纯粹数学与应用数学专著·典藏版

第17号

偏微分方程的差分方法

郭本瑜 著

科学出版社

纯粹数学与应用数学专著　第 17 号

偏微分方程的差分方法

郭 本 瑜 著

科 学 出 版 社

1 9 8 8

内 容 简 介

本书总结了近二十年来差分方法的主要研究成果，其中包括作者本人许多发表或未发表的成果．本书共分四章：第一章是总论，内容包括建立差分格式的基本方法，线性和非线性格式的稳定性和收敛性，不适定问题和分歧点问题，稳定性的常用判别法等；第二章论述双曲型方程，内容包括解一阶双曲型方程组的各种计算方法，守恒型方程组的弱解与激波，双曲型方程组的初、边值问题的计算等；第三章讨论抛物型方程，包括解线性方程初值问题和初、边值问题的差分方法，非线性抛物型方程和粘性流体力学的差分方法等；第四章介绍椭圆型方程，内容有各种古典差分方法，基于变分原理和其它原理的差分格式，特征值问题和非线性问题．在附录中介绍了解偏微分方程反问题的数值方法．

本书可供数学工作者、高等院校有关专业的师生和工程技术人员参考．

图书在版编目(CIP)数据

纯粹数学与应用数学专著丛书：典藏版/杨乐主编. —北京：科学出版社，2018.1
ISBN 978-7-03-055754-4

Ⅰ. ①纯… Ⅱ. ①杨… Ⅲ. ①数学 Ⅳ. ①O1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017) 第 298639 号

责任编辑：林 鹏 张鸿林／责任校对：李静科
责任印制：张 伟／封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京东华虎彩印刷有限公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
1988 年 2 月第 一 版 开本：720 × 1000 1/16
2018 年 1 月 印 刷 印张：54
字数：714 000

序　言

近二十年来，偏微分方程差分方法的理论有了重要的进展，要在一本书中全面地叙述这样丰硕的成果，当然是不可能的．本书的宗旨在于扼要地综述其中一些较重要的成果．

本书选材的基本出发点是以下三个：首先，尽可能地把差分格式的基本理论，作一个简要而又较严谨的介绍，其中包括一些熟知的关于线性问题的理论，也包括近年来的新理论，例如非线性稳定性，不适定问题和分歧点计算等；第二，除了介绍构造差分格式的古典技巧以外，还叙述了许多新的方法，例如守恒型双曲型方程组的随机选取法，抛物型方程的二次守恒法和计算椭圆型方程的各种方法；第三，试图对差分方法的各个领域的主要成果，加以系统地论述，其中包括各种类型的方程及其定解问题，古典解、广义解和弱解的计算以及不定边界问题等等．

本书是在作者于1965年所编写的同名讲义的基础上，补充近二十年来的新成果而改写的．然而，这些丰硕的新成果，已使原讲义面目全非．本书的主要内容已在计算数学专业研究生班上讲授过．我个人觉得，本书也可供有关专业的教师、计算数学研究工作者和工程技术人员参考．

由于本人水平有限，在书中难免有不少漏误之处，希望读者批评指正．

作者

1985年11月4日，上海

目　　录

第一章　总　　论

许多物理运动或其它运动过程可以用一个偏微分方程的定解问题来描述，例如无限长细弦的自由振动问题可归结成二阶双曲型方程的初值问题，而弦对平衡位置的偏移就是方程的解。但是绝大多数偏微分方程定解问题的解不能用明显的公式来表达，有时即使可用公式表示，也往往过于复杂，所以需要用各种近似方法来计算它的解。

差分方法是解偏微分方程定解问题的常用近似方法之一。Courant, Friedrichs, Lewy(1928) 首次对偏微分方程的差分方法作了完整的论述。第二次世界大战以来，快速电子计算机的诞生和发展为差分方法提供了强有力的工具，从而促使这一学科迅速地发展起来。

一般说来，从偏微分方程定解问题的原始形成到得到合理的数值结果，大致有五个环节：

第一，物理处理。例如根据各种物理定律建立起各种物理量之间的关系式，其中包括正确地提出各种定解条件。

第二，数学提法。通常对上面建立的各种关系式进行极限处理，从而表达为一个偏微分方程的定解问题。

第三，离散逼近。采用各种方法把偏微分方程的定解问题离散化。

第四，解算方法。主要是用直接法或迭代法求解由离散逼近所导致的线性或非线性的代数方程组。

第五，上机计算。把解算方法编成程序并用电子计算机计算，最后分析计算结果。

以上五个环节是密切联系的。一个实际问题的完善解决，常常要在这五个环节之间往复多次。

偏微分方程的差分方法主要是讨论第三个环节．本章将简要地介绍这方面的基本理论和方法．

§1 差分格式的构造

差分方法的首要问题是构造合理的差分格式，使得它的解保持原问题解的某些主要性质，并且又相当精确．本节介绍一些最基本的方法．

1.1 古典差分格式

考虑下列 Hopf 方程的初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial t} + U\dfrac{\partial U}{\partial x} = 0, & -\infty < x < \infty,\ 0 < t \leqslant T \\ U(x,0) = U_0(x), & -\infty < x < \infty, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $U_0(x)$ 是具有紧致支集的已知函数，并假定 (1.1) 具有唯一的古典解．

用 h 和 τ 分别表示变量 x 和 t 的网格步长，$r=\dfrac{\tau}{h}$ 是正常数．记

$$\mathscr{R}_h = \{x \mid x = jh,\ j \text{ 是整数}\}.$$

$u(x,t)$ 表示 $U(x,t)$ 的近似值，$u^k(x) = u(x, k\tau)$，其中 $x \in \mathscr{R}_h, k \geqslant 0$．又采用下列差商记号

$$u_x^k(x) = \frac{1}{h}(u^k(x+h) - u^k(x)),$$

$$u_{\bar{x}}^k(x) = \frac{1}{h}(u^k(x) - u^k(x-h)),$$

$$u_{\hat{x}}^k(x) = \frac{1}{2}(u_x^k(x) + u_{\bar{x}}^k(x)),$$

$$u_t^k(x) = \frac{1}{\tau}(u^{k+1}(x) - u^k(x)),\ \text{等等．}$$

构造差分格式的最简单方法是用差商直接逼近相应的导数．

由于可以用不同的差商逼近同一个导数，因此能够用不同的差分格式来逼近同一个偏微分方程的定解问题。例如

$$\begin{cases} u_t^k(x) + u^k(x) u_x^k(x) = 0, & x \in \mathscr{R}_h, \ k \geqslant 0, \\ u^0(x) = U_0(x), x \in \mathscr{R}_h. \end{cases} \tag{1.2}$$

$$\begin{cases} u_t^k(x) + u^k(x) u_{\bar{x}}^k(x) = 0, & x \in \mathscr{R}_h, \ k \geqslant 0, \\ u^0(x) = U_0(x), & x \in \mathscr{R}_h \end{cases} \tag{1.3}$$

和

$$\begin{cases} u_t^k(x) + u^k(x) u_{\mathring{x}}^k(x) = 0, & x \in \mathscr{R}_h, \ k \geqslant 0, \\ u^0(x) = U_0(x), & x \in \mathscr{R}_h. \end{cases} \tag{1.4}$$

如果 $\dfrac{\partial^2 U}{\partial t^2}$ 和 $\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ 是连续的，那末(1.2)—(1.4)的逼近误差都是 $O(\tau + h)$。如果 $\dfrac{\partial^3 U}{\partial x^3}$ 也连续，那末(1.4)的逼近误差是 $O(\tau + h^2)$。显然，逼近精度不仅与所选择的格式有关，还与 U 的光滑程度有关。

若 U 充分光滑，则可应用各种方法提高格式的精度。最简单的方法是用高阶差商来逼近相应的导数，例如当 $k \geqslant 1$ 时，可用下式来计算 $u^k(x)$，

$$u_{\mathring{t}}^k(x) + \frac{4}{3} u_{\mathring{x}}^k(x) - \frac{1}{3} u_{\mathring{\mathring{x}}}^k(x) = 0, \tag{1.5}$$

其中

$$u_{\mathring{\mathring{x}}}^k(x) = \frac{1}{4h} \left(u^k(x + 2h) - u^k(x - 2h) \right).$$

上式的逼近误差是 $O(\tau^2 + h^4)$，但是增加了格式的层数和网格点数。

Collatz(1960) 采用 Hermite 方法来提高格式的精度。它的基本思想是在差分格式中保持函数的导数的近似值，从而在不增加网格点的情况下提高格式的精度。对于问题(1.1)来说，令 $V = \dfrac{\partial U}{\partial x}$，并将它改写成

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial U}{\partial t} + UV = 0, & -\infty < x < \infty,\ 0 < t \leqslant T, \\
V = \dfrac{\partial U}{\partial x}, & -\infty < x < \infty,\ 0 < t \leqslant T, \\
U(x,0) = U_0(x), & -\infty < x < \infty.
\end{cases}
$$

不难验证

$$
V^k(x+h) + 4V^k(x) + V^k(x-h) = 6U^k_{\mathring{x}}(x) + O(h^4), \tag{1.6}
$$

所以得到下列差分格式

$$
\begin{cases}
u^k_t(x) + u^k(x)v^k(x) = 0, & x \in \mathscr{R}_h, k \geqslant 0, \\
v^k(x+h) + 4v^k(x) + v^k(x-h) = 6u^k_{\mathring{x}}(x), & x \in \mathscr{R}_h, k \geqslant 0, \\
u^0(x) = U_0(x), & x \in \mathscr{R}_h, \\
v^0(x) = \dfrac{dU_0(x)}{dx}, & x \in \mathscr{R}_h.
\end{cases} \tag{1.7}
$$

格式 (1.7) 的逼近误差是 $O(\tau + h^4)$.

Orszag, Irraeli(1974) 用 Kreiss 方法来提高格式精度. 它的基本思想是用

$$
\frac{u^k_{\mathring{x}}(x)}{1 + \dfrac{h^2}{6} u^k_{x\bar{x}}(x)} \tag{1.8}
$$

来逼近 $\dfrac{\partial U^k}{\partial x}(x)$, 从而得到下列格式

$$
\begin{cases}
u^k_t(x) + \dfrac{h^2}{6} u^k_{tx\bar{x}}(x) + u^k(x)u^k_{\mathring{x}}(x) = 0, & x \in \mathscr{R}_h,\ k \geqslant 0, \\
u^0(x) = U_0(x), & x \in \mathscr{R}_h.
\end{cases} \tag{1.9}
$$

这个格式是隐式的. 不难验证它的逼近误差是 $O(\tau + h^4)$.

1.2 基于各种物理定律的差分格式

逼近精度高的差分格式不一定给出好的近似解, 因为一个合理的格式还必须保持原问题的某些物理性质, 所以人们常常从物理定律出发构造差分格式.

考虑 Hopf 方程的周期解问题：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial U}{\partial t}+U\dfrac{\partial U}{\partial x}=0,\ -\infty<x<\infty,\ 0<t\leqslant T,\\ U(x,0)=U_0(x),\ -\infty<x<\infty,\end{cases}\tag{1.10}$$

其中 $U(x,t)=U(x+1,t)$，并假定它有唯一的古典解. 显然，它的解满足下列一次守恒律

$$\int_0^1 U(x,t)dx=\int_0^1 U_0(x)dx.\tag{1.11}$$

如果把 (1.10) 在矩形 $\{(x,t)|(j-1)h\leqslant x\leqslant(j+1)h,\ k\tau\leqslant t\leqslant(k+1)\tau\}$ 内积分，则得到

$$\begin{aligned}\overline{U}^{k+1}-\overline{U}^{k}+\frac{1}{2}\int_{k\tau}^{(k+1)\tau}&[U^2(jh+h,t)\\ &-U^2(jh-h,t)]dt=0,\end{aligned}\tag{1.12}$$

其中

$$\overline{U}^{k}=\int_{(j-1)h}^{(j+1)h}U(x,k\tau)dx.$$

若采用下列近似积分公式

$$\overline{U}^{k+1}\approx 2hu^{k+1}(jh),$$

$$\overline{U}^{k}\approx h(u^k(jh-h)+u^k(jh+h)),$$

$$\int_{k\tau}^{(k+1)\tau}U^2(jh-h,t)dt=\tau(u^k(jh-h))^2,$$

$$\int_{k\tau}^{(k+1)\tau}U^2(jh+h,t)dt=\tau(u^k(jh+h))^2,$$

那末，代入 (1.12) 后就得到下列 Lax(1954) 型差分格式

$$\begin{cases}u^{k+1}(x)-\dfrac{u^k(x+h)+u^k(x-h)}{2}\\ \qquad+\dfrac{r}{4}[(u^k(x+h))^2-(u^k(x-h))^2]=0,\ x\in\mathscr{I}_h,\ k\geqslant 0,\\ u^k(x)=u^k(x+1), \qquad x\in\mathscr{I}_h,\ k\geqslant 0,\\ u^0(x)=U_0(x), \qquad x\in\mathscr{I}_h,\end{cases}\tag{1.13}$$

其中 $\mathscr{I}_h=\{x/x=jh,\ 1\leqslant j\leqslant J-1\}$，$Jh=1+h$，$J$ 是正整数. 不难证明

$$h\sum_{x\in\mathscr{I}_h}u^k(x)=h\sum_{x\in\mathscr{I}_h}u^0(x). \tag{1.14}$$

由于它合理地模拟了 (1.11)，所以可以得到较好的数值结果.

一般说来，偏微分方程定解问题满足多个甚至无限个守恒律，所以基于不同的守恒律可以获得不同的格式. 事实上，(1.10) 的解还满足二次守恒律

$$\int_0^1 U^2(x,t)dx=\int_0^1 U_0^2(x)dx. \tag{1.15}$$

为了模拟它，郭本瑜 (1965a) 引入了下列差分算子

$$J(v,w)=\frac{1}{3}wv_{\hat{x}}+\frac{1}{3}(wv)_{\hat{x}}.$$

若 $v(x)$, $w(x)$ 和 $\varphi(x)$ 以 1 为周期，则由 Abel 公式得到

$$h\sum_{x\in\mathscr{I}_h}J(v(x),\varphi(x))w(x)+h\sum_{x\in\mathscr{I}_h}J(w(x),\varphi(x))v(x)=0. \tag{1.16}$$

特别有

$$h\sum_{x\in\mathscr{I}_h}J(v(x),\varphi(x))v(x)=0.$$

计算 (1.10) 的差分格式是

$$\begin{cases}u_t^k(x)+\dfrac{1}{4}J(u^k(x)+u^{k+1}(x),u^k(x)+u^{k+1}(x))=0, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x\in\mathscr{I}_h, k\geqslant 0,\\ u^k(x)=u^k(x+1), \qquad\qquad x\in\mathscr{I}_h,\ k\geqslant 0,\\ u^0(x)=U_0(x), \qquad\qquad x\in\mathscr{I}_h.\end{cases} \tag{1.17}$$

因为

$$J(v(x),v(x))=\frac{1}{2}(v(x)v(x))_{\hat{x}}-\frac{h^2}{12}(v_x(x)v_x(x))_{\bar{x}}, \tag{1.18}$$

所以 (1.17) 的解满足 (1.14). 又若用 $u^k(x)+u^{k+1}(x)$ 乘 (1.17)，并对一切 $x\in\mathscr{I}_h$ 求和，则由 (1.16) 得到

$$h\sum_{x\in\mathscr{I}_h}(u^k(x))^2=h\sum_{x\in\mathscr{I}_h}(u^0(x))^2. \tag{1.19}$$

由于上式同时合理地模拟了 (1.15)，所以可以得到较好的数值结

果.

(1.10) 的解还满足传输律. 即沿着特征线

$$\frac{dx}{dt} = U(x, t),$$

满足

$$\frac{dU}{dt} = 0. \tag{1.20}$$

假定 $u^k(x)$ 是已知的. 过点 $(jh, (k+1)\tau)$ 作近似特征线:

$$x - jh = u^k(jh)(t - (k+1)\tau).$$

如果 $r \leqslant \frac{1}{|u^k(jh)|}$, 那末它与直线 $t = k\tau$ 相交于点 $\bar{x} = jh - \tau u^k(jh) \in [(j-1)h, (j+1)h]$,从而模拟 (1.20) 得到

$$u^{k+1}(jh) = u^k(\bar{x}). \tag{1.21}$$

但 $\bar{x}$ 不是网格点,必须用内插法计算 $u^k(\bar{x})$. 若 $u^k(jh) \geqslant 0$,则 $\bar{x} \in [(j-1)h, jh]$, 所以可令

$$\begin{aligned} u^{k+1}(jh) = u^k(\bar{x}) = r u^k(jh) u^k(jh-h) \\ + (1 - r u^k(jh)) u^k(jh). \end{aligned} \tag{1.22}$$

若 $u^k(jh) \leqslant 0$,则有

$$\begin{aligned} u^{k+1}(jh) = -r u^k(jh) u^k(jh+h) \\ + (1 + r u^k(jh)) u^k(jh). \end{aligned} \tag{1.23}$$

这就是特征型格式.

1.3 基于变分原理的差分格式

建立差分格式的另一个重要途径是利用变分原理, 它是由 Courant(1943), Argyris(1954) 和 Turner, Clou h, Martin, Topp (1956) 等人首先采用的.

今考虑下列 Burgers 方程的初,边值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial t} + U \dfrac{\partial U}{\partial x} - \nu \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0, \ 0 < x < 1, \ 0 \leqslant t \leqslant T, \\ U(0,t) = U(1,t) = 0, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \\ U(x,0) = U_0(x), \qquad 0 < x < 1, \end{cases} \tag{1.24}$$