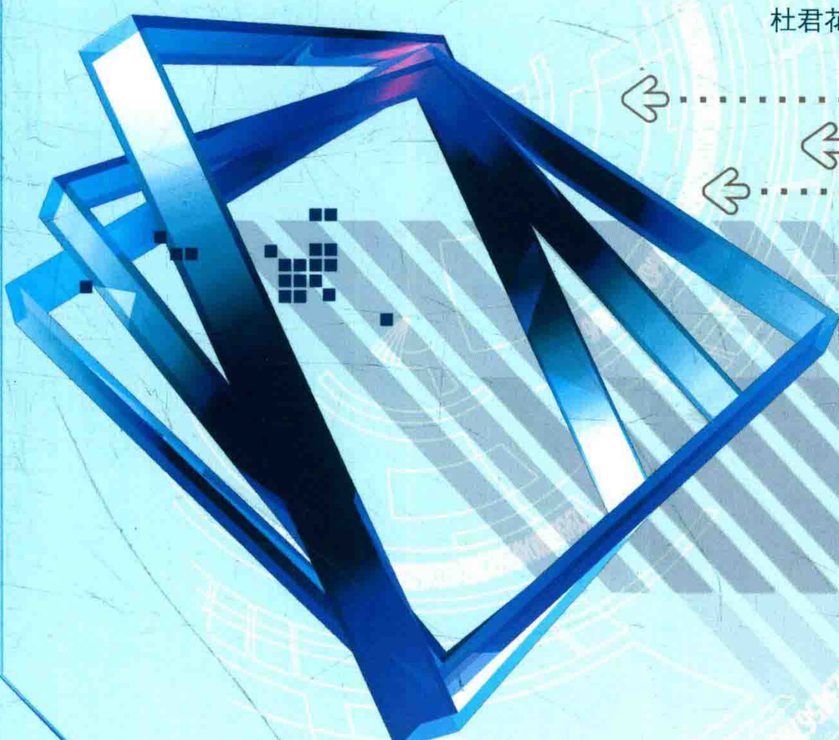
结合环的交换性

JIEHEHUAN DE JIAOHUANXING

杜君花　杨新松　著



HEUP 哈爾濱工程大學出版社

结合环的交换性

杜君花　杨新松　著

哈尔滨工程大学出版社
Harbin Engineering University Press

内容简介

本书研究结合环的交换性，并融理论、方法与应用为一体，形成具有特色的内容体系。在编排上注重理论上的系统性和科学性，并尽量做到简明扼要，深入浅出。

全书共分7章。第1章是绪论，为后文研究奠定基础；第2章重点介绍了环的根理论；第3章研究了若干特殊环的结构特点，主要研究了 Artin 环、Noether 环、商环、局部环、完全环、半完全环、亚直不可约环等环的结构特点；第4章探讨了范德邦定理及其推广；第5章重点研究了满足可变恒等式的环的交换性；第6章深入研究了具有 F_k 性质及相似性质的环的交换性；第7章主要研究了广义周期环及广义半周期环的交换性。作为对主体理论的完善和补充，本书每章最后都配有专题讨论性习题。

本书适合作为各类高等院校数学系研究生的教材或本科生的教学参考书，也可供数学教学工作者和研究人员阅读和参考。

图书在版编目(CIP)数据

结合环的交换性/杜君花，杨新松著. —哈尔滨：哈尔滨工程大学出版社，2017.6
ISBN 978-7-5661-1549-2

Ⅰ. ①结… Ⅱ. ①杜… ②杨… Ⅲ. ①结合环—研究 Ⅳ. ①O153.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第148467号

选题策划 龚　晨
责任编辑 张忠远　周一瞳
封面设计 博鑫设计

出版发行 哈尔滨工程大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区南通大街145号
邮政编码 150001
发行电话 0451-82519328
传　　真 0451-82519699
经　　销 新华书店
印　　刷 北京中石油彩色印刷有限责任公司
开　　本 787 mm×1 092 mm　1/16
印　　张 15.75
字　　数 431 千字
版　　次 2017年6月第1版
印　　次 2017年6月第1次印刷
定　　价 35.00元
http://press.hrbeu.edu.cn
E-mail:heupress@hrbeu.edu.cn

前　　言

环论作为一门重要的代数学科，是代数几何和代数数论的基础，许多其他相关学科领域都涉及环。结合环的交换性理论是环论的一个主要内容。交换性一直是环的重要性质之一。交换环具有许多很好的性质，数学的很多分支都是建立在交换环的基础之上的。证明了一类环是交换的，对这类环就可以得到很多随之而来的一系列理论结果，这不仅仅对于环论，而且对数学的其他分支常常是很必要的。在目前的应用领域，例如信息论和密码编码学等中，交换环的相应理论也得到了一定的应用。因此，对结合环的交换性的研究具有非常重要的意义。

本书是作者多年代数学研究、教学的总结，本书在比较全面地介绍了根理论的主体内容及现代交换性研究的重要成就的基础上，较详细地介绍了结合环的交换性及其在某些环论研究中的应用，介绍了环的交换性研究的最新成果。

本书在编排上注重理论上的系统性和科学性，并尽量做到简明扼要，深入浅出。全书共分 7 章。第 1 章是绪论，为后文研究奠定基础。第 2 章重点介绍了环的根理论，本章主要介绍 Jacobson 根理论、Bear 根理论、Koethe 根理论、Levitzki 根理论、Brown - McCoy 根理论及根的一般理论，研究这几个根的性质，然后对根性进行归纳总结，并对几种根进行比较，讨论所讲各根性的关系。第 3 章研究了若干特殊环，例如 Artin 环、Noether 环、商环和局部环等的结构特点。这是环的结构理论乃至代数表示理论的重要基础。第 4 章深入探讨了范德邦定理并对其进行了推广。第 5 章重点研究了满足可变恒等式的环的交换性。第 6 章深入研究了具有 F_k 性质及相似性质的环的交换性。第 7 章主要研究了广义周期环及广义半周期环的交换性。

作为对主体理论的完善和补充，本书每章最后都配有专题讨论性习题。另外本书末附有参考文献，供有兴趣的读者进一步参考。

本书第 6 章和第 7 章由齐齐哈尔大学杜君花副教授著，第 4 章和第 5 章由哈尔滨理工大学杨新松教授著，第 1 章、第 2 章、第 3 章由杜君花和杨新松分著，杜君花合计共 31 万字，杨新松合计共 12 万字。

本书的很多研究成果受到了黑龙江省省属高等学校基本科研业务费科研项目（项目编

号:135209250)、黑龙江省自然科学基金项目(A200601)、黑龙江省教育厅科学技术研究项目(12511608)及国家科技支撑计划项目(2013BAK12B0803)项目的资助,如第3章、第4章、第5章、第6章、第7章中的若干研究成果等。

本书的撰写工作得到了齐齐哈尔大学和哈尔滨理工大学相关领导的大力支持,特别是齐齐哈尔大学理学院及哈尔滨理工大学理学院的领导对整个工作都给予了极大的鼓励、支持、指导和帮助,在此一并表示深深的感谢。同时,作者也希望借此书的出版,向曾经致力于该研究的并做出杰出贡献的Herstein以及谢邦杰教授等前辈致敬!

由于作者水平有限,尽管竭力而为,但书中还会有许多缺点和不足,恳请专家、同行及读者批评指正。

著　者

2017年1月

目　　录

第1章 绪 论

本章介绍环的直和分解、亚直和分解概念以及质环和半质环的基本性质。对与质环联系密切的幂零性质的讨论本章尽量作最简洁处理。亚直不可约环的应用是近60年的事情，本章只对此作基础性介绍。

1.1 直和与亚直和

设 $R_1,R_2,\cdots,R_n$ 是 n 个环，那么构造

$$R=\{(a_1,a_2,\cdots,a_n)\mid a_i\in R_i\}$$

并在 R 中定义

$$(a_1,a_2,\cdots,a_n)=(b_1,b_2,\cdots,b_n)\Leftrightarrow a_i=b_i,i=1,2,\cdots,n$$

$$(a_1,a_2,\cdots,a_n)+(b_1,b_2,\cdots,b_n)=(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n)$$

$$(a_1,a_2,\cdots,a_n)\cdot(b_1,b_2,\cdots,b_n)=(a_1b_1,a_2b_2,\cdots,a_nb_n)$$

R 由上述定义的运算形成一个以 $(0,0,\cdots,0)$ 为零元的环。称 R 为 $R_1,R_2,\cdots,R_n$ 的**完全直接和**或简称为**直和**。

例如，$Z/(2)=\{0,1\}$，$Z/(3)=\{0,1,2\}$，则它们的直和为 $\{(0,0),(0,1),(0,2),(1,1),(1,2),(1,0)\}$。显然，这个直和与 $Z/(6)$ 是同构的，这也说明环的直和有可能是不唯一的。当然，我们将在后面证明，从同构的角度看直和一定是唯一的。这种唯一性也叫作本质唯一。

上面的定义是就有限个环处理的，实际上，完全可以定义一簇环的完全直接和。

设 $\{R_i\mid i\in I\}$ 是一簇环，I 为指标集。定义 $R=\{(a_i\mid a_i\in R_i)\}$，且 R 中的每个 $(a_i\mid a_i\in R_i)$ 中零的分量 a_i 只有有限个。在 R 中定义

$$(a_i\mid a_i\in R_i)=(b_i\mid b_i\in R_i)\Leftrightarrow a_i=b_i,i\in I$$

$$(a_i\mid a_i\in R_i)+(b_i\mid b_i\in R_i)=(a_i+b_i\mid a_i,b_i\in R_i)$$

$$\sum\oplus(a_i\mid a_i\in R_i)\cdot(b_i\mid b_i\in R_i)=(a_ib_i\mid a_i,b_i\in R_i)$$

则 R 为一个环，称 R 为诸 R_i 的**完全直接和**，简称为**直和**，记作 $R=\bigoplus\limits_{i\in I}R_i$ 或 $R=\sum\limits_{i\in I}R_i$。

这个定义局限在有限个环的情况就是前面的定义。下面看直接和的几个性质。

定理1.1.1 设 R 的真理想 A 是有单位元的环，那么 R 是 A 与 R 的另一理想 B 的直和，即 $R=A\oplus B$，并且 B 由 A 唯一决定。

证明 取 e 为环 A 的单位元，取 $B=\{X\in R\mid ex=xe=0\}$，则 B 为 R 的理想。显然，$R=A\oplus B$。

设 $R=A\oplus C$，C 为 R 的理想，则任取 $c=a+b,a\in A,b\in B$，再由 $A\oplus C=R$，知 $ce=0$，故 $a=ae=ae+be=ce=0$，即 $c=b\in B$，于是，$C\subset B$。同理又有 $B\subset C$。定理证毕。

定理 1.1.2 设 R 是有单位元 1 的环，并且 $R=\bigoplus_{i\in I}^{n}R_i$，其中，$R_i$ 为 R 的子环，$i=1,2,\cdots,n$，则对 R 的任意左理想 L 均有 $L=\bigoplus_{i\in I}^{n}L_i$，其中，$L_i=R_i\cap L$。

证明略。

一个环如果能够表示为若干真子环的直和，则称此环为**可分解环**，否则，就叫作**不可分解环**。显然，单纯环必是不可分解环，无零因子环也一定是不可分解环。

用同调代数中上积的方式，环的直和也可以描述如下。

设 $\{R_i|i\in I\}$ 为一簇环，I 为指数集，R 是一个环，而且满足：

①对每个 R_i 均有环的单同态 σ，将 R_i 嵌入 R 中；

②若环 S 满足"对每个 R_i 均有环的单同态 τ_i，将 R_i 嵌入 S 中"，则必有唯一的环同态 $\pi:R\to S$ 使 $\pi_i\sigma_i=\tau_i$，则称环 R 为 R_i 的完全直接和。

定理 1.1.3 环的直和在同构的意义下是唯一的。

证明 设 R 及 S 均为一簇环 $R_1,R_2,\cdots,R_n$ 的直和，则必有 σ_i 将每个 R_i 嵌入 R 中，同时，有 τ_i 将 R_i 嵌入 S 中，于是有 π_1 使 $\pi_1\sigma_i=\tau_i$ 及 π_2 使 $\pi_2\tau_i=\sigma_i$。任取 R 中元 a，由于 a 的分量中非零元为有限个，故可记 $a=(a_1,a_2,\cdots,a_m)$，其中，$a_m\neq 0$，$a_i\in R_i$，则 $a=\sum_{i=1}^{m}\sigma_i(a_i)$。于是有

$$\begin{aligned}
a &= \sum_{i=1}^{m}\sigma_i(a_i)\\
&= \sum_{i=1}^{m}\pi_2\tau_i(a_i)\\
&= \sum_{i=1}^{m}\pi_2(\tau_i(a_i))\\
&= \pi_2\sum_{i=1}^{m}\tau_i(a_i)\\
&= \pi_2\sum_{i=1}^{m}(\pi_1\sigma_i(a_i))\\
&= \pi_2\pi_1\sum_{i=1}^{m}\sigma_i(a_i)\\
&= \pi_2\pi_1(a)
\end{aligned}$$

即 $\pi_2\pi_1$ 为 R 的恒等变换，同理，$\pi_1\pi_2$ 为 S 的恒等变换。故 R 与 S 同构。定理证毕。

假设 R 是环 $\{R_i|i\in I\}$ 直和的子环，如果对每个 $i\in I$ 均有满同态，$\sigma_i:R\to R_i$ 且对 R 中的非零元 a，必有一个 i 使 $\sigma_i(a)\neq 0$，那么就称 R 是环 $\{R_i|i\in I\}$ 的一个**亚直和**，记作 $R=\prod_{i\in I}R_i$。

例如，取 $R_1=\{0,\varepsilon\}\cong Z(2)$，$R_2=[0,1,2]\cong Z(4)$，$S=\{(0,0),(0,2),(0,3),(\varepsilon,0),(\varepsilon,1),(\varepsilon,2),(\varepsilon,3)\}$ 与 $R=\{(0,0),(\varepsilon,1),(0,2),(\varepsilon,3)\}$ 均是 R_1 与 R_2 的亚直和，而且 S 还是 R_1 与 R_2 的直和。

容易看出，环的直和必是该组环的亚直和，反之却未必，这说明亚直和概念实际是直和概念的推广。它们的区别十分明显，例如，根据上面的例子可以看出：亚直和即便是在同构意义下也并无唯一性。它们的区别还可以从下面的定义方式直观地看出来。

定理 1.1.4 设 R 为 $\{R_i \mid i\in I\}$ 直和的一个子环。若同态 τ_i 为满射，($\tau_i:R\to R_i, i\in I$)，$\tau_i(a)=b\in R_i \Leftrightarrow \sum\sigma_i(b)=a$，其中，$\sigma_i$ 为 R_i 到直和的同构嵌入，则 R 为 R_i 的亚直和，反之亦然。

证明 由 τ_i 为满射，故对 R_i 中每个元 b_i，必有 R 中元 a 使 $\tau_i(a)=b\in R_i$，即存在 R 到 R_i 的满同态 τ_i。今取 R 中非零元 $a=(a_i \mid a_i\in R)$，其中，$a_k\neq 0$，则 $\tau_k(a)=a_k\in R_k$，且 $a_k\neq 0$，故 R 为 R_i 的亚直和。

反过来，取 R_i 的直和 S。定义同态为

$$\sigma:R\to S,\sigma(a)=(\tau_i(a)\ \mid \tau_i(a)\in R_i)$$

则 σ 为 R 到 S 的同态，其像记作 Ω，则可得 $\sigma_i:\Omega\to R_i,\sigma_i\sigma((a))=\tau_i(a)$。易证 σ_i 为满射，且对于任意 $b\in\Omega$，只要 $b\neq 0$，必有 $a\in R$，使 $a\neq 0$，从而必有某个 $\tau_i(a)\neq 0$ 即 $\sigma_i(b)\neq 0$，即 Ω 为 R_i 的亚直和，从而 R 也是 R_i 的亚直和。定理证毕。

把直和的可分解概念相应推广就有了亚直可约的概念。设 R 是一簇环 $\{R_i \mid i\in I\}$ 的一个亚直和，σ_i 为 R 到 R_i 上的满同态。如果同态集 $\{\sigma_i \mid i\in I\}$ 中没有同构，则称 R 是一个**亚直可约环**，否则，就称 R 是一个**亚直不可约环**。

定理 1.1.5 环 R 是亚直可约环的充要条件是 R 中有一组理想 $\{A_i \mid i\in I\}$ 满足 $\bigcap\limits_{i\in I}A_i=0$，$A_i\neq 0, i\in I$。

证明 设 $A_i\neq 0, i\in I$ 且 $\bigcap\limits_{i\in I}A_i=0$，即 τ_i 为 R 到 R/A_i 的自然同态。由 $\bigcap\limits_{i\in I}A_i=0$ 知，当 $a\in R$ 且 $a\neq 0$ 时，至少有一个 i 使 $a\notin A_i$，于是，$\tau_i(a)\neq 0$。再由 τ_i 为满同态知，R 为 R/A_i 的亚直和，若 τ_k 为同构，则 τ_k 的核 A_k 必为零，矛盾。故 R 为亚直可约环。

反之，设 R 为亚直可约环，$R=\prod\limits_{i\in I}R_i$，则有 R 到 R_i 上的满同态 σ_i。记 $\ker\sigma_i=A_i$，则 A_i 必为 R 非零理想（否则，σ_i 中有同构，矛盾），若 $x\in R, x\neq 0$，则由亚直和定义知必有某 σ_k 使 $\sigma_k(x)\neq 0$，即 $x\in A_k$，于是，$\bigcap\limits_{i\in I}A_i=0$。定理证毕。

在证明中可以看出，若 $\bigcap\limits_{i\in I}A_i=0$，则 $R=\overline{\prod\limits_{i\in I}}R/A_i$。这个结论为构造亚直和提供了有力工具。另外，由定理 1.1.5 还可以直接得到这样的结论：R 为亚直不可约环的充要条件是 R 的所有非零理想之交非零。这也就是说，亚直不可约环 R 中必有一个非理想 H，H 包含于 R 的任意非零理想中。此时的 H 叫作**亚直不可约环 R 的心**。

例如，取 $R=Z/(4)=\{0,1,2,3\}$，则 R 只有 3 个理想：$0, I_1=\{0,2\}$ 和 R。故 R 为亚直不可约环，且 $H=\{0,2\}$。

容易看出，单环一定是亚直不可约环，但无零因子环却未必是亚直不可约环。这再次体现了直和与亚直和的差别。下面是亚直不可约环的心的基本性质。

定理 1.1.6 设 R 是亚直不可约环，其心为 H，则 $H^2=0$ 或者 $H^2=H$。

证明 H 为 R 的非零理想，故 H^2 为 R 的理想。若 $H^2\neq 0$，则有

$$H^2\supset H$$

因此，有

$$H\supset H^2\supset H, H^2=H$$

定理证毕。

定理 1.1.7 任意环 R 恒同构于一组亚直不可约环的亚直和。

证明 对 R 的任意非零元 x，必有一理想 $\{0\}=N$ 使 $x\notin N$，即 $T=\{M\mid M$ 为 R 的理想且 $x\notin M\}$，则 T 为部分序集（按集合包含关系）。由 Zorn 引理知 T 中有极大元 A_x，即 R 中有理想 A_x 满足 $x\notin A_x$，且当 R 中有理想 A 使 $A\supset A_x$，$A\neq A_x$ 时必有 $x\in A$。于是，R/A_x 为亚直不可约环，其心为 $(\bar{x})$。

事实上，对 R/A_x 中任意非零理想 $\overline{M}$，必有 R 或与 $\overline{M}$ 对应的理想 M 使 $M\supset A_x$ 且 $M\neq A_x$。于是，由 A_x 极大性知，$x\in M$。再由 $x\notin A_x$ 知在 R/A_x 中 $\bar{x}\in\overline{M}$ 且 $\bar{x}\neq 0$，即 R/A_x 的非零理想之交 H 中必有 $\bar{x}$，从而 $H\supset(\bar{x})$ 但 $(\bar{x})\neq 0$，故 $(\bar{x})\supset H$，即 R/A_x 为心的亚直不可约环。

由于 $\bigcap\limits_{i,x\in R} A_x=\{0\}$，故 $R=\prod R/A_x$ 为一组亚直不可约环的亚直和。定理证毕。

定理 1.1.8 设 R 为交换的亚直不可约环，其心为 H，则 $H^2=0$ 或者 R 为域。

证明 设 $H^2\neq 0$，则由定理 1.1.6 知 $H^2=H$，任取 R 中元 $a\neq 0,b\neq 0$，有 Ha 为 R 的理想，故 $Ha=0$ 或 $Ha=H$。

若 $Ha=0$，则 $H(a)=0$，即 $H^2\subset H(a)=0$，矛盾。

故 $Ha=H$，特别地，取 $h\neq 0,h\in H$ 时，有 $Hh=H$。于是，有 $h_0\in H$ 使 $h_0h=h_0$。任取 $x\in R$，由 $h_0h=h$ 知 $(h_0x-x)h=0$。而由 $H^2=H$ 知"$Hx=0\Leftrightarrow x=0$"，故得 $h_0x=x$，即 H 中有 R 的单位元 h_0，即 $H=R$。于是，R 为单纯环，而交换的无零因子单纯环必为域。定理证毕。

习题 1.1

1. 如果 $n=p^s$，p 为素数，那么 $Z/(n)$ 一定是亚直不可约环吗？
2. Z 可以用几种方式表示为一组环的亚直和？
3. 亚直不可约环是否必为不可分解环，反过来又如何？
4. 试证定理 1.1.2。
5. 试考虑域 F 上的二阶全阵环 $F_{(2)}$ 是否可分解，是否亚直可约？

1.2 质环与半质环

交换代数中，素理想占有重要地位，在一般的环论中，与交换环的素理想对应的就是质理想的概念。在未必交换的情况下，整环将退化为质环。本节介绍质环和质理想。

设 R 为任意环，R 的理想 P 具有如下性质。

(1)"当 A,B 为 R 的理想，且 $AB\subset P$ 时必有 $A\subset P$ 或 $B\subset P$。"那么，理想 P 就叫作 R 的质理想。

例如：取 R 为整数环，则当 p 是素数时主理想 (p) 必是 R 的质理想。取 Ω 为 $\left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\middle| a,b,c,d\in Q\right\}$，则 Ω 的零理想是质理想。而在环 $\left\{\begin{pmatrix}a&b\\0&a\end{pmatrix}\middle| a,b\in Q\right\}$ 中，$\left\{\begin{pmatrix}0&b\\0&0\end{pmatrix}\middle| a,b\in Q\right\}$ 是一个质理想。

(2) 当 $ab\in P$ 时，必有 $a\in P$ 或 $b\in P$。

如果 R 是交换环，那么性质(1)与性质(2)是等价的，其中，性质(2)即为：

事实上，交换环 R 的理想 $A=(a)=\{na+xa\mid x\in R\}$ 与 $B=(b)=\{nb+xb\mid x\in R\}$ 在 $ab\in P$ 时满足 $AB\subset P$。由性质(1)知 $A\subset P$ 或 $B\subset P$，即 $a\in P$ 或 $b\in P$。反之，若 P 为满足性质(2)的

交换环 R 的理想,而 $AB\subset P$,则可假设 $A\not\subset P,B\not\subset P$ 而导致矛盾如下,从而证明性质(1)与性质(2)等价。

由 $A\not\subset P,B\not\subset P$ 知有 $a\in A,b\in B$,使 $a\notin P,b\notin P$,但由 $AB\subset P$ 知 $ab\in P$,再由性质(2)知 $a\in P$ 或 $b\in P$,矛盾。

质理想有很多等价定义,这些等价定义揭示了质理想的基本性质。

定理 1.2.1 假设 P 是环 R 的理想,则如下条件等价:

①P 是质理想;

②假定 $a,b\in R,aRb\subset P$,则 $a\in P$ 或 $b\in P$;

③设 (a) 和 (b) 是 R 的主理想,则当 $(a)(b)\subset P$,必有 $a\in P$ 或 $b\in P$;

④L_1 和 L_2 是 R 的左理想,如果 $L_1L_2\subset P$,那么 $L_1\subset P$ 或 $L_2\subset P$;

⑤K_1 和 K_2 是 R 的右理想,如果 $K_1K_2\subset P$,那么 $L_1\subset P$ 或 $L_2\subset P$。

证明 先从①推导②,假定 $aRb\subset P$,那么,$RaRb\subset P$,因此,$RaRRbR\subset P$,由①知 $RaR\subset P$ 或 $RbR\subset P$,则 $A=(a)$ 满足 $A^3R\subset RaR\subset P$,再由①知 $A\subset P$,即 $a\in P$,②成立。如果 $A\not\subset P$,则 $RbR\subset P$ 仍可证明②成立。

再从②推导③。假如 $(a)(b)\subset P$,则 $aRb\subset(a)(b)\subset P$,故由②知 $a\in P$ 或 $b\in P$,③成立。

再由③推导④。假定 $L_1L_2\in P$,如果 $L_1\notin P$,设 $a\in L_1$,且 $a\notin P$,并取 b 为 L_2 中任意一元。由于 $(a)(b)\subset L_1L_2R\subset PR\subset P$,由③知 $a\in P$ 或 $b\in P$。而 $a\notin P$,于是有 $b\in P$,即知④成立。同理,由③也推出⑤。

由于理想必是单边理想,故由④和⑤显然可得①。定理证毕。

定理 1.2.2 环 R 的理想 P 是质理想的充分必要条件是零理想是 R/P 的质理想。

证明 记 $R/P=R$,R 中元 a 在 $\overline{R}$ 中像为 $\overline{a}$。

若 P 为 R 的质理想,则在 $\overline{R}$ 中,当 $\overline{a}\,\overline{R}\,\overline{b}=0$ 时,必有 $aR\subset P$,于是,$a\in P$ 或 $b\in P$,即在 $\overline{R}$ 中有 $\overline{a}=0$ 或 $\overline{b}=0$,可见,$\overline{0}$ 是 $\overline{R}$ 的质理想。

反过来,$\overline{0}$ 是 $\overline{R}$ 的质理想时,由 $aRb\subset P$,可知 $\overline{a}\,\overline{R}\,\overline{b}=0$。由 $\overline{0}$ 为质理想知 $\overline{a}=0$ 或 $\overline{b}=0$,即 $a\in P$ 或 $b\in P$,故 P 为 R 的质理想。定理证毕。

定理 1.2.3 设 N 是环 R 的理想,P 是 R 的质理想,那么 $N\cap P$ 是 N 的质理想。

证明 设 $M=N\cap P,a_1,a_2\in N,a_1Na_2\subset M$,那么,有

$$a_1Ra_2Ra_2\subset a_1Na_2\subset P$$

由 P 是质理想知 $a_1R\subset P$ 或 $a_2R\subset P$。如果 $a_1R\subset P$,那么 $a_1Ra_1\subset P$,故 $a_1\subset P$。

同样,如果 $a_2R\subset P$,则 $a_2\in P$。于是,$a_1\subset N\cap P$ 或 $a_2\subset N\cap P$,即 $M=N\cap P$ 为 N 的质理想。

称 R 为质环是指零理想是环 R 的质理想。根据这个定义,结合定理 1.2.1 可以得到 R 为质环的如下 5 个充要条件:

①A 和 B 为 R 的理想,$AB=0$,则 $A=0$ 或 $B=0$;

②$a\in R,b\in R,aRb=0$,则 $a=0$ 或 $b=0$;

③L_1 和 L_2 为 R 的左理想 $L_1L_2=0$,则 $L_1=0$ 或 $L_2=0$;

④K_1 和 K_2 为 R 的右理想,$K_1K_2=0$,则 $K_1=0$ 或 $K_2=0$;

⑤(a) 和 (b) 为 R 的主理想,则 $(a)(b)=0$ 时有 $(a)=0$ 或 $(b)=0$。

定理 1.2.2 和定理 1.2.3 也相应地描述为：P 为 R 的质理想的充要条件是 R/P 为质环。R/P 为质环时 $N/(N\cap P)$ 也为质环。由定理 1.2.3 还可断言质环的理想为质环。此外，根据质环的定义不难看出质环是不可分解环，而由整数环为质环可以发现，质环未必是亚直不可约环。

容易验证，无零因子环一定是质环，但质环却未必无零因子。

$R=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a,b,c,d\in Q\right\}$，则 R 为质环，但 R 中有零因子。

R 是质环的证明可见定理 1.2.4。

定理 1.2.4 环 R 为质环当且仅当 R 上的 n 阶全阵环 R_n 为质环。

证明 若 R 不是质环，则 R 中有 a,b 使 $aRb=0$ 且 $a\neq 0,b\neq 0$，取 R_n 中元 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，则由 $a\neq 0,b\neq 0$，知 $\boldsymbol{A}\neq 0,\boldsymbol{B}\neq 0$，但 $\boldsymbol{A}R_n\boldsymbol{B}=0$，故 R_n 不是质环。

反之，设 R_n 不是质环，则有非零矩阵 (a_{ij}) 和 (b_{ij}) 使得 $(a_{ij})R_n(b_{ij})=0$，不妨设 (a_{ij}) 中 $a_{pq}\neq 0$，(b_{ij}) 中 $b_{rs}\neq 0$。取 $C=cE_{qr}$ 表示第 q 行第 r 列为 c 而其余位置为 0 的矩阵。直接计算得

$$(a_{ij})C(b_{ij})=\begin{pmatrix} a_{1q}cb_{r1} & \cdots & a_{1q}cb_{rs} & \cdots & a_{1q}cb_{rn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{pq}cb_{r1} & \cdots & a_{pq}cb_{rs} & \cdots & a_{pq}cb_{rn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nq}cb_{r1} & \cdots & a_{nq}cb_{rs} & \cdots & a_{nq}cb_{rn} \end{pmatrix}$$

由于 $(a_{ij})C(b_{ij})\subset(a_{ij})R(b_{ij})=0$，故 $a_{pq}cb_{rs}=0$。由 c 的任意性知 $a_{pq}Rb_{rs}=0$，$a_{pq}\neq 0$，$b_{rs}\neq 0$，即 R 不是质环。

与质理想、质环类似的一种结构就是半质理想、半质环。

设 R 是任意环，Q 为 R 的理想，若 Q 满足性质“对 R 的任意理想 A，由 $A^2\subset Q$ 可得 $A\subset Q$”，则称 Q 是 R 的半质理想。从这个定义可以看出，质理想必然是半质理想；反之，则未必成立。同时，很容易验证，有限个半质理想的交仍然是半质理想。

半质理想的等价定义或者理解成性质的描述也有许多。

定理 1.2.5 设 Q 是环 R 的半质理想，那么下列各条件等价：

①Q 是半质理想；

②假定 $a\in R$，$aRa\subset Q$，那么 $a\in Q$；

③假定 (a) 是 R 的主理想，$(a)^2\subset Q$，那么 $a\in Q$；

④L 为 R 的左理想，$L^2\subset Q$，那么 $L\subset Q$ ；

⑤K 是 P 的右理想，$K^2\subset Q$，那么 $K\subset Q$；

定理证明与定理 1.2.1 类似，从略。

称 R 为半质环是指零理想为环 R 的半质理想。根据这个定义可以看出，质环一定是半质环。以下理论体现了半质环与质环比较相似的性质。

定理 1.2.6 Q 是环 R 的半质理想的充要条件是 R/Q 是半质环。

证明 设 Q 是环 R 的半质理想，$\overline{A}$ 是 $\overline{R}=R/Q$ 的理想。如果 $\overline{A}^2=0$，则取 $\overline{A}$ 在 R 中的完

全原像 A 必有 $A^2 \subset Q$，于是，$A \subset Q$，即在 $\overline{R}$ 中 $\overline{A}=0$，所以 $\overline{R}=R/Q$ 是半质环。再假设 $\overline{0}$ 是 $\overline{R}$ 的半质理想，则易证 Q 是 R 的半质理想。定理证毕。

质环和半质环还有许多相似或严格区分的性质，这些性质将在后面，特别是在 Baer 根理论之后逐渐展开讨论。

习题 1.2

1. 试给出定理 1.2.5 的证明。
2. 若 R 为半质环，$a \in R$ 且 aR 或 Ra 为零，那么 a 是否一定是 0？
3. 题 2 的逆命题是否成立？
4. 已知 $R_1, R_2, \cdots, R_n$ 均为质环，则 $R_1, R_2, \cdots, R$ 的直和是否仍为质环？若将质环换作半质环后，结果又会如何？若再将直和环成亚直和呢？
5. 试求出在质环中心的全部（非零）零因子。

1.3　幂等元与零化子

前面两节分别讨论了质环与亚直和分解概念。本节将二者结合，用另一种视角看待质环。当然，这离不开一些基本概念的引入。下面就介绍这些概念。

设 R 是一个环，a 是 R 中元素，且 $a^2=a$，则 a 叫作 R 的**幂等元**（或叫作**等方元**）。根据定义可以看出，在有单位元的环中，单位元一定是幂等元，反之却未必。因为在矩阵环中有许多幂等元不是单位元。幂等的概念也可用于理想、左理想。如果理想 A 满足 $A^2=A$，则称 A 是**幂等理想**。幂等左理想、右理想的概念类似。根据这个定义容易看出，亚直不可约质环的心一定是非零幂等理想。

定理 1.3.1　若环 R 中有异于单位元的中心幂等元，那么 $R=N\oplus M$，其中，N,M 均为 R 的理想，而 N 以指定的幂等元为单位元。

证明　设 e 为 R 异于单元的中心幂等元，则 R 中满足 $ex=x$ 的元素 x 形成 R 的理想 $N=\{e \mid ex=x\}$。显然，N 以 e 为单位元。由定理 1.1.1 知必有 M 使 $R=N\oplus M$。定理证毕。

上述定理中要求是中心幂等元，如果换成幂等元会怎样（见习题 1.1）？

定理 1.3.2　设 e 是环 R 的非零因子幂等元，则 R 是质环的充要条件为 eRe 是质环。

证明　假定 R 是质环，eae 和 ebe 是 eRe 中非幂等元。由 R 是质环，故有 $t\neq0$ 使 $eaetebe\neq0$，即 $eae\cdot ete\cdot ebe\neq0$，所以 eRe 是质环。

假定 eRe 是质环，a 和 b 是环 R 的非零元。由于 e 不是零因子，所以 $eae\neq0$，$ebe\neq0$。由 eRe 是质环知有 $t\in R$ 使 $eae\cdot ete\cdot ebe\neq0$。由 e 非零因子知 $a\cdot ete\cdot b\neq0$，因此，R 是质环。定理证毕。

定理 1.3.3　具有幂等心的亚直不可约环为质环。

证明　设亚直不可约环 R 具有幂等心 H，$H^2=H$。取 R 中元 a 和 b。如果 $aRb=0$，则 $(a)(b)=0$。设 $(a)\neq0$，则有 $(a)\supset H$，若同时有 $(b)\neq0$，则 $(b)\supset H$。于是，$H=H^2\subset(a)(b)=0$，矛盾。因此，(a) 或 (b) 为零，即 $a=0$ 或 $b=0$，R 是质环。定理证毕。

下面我们从另一个角度重新审视质环。我们引入记号 $C_k(S)$ 表示集合 S 在集合 R 中的补集，并在不至混淆时记作 $C(S)$，则有如下定理。

定理 1.3.4　环 R 理想 P 是质理想的充要条件是：如果 $a,b\in C(P)$，那么 R 中有元 x 使 $axb\in C(P)$。

证明　假定 P 是质理想，$a,b\in C(P)$，由定理 1.2.1 知 $aRb\subset C(P)$，即有 R 中元 x 使 $axb\in C(P)$。

反过来，假设 $a,b\in C(P)$ 时必有 $x\in R$ 使 $axb\in C(P)$，那么 $aRb\subset CP$ 时必有 $a\in P$ 或 $b\in P$，否则，$aRb\subset C(P)$，即 P 为质理想。定理证毕。

假定 M 是环 R 中元的集合，如果 $a,b\in M$ 时必有 R 中元 x 使 $axb\in M$，那么 M 叫作 R 的 m – 系。R 的子集对 R 的乘法封闭时叫作 R 的**乘集**。乘集是 m – 系的**特例**。显然，环 R 的理想 P 是质理想的充要条件是 $C(P)$ 为 m – 系。

与 m – 系类似，可定义为 n – 系。假定 N 是环 R 的子集，如果对 N 中任意元 a，有 R 中元 x 使 $axa\in N$，那么 N 叫作 R 的 n – 系。显然，m – 系也是 n – 系。而环 R 的理想 Q 是半质理想的充要条件是 $C(Q)$ 是 n – 系。利用 n – 系还可以证明如下定理。

定理 1.3.5　设 N 是环 R 的理想，Q 是 R 的半质理想并且 $N\supset Q$，$N\neq Q$，那么 R 有质理想 $P\supset Q$，$P\not\subset N$。

证明　假定 $a_0\in N$，$a_0\notin Q$，如果 R 中元 x 使 $a_1=a_0x_0a_0\notin Q$，则又可构造 $a_2=a_1x_1a_1\notin Q$，…。于是，可以得到 n – 系 $\{a_0,a_1,\cdots,a_n,\cdots\}$，其中，$a_i\notin N$，$a_i\notin Q$。由于 Q 是与 n – 系 $\{a_i\}$ 不相交的理想，由 Zorn 引理知 R 中有与 $\{a_i\}$ 不相交的极大理想 P，显然，$P\supset Q$，$P\not\subset N$，因为假如 $a_0Ra_0\subset Q$，那么 $a_0Ra_0\subset Q$，故 $Ra_0\subset Q$，即 $Ra_0\subset Q$，设 $A=(a_0)$，由于 $A^3\subset Ra_0R$，故 $A^3\subset Q$，于是，$A\subset Q$，即 $a_0\in Q$ 与 $a_0\notin Q$ 矛盾。所以上述 n – 系 $\{a_i\}$ 存在，从而理想 $P(P\supset Q,P\not\subset N)$ 存在。

设 B,C 是不在 P 中的理想，则不妨设 $B\supset P$，$C\supset P$，因为总可将 B,C 作成含 P 且不在 P 中的理想。由 $B>P$，$C>P$ 得 $c_i\in C$，$b_j\in B$ 并且 $c_i,b_j\in N$，$c_ib_j\in\{a_i\}$，$\{a_i\}$ 为如上段所示的 n – 系。由 n – 系性质知必有 $a_ix_{ij}a_j=a_k$，其中，a_j,a_k 为 $\{a_i\}$ 中元，而 x_{ij} 依于 a_i,a_j,a_k 的选取，故 BC 中必有 n – 系 $\{a_i\}$ 中元 $aa_k=b_jx_{ji}c_i$，即 $BC\not\subset P$，P 是质理想。定理证毕。

下面的概念和质环关系也十分密切。

设 a 是 R 中元，则 $L_a=\{x\in R\mid xa=0\}$ 是 R 的左理想，L_a 叫作 a 的**左零化子**。类似地，称右理想 $H_a=\{x\in R\mid xa=0\}$ 叫作 a 的**右零化子**。$A_a=\{x\in R\mid xa=ax=0\}$ 称为 a 的**双边零化子**。显然，左理想的左零化子及右理想的右零化子均是理想，叫作**零化子理想**。这些概念和质环的关系表现为下面定理。

定理 1.3.6　环 R 是质环的充要条件是其左理想的左零化子必为 0，右理想的右零化子也为 0。

证明　假定 R 是质环，$L(\neq 0)$ 是 R 的左理想，如果 $xL=0$，那么 $xRL\subset xL=0$，故 $xR=0$ 或 $L=0$，而 $L\neq 0$，故 $xR=0$，从而有 $xRx=0$。于是，$x=0$。所以，左理想的左零化子为 0。

反过来，设左理想的左零化子必为 0，则取 $L_1L_2=0$ 时有 L_1 为 L_2 的零化子的子集，故 $L_1=0$，R 为质环。

对右理想的证明方法类似。定理证毕。

定理 1.3.7　设 L 是环 R 的左理想，L 的左零化子是零，如果 L 是质环，那么 R 也是质环。

证明　假设 a,b 是 R 中任意非零元，如果 $aRb\neq 0$，那么 R 就是质环。

因为 L 的左零化子是零，所以 $aL\neq 0$，$bL\neq 0$，即 L 中有元 α,β 使 $a\alpha\neq 0$，$b\beta\neq 0$。再由 L 是质环知 L 中必有元 t 使得 $atb\beta\neq 0$，因此，$a\alpha tb\neq 0$，即 $aRb\neq 0$。定理证毕。

习题 1.3

1. 定理 1.3.1 中的中心幂等元换成幂等元后结论是否还成立？

2. 试证：亚直不可约环 R 是质环的充要条件是 R 的心是幂等理想。

3. 设 $R=R_1\oplus R_1\oplus R_2\oplus\cdots\oplus R_n$ 是将 R 看成加法群时的直和，而 $R_1,R_2,\cdots,R_n$ 为 R 的左理想（此时 R_i 未必是 R 的理想）。试证：e 是 R 的单位元，那么必有 $e_i\in R_i$ 使 $e_ie_j=\delta_{ij}e_i$，且 $R_i=Re_i$，其中，δ_{ij} 为第一类克氏符号。这样的幂等元叫作正交幂等元。反之，若 R 中有正交幂等元 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 使 $e=e_1+e_2+\cdots+e_n$，则 $R=Re_1\oplus Re_2\oplus\cdots\oplus Re_n$ 是一组左理想的加群直和。

4. 设 L 是有单位元的环 R 的单纯左理想，试证：L 是 R 的直和因子的充要条件是 L 的左（右）零化子不含 L。

5. 左理想的左零化子是否一定是理想？

6. 试证：在质环中，右理想没有非零的右零化子。

7. 设 R 是一个亚直不可约环，并且 R 的心 H 包含在 R 的中心 Z 中。试证：H 的双边零化子理想 A 是一个完全质理想（即 $x,y\in R$，由 $xy\in A$ 必有 $x\in A$ 或 $y\in A$）。

1.4　幂零与诣零性质

在交换代数中，素理想和幂零元密不可分。在一般环论中，质环概念同样和幂零元关系密切。本节就讨论相关的幂零性质。

设 R 是任意一个环。若存在自然数 n 使得 $a^n=0$，则称 R 中元素 a 是一个**诣零元素**或**幂零元素**。使 $a^n=0$ 的最小自然数叫作 a 的**诣零指数**或**幂零指数**。显然，0 是幂零指数为 1 的幂零元，非零幂零元的幂零指数不小于 2，幂零元的若干次幂仍是幂零元，若 a 是幂零元，则 a^m 的幂零指数是不大于 a 的幂零指数。

设 R 是一个环。若环 R 的右（或左）理想 H 中元均为幂零元，则称 H 为 R 的**诣零右（或左）理想或幂零元右（或左）理想**。同样，可以定义诣零理想、诣零子集等概念。

例如，取 $R=Z/(64)$，则 R 中有幂零元 2，8，16 等，R 中有诣零理想 (2)，(12)，(24) 等。

上例中，$(2)^6=0$。像这样，若存在自然数 n 使 $L^n=0$，则称 L 是**幂零的**。因此，可以定义幂零环、幂零理想等概念。值得注意的是，对元素而言，幂零与诣零是一回事，但对于集合（理想等）而言，幂零的必是诣零的，反之却未必。

例如，设 F 是一个域，其特征为 2，A 是 F 上的可数无穷维线性空间，A 的基记为 $\{x_i\}_{i=2}^{\infty}$。规定基的乘法为

$$x_ix_j=\begin{cases}0, & (i,j)\neq 1\\ x_{ij}, & (i,j)=1\end{cases}\quad (i,j=2,3,\cdots)$$

并按照分配律来定义 A 中任意二元素的积，则 A 为一个诣零环。下面证明 A 不是幂零的。

设 $A^m=0$，可取 $P_1,P_2,\cdots,P_m$ 为 m 个两两不同的质数，则在 A 中有 $x_{p_1}x_{p_2}\cdots x_{p_m}=x_{p_1p_2\cdots p_m}\neq 0$，矛盾，即 A 不幂零。

定理 1.4.1　幂零左理想的和是幂零左理想。

证明　设 L_1,L_2 是环 R 的幂零左理想，$L_1^n=0$，$L_2^m=0$，则有

$$(L_1+L_2)^{(m+n-1)} = L_1^{(m+n-1)} + L_2^{(m+n-1)} + \sum \cdots L_1 \cdots L_2 \cdots$$
$$= \sum \cdots L_1 \cdots L_2 \cdots$$

右边每一项 $m+n-1$ 个因子，故其中至少有 m 个 L_1 或 n 个 L_2。

不妨取含 m 个 L_2 的项 $(\cdots L_2)(\cdots L_2)\cdots(\cdots L_2)$，则此种结合后的每个括号均是 L_2 中的集合，而括号数目 $\geqslant m$，因此，此项为 0。

同理，含 n 个 L_1 的项也为零，故有

$$(L_1+L_2)^{(m+n-1)}=0$$

定理证毕。

用类似的方法可以证明：若 L 是环 R 的幂零左理想，则 $LR, LR+L$ 均为 R 的幂零理想。另外，这样的性质对幂零右理想同样成立。

定理 1.4.2 任意环 R 的一切幂零左、右及两边理想的并集 N 是 R 的一个诣零两边理想。

证明 由于幂零左理想 L 必含于幂零理想 $L+LR$，幂零右理想 H 必含于幂零理想 $H+RH$，故不妨设 N 是 R 的所有幂理想的并集。今任取 $a\in N, b\in N$，则必有 R 的幂零理想 A, B 使 $a\in A, b\in B$。由定理 1.4.1 知 $A+B$ 仍是幂零的，故有 $a-b\in A+B\subset N$。

又对任意的 $x\in R, a\in N$，由于 a 必在某幂零理想 A 中，故 $xa\in A$，xa 及 ax 均在 N 中。于是，N 是 R 的理想。再由 N 中元必在幂零理想中知 N 中元必为幂零的，即 N 是指零理想。定理证毕。

注意，N 是诣零的，未必是幂零的。

对诣零左理想，上面的定理 1.4.1 是否成立至今仍未证明。这就是所谓的 Koethe 问题，但对于不是单边的情况可以证明。

定理 1.4.3 环 R 的诣零理想之和是诣零理想。

证明 任意 R 的诣零理想 A, B，则 $A+B$ 认为是 R 的理想，下面证明 $A+B$ 是诣零的。

取 $x\in A+B$，必有 $a\in A, b\in B$ 是 $x=a+b$。由 $a\in A, b\in B$ 及 A, B 诣零知有自然数 m, n 使 $a^m=0, b^n=0$，于是

$$X^m = (a+b)^m = a^m + b_1, b_1 = b^m + \sum \cdots a \cdots b \cdots \in B$$

对 $b_1\in B$ 又有自然数 k 使 $b_1{}^k=0$，于是便知

$$X^{mk}=(a+b)^{m+k}= b_1^k=0$$

定理证毕。

以下关于诣零单边理想及诣零两边理想的结论是谢邦杰先生的成果。如今有些简化的讨论方式，但是本书为了详细方面的考虑没有采纳。

定理 1.4.4 环 R 含有非零的诣零左理想的充要条件是 R 含有非零的右理想。

证明 如果 R 含有非零的诣零左理想 L，则有 $a\in L, a\neq 0$。于是，$H=\{ma+ax \mid m$ 为整数，$x\in R\}$ 是 R 的一个右理想。在 H 中任取两个元素 m_1a+ax 和 m_2a+ay，则其积为

$$(m_1a+ax)(m_2a+ay)=a(m_1am_2+m_1ay+m_2xa+xay)$$
$$= a\omega\in aR$$

即 $H^2\subset aR$。任取 aR 中元 $a\omega, \omega\in R$。由于 $\omega a\in Ra\subset L$，故有自然数 n 使 $(\omega a)^n=0$。于是，$(a\omega)^{n+1}=a(\omega a)^n\omega=0$，即知 aR 是诣零的，从而 H^2 是诣零的，即 H 本身是诣零的，且 $a\in H$，$a\neq 0$。因此，R 中确有非零的诣零右理想 H。同理可证，R 含有非零的诣零右理想 H 时，R