析方法曾称为普遍摄动法（general perturbation）。

（5）第7章至第10章阐述圆型限制性三体问题的基本结论，特别是有关五个平动点及其邻近的动力学特征，以及这些基本结论在太阳系动力演化和深空探测领域中（包括轨道设计、保持和控制等方面）的应用。

（6）第11章介绍太阳系动力学中的一些重要理论问题，特别是小天体轨道演化涉及的轨道共振问题。

（7）第12章介绍轨道力学应用问题中的一个重要内容——各类天体运动的定轨问题，包括初轨确定和精密定轨（即轨道确定与参量估计）。

（8）本书的附录包括天文常数、太阳系主要天体的简单历表等，以及求解天体运动方程常用的数值方法，即特别摄动法（special perturbation），其内容并不是简单地重复通常求解常微分方程的数值解法，而是侧重天体（包括人造天体）运动方程特点的相关内容。

本书中公式和符号较多，同一符号在不同公式中可能有不同含义。另外，为了语言上的需要，同一量（或方法）在不同之处可能有不同名称。然而，对于最常用的量（如轨道根数等），将尽量保持用同一符号表示，而且采用本学科领域中习惯采用的符号，便于读者查阅有关资料和原始文献。

本书根据南京大学原天文系50多年开设的有关课程的教材和研究工作所积累的资料而写成。曾分别于1992年8月由高等教育出版社出版了《人造地球卫星轨道力学》一书，1998年4月（1995年5月完稿）和2006年2月（2005年2月完稿）由南京大学出版社出版了《天体力学方法》和《航天动力学引论》两本教材，2006年开始作为江苏省研究生核心课程建设编写了《轨道力学》教材，这次又根据近10年来的教学与科研实践和相关学科发展的需求，作了相应的修改和补充，整合成一本有关轨道力学的基础教材。

编　者

2017年10月

目　　录

绪　论

0.1　太阳系动力学中的轨道力学问题

任一天体(自然天体或人造天体)的宏观运动包含两类完全不同的形态,一是其质心的运动,另一是该天体各个部分相对其质心的运动,后者称为姿态运动,而前者就是轨道运动。研究这两类运动问题,分别形成了相应的轨道动力学(以下简称轨道力学)和姿态动力学。关于后者,早期研究地球的岁差、章动和月球的物理天平动就是一类典型的姿态动力学问题。本书要阐述的是太阳系天体(特别是各类航天器)的轨道力学问题,其主要内容是阐明各天体质心的运动规律,在某些问题中会涉及姿态问题,如坐标系选择中会涉及地球赤道面摆动对应的岁差、章动问题,卫星运动轨道(在考虑表面力类型的外力作用时)也同样会涉及其自身的姿态问题,但仅仅是引用相应的姿态运动的结果而已。

太阳系是一个十分复杂的力学系统,除作为这一力学系统主天体存在的太阳外,还有 8 个大行星和数量众多的小行星以及自然卫星、彗星和空间尘埃等。研究这一系统的起源和各类大小天体的轨道特征与动力演化,一直是推动天体力学发展的"动力"。早期有关行星运动的开普勒(Kepler)三大定律,牛顿(Newton)万有引力定律,就是建立在长期对大行星运动进行观测的积累上,而它们的建立也奠定了太阳系动力学的基础。普遍存在于太阳系的共振现象等,又不断地推动太阳系动力学的发展。而航天时代的到来,出现了大量的人造天体,尽管这些人造天体实质上就是一种小天体,但它们所涉及的运动问题,包括所处的力学环境和人们对其所关注的焦点,又不同于自然天体,这就再次扩展了太阳系动力学的研究背景和内容,并使其与航天动力学的发展很自然地形成了紧密的联系。

太阳系中存在大量质量相对较小的小天体,包括小行星、大部分自然卫星、彗星以及各类人造航天器等。那么,就动力学角度而言,什么样的天体称为小天体呢? 在太阳系动力学中,当其质量小到由于它的存在,并不"改变"它所在的力学系统中其他天体的运动状态,这样的天体即称为小天体。显然,各类航天器就属于这种小天体的范畴,因为直到目前,从地面上送入空间的任何一种航天器,其质量相对而言确实很小,太阳系中各个天体(包括地球本身)并不会因出现这样一类航天器而发生运动状态的变化。

在研究各种天体的运动时,如果将相应力学系统中该运动天体和所有影响

它的引力源和非引力源都处理成“质点”（暂且不考虑非质点引力或非引力的一些具体细节，这不会影响对问题的阐述），即形成一个 N 体系统，数学上就构成一个 N 体问题。如果所要论述的问题是：一个质量可忽略的小天体在另外 $(N-1)$ 个运动状态确定的“天体引力”（确切地说即相应的力源）作用下的运动，这一动力学问题就称为限制性 N 体问题，它与一般 N 体问题的提法和研究内容有重大区别。当 $N=3$ 时，就是天体力学（或轨道力学）中最著名的“**限制性三体问题**”。限制性问题与非限制性问题并不是一个简单的名称差别，由于待研究的运动小天体的质量小到可以忽略，这将导致在数学处理方法上和相应的运动特征都会出现重大差别。例如一般三体问题，除存在 10 个经典积分外，别无其他动力学信息，而限制性三体问题则不然，除该系统中两个大天体的运动状态能完全确定外，又可给出另一个小天体特有的运动特征，这对研究自然小天体（如小行星）的运动，或是人造小天体（即各类航天器）的运动而言，都是极其重要的动力学信息，更与深空探测器的发射和形成某种特殊的目标轨道（探测任务的特定需求）有密切关系。因此，深空探测器轨道力学与限制性问题这一动力学模型是分不开的。

上述模型是对 N 个质点引力系统而言的，这是经典提法。事实上在一定状态下，研究天体运动时，还要考虑外力源中各大天体的不“规则”形状和不均匀的质量分布引起的非球形引力效应，大天体的非引力效应（辐射作用等）以及后牛顿效应（对牛顿力学的修正）等，但这些并不改变上述轨道力学问题的基本提法和处理方法，故有关轨道力学问题所涉及的力学系统，不必再拘泥于经典的 N 体质点引力系统的提法，只要将那些非质点引力因素看成相应的各种力源，而又能将它们对应的作用在运动天体上的力用数学形式表达出来即可。

0.2 轨道力学涉及的两类力学系统

事实上，每个大天体或小天体（包括航天器）运动涉及的力学系统中，对其运动有影响的外力源往往远超过两个，即 $N>2$。但就太阳系的现状（演化至今）而言，主要外力源至多两个。对于各大行星的运动，主要外力源只有一个，就是太阳，其他外力源都是摄动源（即小扰动）。小行星的运动主要外力源是太阳或太阳和一个大行星；自然卫星的运动，主要外力源是相应的大行星；人造地球卫星的运动，主要外力源是地球，远地卫星（如月球探测器在转移轨道段的运动），主要外力源是地球和月球；深空探测器（探测大行星或自然卫星）的运动，主要外力源是太阳，或太阳和一个大行星，或目标行星及其一个自然卫星等。除两个主要外力源外，其他力源（包括上述非质点引力和非引力等）均可处理成摄动

源。因此，在现实的太阳系中，研究各天体(包括各类航天器)的运动，除太阳系动力演化问题外，就轨道力学而言，合理的力学模型只有两类：大行星和一类小天体的轨道问题，主要外力源只有一个，对应的是一个"**受摄二体问题**"，而另一类小天体(包括各种空间探测器)的轨道问题，主要外力源有一个或两个，对应的是一个"**受摄限制性三体问题**"。

对于上述 N 体问题，一个是待研究其运动的天体，其他 $(N-1)$ 个外力源。对于这一 N 体系统，如果不去考虑它的物理背景，也不去考虑它属于哪一类力学系统，暂作为一般处理，在定义的一个惯性直角坐标系 $O\text{-}xyz$ 中来研究该系统中任一天体的运动。这一力学问题中，运动天体 P 就作为第 N 个天体，其质量记作 m(对小天体即取为零)，对其他 $(N-1)$ 体 $P_i(i=1,2,\cdots,N-1)$，仅作质点的假定，质量记作 $m_i(i=1,2,\cdots,N-1)$，这并不影响对问题的讨论，因为在本教材讨论的问题中，所涉及的非引力源不会成为上述两个主要力源中的任何一个，只是一个小摄动源，在相应运动方程中正确地写出该摄动加速度即可。在选定的惯性直角坐标系 $O\text{-}xyz$ 中，运动天体 P 在 $(N-1)$ 个外力源作用下的运动，归结为下列常微初值问题：

$$\ddot{\boldsymbol{r}}=-\sum_{i=1}^{N-1}\frac{Gm_i}{\Delta^3}\boldsymbol{\Delta}_i,\quad \boldsymbol{\Delta}_i=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i \tag{0.1}$$

$$t_0:\boldsymbol{r}(t_0)=\boldsymbol{r}_0,\quad \dot{\boldsymbol{r}}(t_0)=\dot{\boldsymbol{r}}_0 \tag{0.2}$$

其中 G 是引力常数，$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(x,y,z)$ 是运动天体 P 在该坐标系中的位置矢量，$\boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{r}_i(x_i,y_i,z_i)$ 是第 i 体 $P_i(i=1,2,\cdots,N-1)$ 在该坐标系中的位置矢量，(0.2)式即相应的初值条件。

无论是只有一个主要外力源的受摄二体问题，还是有两个主要外力源的受摄限制性三体问题，在一些具体应用中，常将坐标系建立在其中一个主要外力源对应天体(以下按通常习惯称这一天体为中心天体)的质心上，如人造地球卫星或地-月系探测器的运动问题，即采用地心天球坐标系 $O\text{-}xyz$。在此坐标系中，假定以 N 个天体 $P_i(i=1,2,\cdots,N)$ 中的 P_1 作为中心天体，那么运动天体 P 在这一坐标系中的运动方程将变为下列形式：

$$\ddot{\boldsymbol{r}}=-\frac{G(m_1+m)}{r^3}\boldsymbol{r}-G\sum_{j=2}^{N-1}m_j\left(\frac{\boldsymbol{\Delta}_j}{\Delta_j^3}+\frac{\boldsymbol{r}_j}{r_j^3}\right),\quad \boldsymbol{\Delta}_j=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_j \tag{0.3}$$

其中 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(x,y,z)$ 和 $\boldsymbol{r}_j=\boldsymbol{r}_j(x_j,y_j,z_j)$ 就是运动天体和第 j 个天体 $P_j(j=2,\cdots,N-1)$ 在该坐标系中的位置矢量，相应的初值条件仍记为

$$t_0:\boldsymbol{r}(t_0)=\boldsymbol{r}_0,\quad \dot{\boldsymbol{r}}(t_0)=\dot{\boldsymbol{r}}_0 \tag{0.4}$$

关于上述运动方程(0.3)的形式，似乎就是通常受摄二体问题对应的基本方程，其实不然。只有当该方程右端的第二部分中各"天体" $P_j(j=2,\cdots,N-1)$ 的作用

加速度**远比**第一部分(中心引力加速度)小时,才是通常受摄二体问题对应的受摄运动方程。

在上述坐标系的选择下,方程(0.3)是一个普适形式,如果运动天体为小天体,即可取 $m=0$,该方程右端的第一部分中心引力加速度项将改为下列形式:

$$-\frac{Gm_1}{r^3}\boldsymbol{r}=-\frac{\mu}{r^3}\boldsymbol{r},$$

其中 $\mu=Gm_1$ 即中心天体的引力常数。

尽管方程(0.3)对了解天体的运动特征,或寻找相应的求解方法,并无直接采用的价值,但这种表达方式在一些具体问题的处理上却是不可少的,它不受特定运动类型的限制,有一种普适性,如深空探测器发射过程中定轨问题状态方程的表达等问题,这将在后面有关章节中阐明。下面将针对上述两类力学系统的具体背景,转入论述问题的主题,分别介绍相应的数学模型及其处理方法和研究现状。

0.3 卫星运动采用的数学模型——受摄二体问题[1-8]

太阳系各大行星和小行星的运动、各大行星的自然卫星的运动,以及人造目标天体轨道器(人造地球卫星、月球卫星、火星卫星等环绕型探测器)的运动,主要外力源只有一个。其中,各大行星和小行星的运动,主要外力源是太阳引力;自然卫星运动的主要外力源是相应的大行星;轨道器运动的主要外力源则是相应的目标天体。对于上述各类运动问题,除主要外力源外,其他各种外力作用相对较小,这就可以将一般 $N(N\geqslant3)$ 体系统转化成一个受到“干扰”的二体系统,相应的数学问题通常就称为受摄二体问题。为了区别,将这一“受摄二体系统”中对应主要外力源的天体称为“中心天体”,用符号 P_0 表示,相应的质量记作 $m_{中心}$,而另一个待研究其运动的天体用符号 p 表示,质量记作 m。所要研究的问题,就是上述大、小行星、自然卫星和人造卫星(环绕型探测器)在相应的中心天体引力作用和若干摄动因素影响下的运动轨道问题。

对于受摄二体问题,同样归结为一个常微初值问题,即

$$\ddot{\boldsymbol{r}}=-\frac{G(m_{中心}+m)}{r^3}\boldsymbol{r}+\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{F}_i \tag{0.5}$$

其中 G 是引力常数,$\boldsymbol{F}_i$ 是应考虑的各种摄动加速度,为了表达简便,将前面(0.3)式对应的 $(N-2)$ 个摄动源改为 N 个。这里的坐标系原点是在中心天体 P_0

[1-8] 参见本章最后参考文献。

的质心上，$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(x,y,z)$是运动天体在该坐标系中的位置矢量，相应的初值条件为

$$t_0:\boldsymbol{r}(t_0)=\boldsymbol{r}_0,\quad \dot{\boldsymbol{r}}(t_0)=\dot{\boldsymbol{r}}_0 \tag{0.6}$$

通常引用符号μ：

$$\mu=G(m_{中心}+m) \tag{0.7}$$

对于小天体（包括各种环绕型探测器）而言，相应的运动天体p的质量$m=0$，那么运动方程(0.5)即变为下列形式：

$$\ddot{\boldsymbol{r}}=-\frac{\mu}{r^3}\boldsymbol{r}+\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{F}_i \tag{0.8}$$

其中$\mu=Gm_{中心}$是中心天体的引力常数，例如研究人造地球卫星的运动，中心天体是地球，常用的符号$\mu=GE$就是地心引力常数，其值为$3.986\ 03\times10^{14}\ \mathrm{m^3/s^2}$。对于一个地球低轨卫星，如果在300 km高的近圆轨道上运行，地球中心引力加速度(μ/r^2)约为$9\ \mathrm{m/s^2}$，而自然存在的各种摄动加速度$\boldsymbol{F}_i\quad(i=1,2,\cdots)$中最大的地球动力学扁率项的相对大小为$10^{-3}$，运动方程(0.8)对应的就是一个典型的受摄二体问题，相应的运动轨道是一个缓慢变化的椭圆。如果该卫星有1 t重，并同时存在持续的100 N大小的推力（这一卫星相当于一个机动平台），相应的机动加速度为$0.1\ \mathrm{m/s^2}$，这仍可看作一种摄动力，其相对大小也仅达到10^{-2}，比月球环绕地球运动受到太阳的引力摄动(2×10^{-2})还小一些。对于这样一个空间机动平台的运动，采用受摄二体问题模型来研究它的运动规律仍然有效。

0.3.1 二体问题与开普勒运动

受摄二体问题的参考模型即简单的二体问题，相应的常微初值问题如下：

$$\ddot{\boldsymbol{r}}=-\frac{\mu}{r^3}\boldsymbol{r} \tag{0.9}$$

初值条件同上，即(0.6)式。这是一个已完全解决的可积系统，对应的是众所周知的开普勒运动，其运动轨道为二次圆锥曲线：椭圆、抛物线和双曲线，轨道方程的形式如下：

$$r=\frac{p}{1+e\cos f} \tag{0.10}$$

其中f是真近点角，e是偏心率，这里的符号p是半通径，对椭圆、抛物线和双曲线三种情况分别有

$$p=a(1-e^2),\quad e<1 \tag{0.11}$$

$$p=2q,\quad e=1 \tag{0.12}$$

$$p=a(e^2-1),\quad e>1 \tag{0.13}$$

(0.11)式和(0.13)式中的a是轨道半长径，(0.12)式中的q是近星距。

该问题另一个关键性的积分直接体现运动体在轨道上的“位置”，即近点

角与时间 t 的关系。同样,对上述椭圆、抛物线和双曲线三种情况有不同的形式,即

$$E-e\sin E=n(t-\tau)=M \tag{0.14}$$

$$2\tan\frac{f}{2}+\frac{3}{2}\tan^3\frac{f}{2}=2\sqrt{\mu}\,q^{-3/2}(t-\tau) \tag{0.15}$$

$$e\sinh E-E=n(t-\tau)=M \tag{0.16}$$

上述三式就是著名的**开普勒方程**的三种形式,可以说**开普勒运动**的名称也就与此有关。公式中的 τ 是运动体过近星点的时刻,f,E 和 M 各称为真近点角、偏近点角和平近点角,n 是平运动角速度,由下式定义:

$$n=\sqrt{\mu}\,a^{-3/2} \tag{0.17}$$

从上述内容可知,二体问题与开普勒运动通常是不加区分的,不过要说明的是:无论是二体问题,还是开普勒运动,都应包含上述三种轨道,即椭圆、抛物线和双曲线,只是人们通常关注的焦点是椭圆轨道罢了,因为这种轨道形式是太阳系中天体的主要运动形态。

0.3.2 受摄二体问题的处理

对于**受摄二体问题运动**方程(0.5)的处理,至今还没有其他更有效的方法,**参考轨道**仍采用**开普勒轨道**,实际运动则为缓慢变化的开普勒轨道,相应的运动状态,在任何时刻都可以用瞬时开普勒轨道(如**瞬时椭圆**轨道)来刻画。具体处理方法,即在上述参考模型解的基础上利用常数变易法转化为小参数方程,从而根据常微解析理论(邦加雷定理)构造所需要的解析解——小参数幂级数解,具体采用一阶、二阶或高阶解来表达。在常数变易中,基本参数通常是采用二体问题完整解中具有明确轨道几何意义的积分常数——六个开普勒根数 $a,e,\cdots,M$,不妨记作 σ:

$$\sigma=(a,e,i,\Omega,\omega,M)^{\mathrm{T}} \tag{0.18}$$

该式上标 T 表示转置。在二体问题中,开普勒根数为不变的积分常数。在中心天体坐标系中,这 6 个轨道根数定义为

a:轨道半长径, e:偏心率, i:轨道倾角,

Ω:轨道升交点经度, ω:近地点幅角, M:平近点角

其中前 3 个 a,e,i 为角动量,而后 3 个 Ω,ω,M 则为角变量(Ω 和 ω 是慢变量,M 是快变量)。

对于受摄二体问题(0.5),经常数变易后转化为下列小参数方程:

$$\dot{\sigma}=f(\sigma,t,\varepsilon) \tag{0.19}$$

其中 ε 是对应摄动加速度 $\boldsymbol{F}_\varepsilon$ 的小参数,该方程有多种形式,将在后面的有关章节中具体阐述,相应的初值条件是

$$t_0: \sigma = \sigma_0 \tag{0.20}$$

这里 σ_0 即初始根数。

采用经典摄动法(或各种改进的摄动法)即可构造相应的受摄轨道根数变化的小参数幂级数解,取到 k 阶(对小参数 ε 而言)的形式如下:

$$\sigma(t) = \sigma^{(0)} + \Delta\sigma^{(1)} + \Delta\sigma^{(2)} + \cdots + \Delta\sigma^{(k)} \tag{0.21}$$

其中 $\sigma^{(0)}$ 是参考轨道,即无摄轨道根数。这一解的构造方法(摄动法)沿用至今,对变化椭圆和双曲线轨道均适用。

关于受摄二体问题(0.5),在天体力学和卫星轨道力学的发展过程中,也确实尝试过其他解决途径,如采用区别于上述无摄轨道作为参考轨道去构造摄动解的“**中间轨道**”法。所谓中间轨道,即比无摄运动轨道更接近真实轨道的一种包含部分摄动的“非开普勒轨道”。早年的月球中间轨道解(对应 Hill 问题)就是一个成功的例子;同样在建立人造地球卫星的轨道解中,针对地球非球形引力位的特征,亦有过采用中间轨道解的工作,但这些轨道解实际上仍旧对应一种包含了部分摄动的变化椭圆,并无实质性的内涵,也没有必要去称其为非开普勒轨道。而且,无论是月球绕地球运动的 Hill 解,还是在地球卫星轨道力学中所寻找出的中间轨道解,都难以得到直接应用,还得借助变化椭圆轨道去进一步考虑“剩余”摄动。因此,直到目前为止,在解决受摄二体问题中,开普勒轨道仍旧是其最理想的**参考轨道**。

关于上述受摄二体问题(0.5),经常数变易法处理转化后的摄动运动方程中,第六个变量(或轨道根数)并未采用真正意义上的无摄运动的第六个积分常数 τ(τ 即运动天体过近星点的时刻),亦未采用 $M_0 = n\tau$, $n = \sqrt{\mu}\, a^{-3/2}$,而是选择了平近点角 M。其原因很简单,一是因为在受摄运动中,τ 和 M_0 都是变化的,已无实用意义,而平近点角 M 的意义仍是明确的,引用方便;另一原因是

$$M = n(t - \tau) \tag{0.22}$$

它是两个根数 a 和 τ 的组合,在相应的摄动运动方程中出现的 $\partial R/\partial a$ 就不再涉及 R(摄动函数)中隐含 a(通过 M)的问题,M 本身是独立的,这可简化摄动运动方程的具体表达形式。

0.4 小行星和深空探测器运动涉及的受摄限制性三体问题

0.4.1 圆型和椭圆型限制性三体问题[9-12]

一个 $N = (2+1)$ 的三体系统中,有两个大天体和一个小天体。由于小天体对两个大天体的运动没有影响,因此两个大天体的运动即对应一个简单的二

体问题，其相对运动(或相对该两个大天体质心的运动)的解是一圆锥曲线。既然讨论构成一个系统的问题，当然排除抛物线和双曲线的情况，即只有圆运动和椭圆运动，分别对应圆型和椭圆型限制性三体问题。对这样一类限制性三体问题，就是在两个大天体运动确定的条件下，研究第三个天体(小天体)的运动。

日-地-月三体系统，相应的三体质量分别记作 m_1，m_2 和 m，由于月球质量(m)相对日、地质量(m_1，m_2)均较小，大约有 $m=0.012m_2$，又地球绕日运动的椭圆轨道偏心率约为 0.017，故作为一种近似，可将该系统中月球的运动处理成圆型限制性三体问题，如果处理成椭圆型限制性三体问题就更接近真实情况。又如主带小行星(主带即处于火星与木星轨道之间的小行星带，这是太阳系小行星最集中的空间)的运动，主要受太阳和木星的引力作用，木星的轨道偏心率亦较小，因此也常把主带小行星的运动处理成圆型限制性三体问题。

深空探测器的发射，如月球探测器，发射的初始阶段是在近地空间轨道上运动，就相当于一个地球卫星，到达月球附近变为绕月飞行的月球卫星，其运动规律类似于地球卫星，而在地月间的飞行段(如果是地月系探测器，则主要是在地月空间的运行段)则对应一个地-月-探测器三体系统的典型的圆型或椭圆型限制性三体问题。在太阳系中还不乏类似的实例。除此之外，密近双星系统中，两子星和它们之间交换的物质(当作运动小天体)亦属这种类型。

对于上述模型，即使最简单的圆型限制性三体问题，就求解而言，至今亦未解决。只有当两个大天体的相对运动速度与小天体的运动速度相比甚小时，可以近似地将两个大天体看作是“静止”的，这样一种状态，被称为限制性三体问题中的两个不动中心问题，这种类型是可积的，相应的解也已全部给出，但这种简单的力学模型无助于太阳系动力学和深空探测器轨道力学问题的解决。

0.4.2 限制性(N+1)体问题和受摄限制性三体问题模型[13,14]

这里 $N\geqslant 3$，即该系统中有 N 个大天体和一个小天体，例如上面提到的主带小行星的运动，为了更真实地体现这类小行星的运动及其空间分布的特征(Kirkwood 空隙)，在考虑主要受力因素(太阳和木星的引力作用)外，进一步考虑土星和火星的引力作用，就在形式上构成一个限制性五体($N=4+1$)问题。月球探测器除受地、月的引力作用外，还有太阳引力的显著影响，它就对应一个形式上的限制性四体($N=3+1$)问题。在上述系统中，不管大天体有多少(即 N 的数值不同)，无论是主带小行星的运动，还是月球探测器的运动，都是在相应大天体的运动确定情况下来研究小天体的运动。但是，在上述提到的两个动力学实

例中，如果第三、第四个大天体的引力作用不足以明显改变原限制性三体问题模型的结果，那么即可将其作为原限制性三体问题模型的一些小扰动，这就相当于引进一个受摄限制性三体问题模型。事实上，对于上述两个实例，在研究过程中（不管是主带小行星的运动，还是月球探测器的运动）往往就是这样处理的，在当今对深空探测器的发射轨道和某些特殊目标轨道（如晕轨道）的设计中，同样是这样处理的，也就是充分利用限制性三体问题模型所能提供的重要信息。而若形式上采用限制性四体或五体问题模型，相应的三个或四个大天体的运动问题本身就未解决，这类看似更精确或吸引人的模型，却无助于对于限制性问题的解决，至少目前如此。因此，在现实的太阳系中，处理大小天体和人造天体的轨道运动问题时，除上述**受摄二体问题**模型外，就是**受摄限制性三体问题**模型。

0.4.3 限制性($n+k$)体问题[15,16]

这是一个 $N=n+k$ 体系统，其中包含 n 个大天体和 k 个小天体，但特指 $n\geqslant 2$ 和 $k\geqslant 2$ 的系统，若 $k=1$ 则退化为上一节归纳的两种系统之一。在这一 $N=n+k$ 系统中有 n 个大天体和 k 个小天体，因此它实际上等价于两个问题，即一个一般 n 体问题和一个在 n 个大天体（运动状态已知）的引力作用下的 k 个小天体的运动问题。尽管 k 个小天体的质量相对大天体而言很小，它们不会影响大天体的运动，但在某些系统中，k 个小天体之间的距离却很近，相互之间的引力作用需要考虑，否则就变为 k 个限制性($n+1$)体问题。

关于限制性($n+k$)体问题，在太阳系中也有相应的力学背景。例如，主带小行星群中两颗小行星之间的距离可以很近，需要考虑它们之间的引力作用，那么太阳、木星和这两颗小行星就构成一个限制性(2+2)体问题；在地球赤道上空一个定点处发射两颗以上几吨重的地球“静止”卫星，相互之间的距离若为百米量级，在精度要求较高的问题中就需要考虑它们之间的相互引力作用，在此情况下，作为椭球体的地球（相当于一个质量密度均匀的球体和椭球体赤道的“多余”部分，视为两个大天体）和两个卫星同样构成一个限制性(2+2)体问题。在深空探测器的发射中或许也会出现这样的状态，如在某个特殊位置附近定点多个探测器，相互之间的引力作用又不可忽视，在此情况下与两个相应的大天体就构成上述限制性($2+k$)体问题。

0.4.4 广义限制性三体问题

在牛顿引力作用下的限制性三体问题中，如果一个大天体有较强的辐射，或还需要考虑该大天体的引力后牛顿效应（即对牛顿引力理论的修正），那么不妨称其为广义的限制性三体问题。在这种情况下，如果第二个大天体的运动不