



Fuzzy Information Processing:
Theory and Application

模糊信息处理 理论与应用

谢维信 裴继红 李良群 著



科学出版社

国家科学技术学术著作出版基金资助出版

模糊信息处理理论与应用

谢维信 裴继红 李良群 著

科学出版社

北 京

内 容 简 介

模糊信息处理是智能信息处理的重要方向。本书是关于模糊信息处理理论与应用的一部专著。全书共 12 章,系统地阐述模糊集合、模糊关系、模糊逻辑、语言变量和模糊不确定性等模糊集合与模糊系统的基础理论,对模糊信息处理在模糊聚类、模糊神经网络、模糊识别技术、模糊图像分割以及目标跟踪的模糊信息方法等方面的理论和应用进行深入分析,给出相应的技术与方法。

本书可供智能信息处理、模糊信息处理、模式识别、信息融合、目标跟踪等领域的科技工作者阅读与参考,也可作为相关专业研究生的教材或教学资料。

图书在版编目(CIP)数据

模糊信息处理理论与应用 / 谢维信, 裴继红, 李良群著. — 北京: 科学出版社, 2018.8

ISBN 978-7-03-057577-7

I. ①模… II. ①谢… ②裴… ③李… III. ①模糊信息—信息处理
IV. ①TP391

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 112519 号

责任编辑: 任 静 / 责任校对: 郭瑞芝
责任印制: 师艳茹 / 封面设计: 迷底书装

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

三河市骏志印刷有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2018 年 8 月第 一 版 开本: 787×1092 1/16

2018 年 8 月第一次印刷 印张: 28 1/2 插页: 2

字数: 675 000

定价: 168.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前 言

要建立智能系统,必须解决人类知识中的不确定性问题。随着对不确定性问题研究的深入开展,人们理解到用概率论和统计学来讨论随机性并非是研究不确定性的唯一形式。模糊性也是一种不确定性,这种不确定性是用模糊集合的概念来表示的。从 1965 年 L. A. Zadeh 提出模糊集的基本概念以来,模糊集理论已经获得了长足的发展。在信息处理中经常需要学习模拟人类智能中处理模糊不确定性的能力。模糊信息处理理论也因此而发展,并已获得了广泛的应用。本书作者及其团队从 20 世纪 80 年代开始就致力于模糊信息的研究和教学工作,本书对我们三十多年的研究成果进行了整理和总结。

本书第 1~3 章给出模糊集合、模糊关系和模糊逻辑的基本内容,为了便于读者学习,对学习本书必备的集合论的基本知识进行回顾。第 4 章讲述语言变量和模糊算法。第 5 章集中讨论模糊不确定性和模糊信息。第 6 章和第 7 章分别论述模糊聚类 and 模糊聚类的有效性。第 8 章研究模糊神经网络,其间论述模糊系统和神经网络之间的等价性。第 9 章讨论模糊识别技术,在其中作为范例介绍了舰船目标和手绘图形的模糊识别方法。第 10 章讨论图像分割的模糊信息处理技术。第 11 章、第 12 章分别研究基于模糊信息处理的雷达目标跟踪和视频多目标跟踪。

曾经在西安电子科技大学信号与信息处理专业工作和攻读博士学位的博士刘健庄、李文化、钱运涛、范九伦、魏立梅、高新波、李昌华、龚忻等,结合科研工作和博士学位论文对模糊信息处理理论与应用进行了深入的研究,他们所取得的有关成果对完成本书做出了贡献,在此向他们表示感谢。

本书相关的科研工作得到了多项国家自然科学基金、国家 863 计划、教育部博士点基金、国防预研等科研项目的资助。李德毅院士、陆建华院士和何友院士对本书的工作给予了指导和支持,在此表示衷心的感谢。本书的出版获得了国家科学技术学术著作出版基金的资助,特在此一并致谢。

谢维信

2018 年 3 月

目 录

前言

第 1 章 模糊集合	1
1.1 普通集合	1
1.1.1 集合的概念	1
1.1.2 空集、全集、子集和幂集	1
1.1.3 集合的运算及其性质	2
1.1.4 特征函数	4
1.2 模糊集合的基本概念和运算	5
1.2.1 模糊集合的概念	5
1.2.2 模糊集合的运算及其性质	8
1.2.3 模糊集合运算的其他定义	12
1.3 模糊集合与普通集合之间的关系	13
1.3.1 α 截集	13
1.3.2 分解定理	14
1.3.3 模糊集合的核	15
1.4 凸模糊集与模糊数	15
1.4.1 凸模糊集	15
1.4.2 模糊数	16
1.4.3 凸模糊集的四标准隶属度函数	19
1.5 小结	21
参考文献	21
第 2 章 模糊关系	22
2.1 关系的基本知识	22
2.1.1 集合的笛卡儿乘积	22
2.1.2 关系	22
2.1.3 映射	23
2.2 模糊关系的基本原理	23
2.2.1 模糊关系的概念	23
2.2.2 模糊关系的模糊矩阵表示	24
2.2.3 模糊关系的投影	24
2.2.4 模糊关系的运算	25
2.3 模糊关系的合成	27
2.3.1 普通关系的合成	27

2.3.2	模糊关系合成的定义	28
2.3.3	模糊关系合成的性质	29
2.4	模糊关系的自反性、对称性和传递性	30
2.4.1	自反性	30
2.4.2	对称性	30
2.4.3	传递性	31
2.4.4	模糊相似关系和模糊等价关系	31
2.5	扩展原理	34
2.5.1	集合在映射下的象	34
2.5.2	模糊集合在映射下的象	34
2.5.3	扩展原理的一般表达式	35
2.6	模糊综合评判	37
2.6.1	模糊综合评判的基本概念	37
2.6.2	一级模糊综合评判	37
2.6.3	多级模糊综合评判	40
2.7	小结	41
	参考文献	41
第3章	模糊逻辑	42
3.1	模糊逻辑代数的基本知识	42
3.1.1	布尔代数和德·摩根代数	42
3.1.2	模糊逻辑公式	44
3.2	模糊逻辑函数的分解和合成	45
3.2.1	分解问题	46
3.2.2	合成问题	48
3.3	模糊推理	50
3.3.1	模糊命题及蕴含式	50
3.3.2	模糊推理的定义	53
3.3.3	推论的合成规则	54
3.3.4	三种典型的模糊推理方法	55
3.4	小结	63
	参考文献	64
第4章	语言变量和模糊算法	65
4.1	语言变量	65
4.1.1	语言变量的一般概念	65
4.1.2	构成式语言变量	67
4.1.3	合成辞的辞义	67
4.1.4	语言真值	69
4.2	模糊算法	70

4.2.1 概述	70
4.2.2 模糊条件语句	71
4.2.3 模糊算法的指令	72
4.2.4 指令的执行	73
4.2.5 模糊算法的基本类型	73
4.3 小结	78
参考文献	78
第 5 章 模糊不确定性和模糊信息	79
5.1 模糊集的模糊度	79
5.2 模糊相似性度量	80
5.2.1 模糊集之间的距离	81
5.2.2 贴近度	82
5.2.3 模糊相似度	84
5.3 模糊信息量	85
5.3.1 模糊熵	85
5.3.2 模糊信息和香农信息的等效关系	86
5.4 模糊信息处理的塔形结构	88
5.4.1 概述	88
5.4.2 模糊塔形结构	88
5.4.3 模糊塔形的层间熵分布	89
5.4.4 模糊塔形的信息处理	90
5.5 模糊事件的概率	90
5.6 可能性理论	93
5.6.1 可能性	93
5.6.2 可能性测度	94
5.7 小结	95
参考文献	95
第 6 章 模糊聚类	96
6.1 概述	96
6.1.1 聚类和聚类方法概述	96
6.1.2 距离度量	97
6.1.3 模糊聚类的概念	98
6.2 模糊划分	99
6.3 基于目标函数的模糊 c -均值聚类	101
6.4 模糊 c -线性簇聚类	106
6.5 模糊 c -球壳聚类	109
6.5.1 模糊 c -球壳聚类原理	109
6.5.2 模糊 c -球壳聚类的一些改进	115

6.6	区间值数据的模糊 c -均值聚类	119
6.6.1	区间值数据	119
6.6.2	区间值数据的模糊 c -均值聚类原理	121
6.6.3	三种区间数 FCM 聚类算法的关系	124
6.7	加权模糊 c -均值聚类	126
6.7.1	对模糊划分矩阵中隶属度的解释	127
6.7.2	加权模糊 c -均值聚类算法	128
6.7.3	几个具体的加权函数及实例	130
6.8	模糊软聚类	132
6.8.1	截集模糊 c -均值聚类算法	132
6.8.2	对手抑制式模糊 c -均值聚类	136
6.9	模糊聚类的遗传算法实现技术	140
6.9.1	遗传算法的基本原理	140
6.9.2	遗传算法求解聚类问题	144
6.10	小结	147
	参考文献	147
第 7 章	模糊聚类的有效性	149
7.1	概述	149
7.2	模糊聚类 FCM 加权指数 m 的研究	152
7.2.1	加权指数 m 的极限特性	152
7.2.2	最优加权指数 m 的研究	157
7.3	模糊聚类的最优类数 c 的研究	164
7.3.1	划分系数与划分熵	164
7.3.2	划分系数作为聚类有效性函数的原因	165
7.3.3	基于可能性分布的聚类有效性函数	167
7.3.4	聚类有效性函数: 熵公式	171
7.3.5	基于子集测度的聚类有效性函数	175
7.3.6	基于几何结构的聚类有效性	178
7.4	模糊聚类的初始化问题	184
7.4.1	基于硬聚类的初始化方法	185
7.4.2	基于势函数的初始化方法	186
7.5	小结	190
	参考文献	190
第 8 章	模糊神经网络	193
8.1	概述	193
8.2	模糊神经网络的发展状况	193
8.2.1	FNN 模型和算法	195
8.2.2	FNN 的函数逼近问题	198

8.2.3	关于 FNN 的学习能力	199
8.2.4	对今后 FNN 研究的几点看法	200
8.3	模糊系统与神经网络之间的等价性及互换机制	200
8.3.1	模糊系统和神经网络之间的等价性	200
8.3.2	模糊系统和神经网络之间的互换机制	201
8.3.3	模糊神经网络集成系统设计的一般原则和方法	203
8.4	模糊神经网络分类器设计	204
8.4.1	特征空间划分的模糊 ID3 方法	205
8.4.2	模糊神经网络分类器的结构和学习算法	210
8.5	模糊聚类神经网络	213
8.5.1	竞争学习算法	213
8.5.2	基于目标函数法的聚类神经网络的构造	215
8.5.3	模糊逻辑神经元构造的聚类神经网络	217
8.6	模糊聚类神经网络的实现方法	220
8.6.1	硬 c-均值聚类神经网络	220
8.6.2	模糊 c-均值聚类神经网络	221
8.6.3	模糊 c-球壳聚类神经网络	223
8.6.4	模糊 c-椭球壳聚类神经网络	225
8.6.5	模糊 c-线聚类神经网络	227
8.7	小结	230
	参考文献	230
第 9 章	模糊识别技术	232
9.1	概述	232
9.2	特征选择的模糊聚类方法	233
9.2.1	类内处理	234
9.2.2	类间处理	235
9.2.3	最优特征维数的自动确定	236
9.3	特征空间划分的有监督聚类方法	237
9.3.1	加权模糊 c-均值聚类划分	238
9.3.2	对聚类划分的监督控制	239
9.3.3	超长方体的合并与扩展	240
9.4	前视舰船红外成像目标检测与识别的模糊技术	244
9.4.1	舰船红外成像特性分析	245
9.4.2	舰船成像图像中海天线的计算	247
9.4.3	目标搜索与模糊区域生长图像分割	250
9.4.4	单连通区域的标注	255
9.4.5	舰船目标的模糊识别	256
9.5	联机手绘图形的模糊识别技术	262

9.5.1	联机手绘图形的层次化识别框架	263
9.5.2	图形数据的获取和预处理	264
9.5.3	点序列旋转角的单边积分算法	266
9.5.4	手绘图形单笔笔画的特征描述	267
9.5.5	基线分解与识别的模糊技术	269
9.5.6	图形基元识别的模糊定义算法	276
9.5.7	属性关系图与手绘图形的定序属性关系图	281
9.5.8	信息不完备的定序属性关系图匹配技术	287
9.6	小结	291
	参考文献	291
第 10 章	基于模糊信息处理的图像分割	294
10.1	概述	294
10.2	直方图模糊约束 FCM 聚类自适应多阈值分割	296
10.2.1	关于图像直方图的一些定义	296
10.2.2	直方图的硬约束 FCM 聚类	297
10.2.3	直方图的模糊约束 FCM 聚类	299
10.2.4	直方图 FCM 聚类划分函数的划分特性	300
10.2.5	多阈值分割的划分函数及阈值的确定	303
10.2.6	最佳分割类数的自动确定	304
10.2.7	直方图 FCM 聚类的初始化问题	304
10.2.8	多阈值分割算法基本实现步骤和举例	304
10.3	图像直方图的模糊增强技术	307
10.3.1	基于平滑性测度的直方图模糊自适应增强	307
10.3.2	彩色图像色调直方图的模糊增强	313
10.4	塔型模糊聚类及区域模糊合并图像分割	320
10.4.1	图像模糊聚类特征和参数的选择	321
10.4.2	图像分割的塔型 FCM 聚类算法	321
10.4.3	过分割区域的模糊合并算法	323
10.5	纹理图像分割的塔型模糊聚类方法	324
10.5.1	纹理图像的灰度共生矩阵及其特征描述	325
10.5.2	纹理图像塔型数据的构造和特征提取	327
10.5.3	纹理分割的塔型模糊聚类	329
10.5.4	纹理块聚类结果的去模糊处理	330
10.6	基于邻域有序性模糊度量的多尺度边缘检测方法	333
10.6.1	边缘的邻域有序性模糊度量	334
10.6.2	边缘检测算子滤波尺度的调整	336
10.7	序列图像目标的模糊检测与分割	338
10.7.1	模糊加权的时域滤波运动目标分割	339

10.7.2 模糊自适应局部阈值序列图像分割	341
10.8 小结	344
参考文献	344
第 11 章 基于模糊信息处理的雷达目标跟踪	347
11.1 概述	347
11.2 基于模糊 Hough 变换的航迹起始方法	348
11.2.1 Hough 变换原理	348
11.2.2 均值漂移算法的基本理论	350
11.2.3 模糊影响因子的选取	352
11.2.4 算法流程	354
11.2.5 仿真分析	355
11.3 模糊积分粒子滤波器	358
11.3.1 系统模型	358
11.3.2 Gauss-Hermite 积分规则	359
11.3.3 模糊积分粒子滤波	359
11.3.4 算法讨论	364
11.3.5 实验结果及分析	364
11.4 光学观测数据的模糊综合关联算法	366
11.4.1 算法流程	366
11.4.2 关联预处理	367
11.4.3 模糊综合关联	368
11.5 直觉模糊联合概率数据关联滤波器	370
11.5.1 直觉模糊集的构造	370
11.5.2 基于 IF 点算子的关联度计算	371
11.5.3 IF-JPDAF1 和 IF-JPDAF2	374
11.5.4 实验结果及分析	376
11.6 ADS-B 数据和雷达航迹的直觉模糊数据关联算法	381
11.6.1 直觉模糊集理论	381
11.6.2 关联预处理	382
11.6.3 直觉模糊指数的计算	384
11.6.4 各属性的模糊决策分数计算	386
11.6.5 多属性加权决策数据关联	386
11.7 小结	387
参考文献	387
第 12 章 基于模糊信息处理的视频多目标跟踪	389
12.1 概述	389
12.2 基于模糊空时信息聚类的视频多目标跟踪方法	390
12.2.1 空时多属性特征	390

12.2.2	基于模糊空时信息聚类的数据关联	394
12.2.3	虚假观测判别与轨迹管理	395
12.2.4	实验结果及分析	397
12.3	基于直觉模糊集的视频多目标跟踪方法	401
12.3.1	直觉模糊集与直觉模糊点算子	402
12.3.2	基于直觉模糊集的数据关联	403
12.3.3	目标轨迹的建立、外推与删除	405
12.3.4	实验结果及分析	406
12.4	基于直觉模糊随机森林的视频多目标跟踪方法	408
12.4.1	直觉模糊决策树模型	409
12.4.2	直觉模糊随机森林模型	415
12.4.3	基于相关性度量的数据关联	416
12.4.4	实验结果及分析	418
12.5	基于提升直觉模糊树的视频多目标跟踪方法	420
12.5.1	AdaBoost 算法基本原理	420
12.5.2	提升直觉模糊树模型	422
12.5.3	实验结果及分析	423
12.6	基于模糊逻辑的视频多目标跟踪方法	424
12.6.1	多特征相似性度量	425
12.6.2	目标运动模型	426
12.6.3	模糊数据关联	426
12.6.4	目标模型更新及遮挡处理	430
12.6.5	目标轨迹管理规则	431
12.6.6	跟踪算法流程	432
12.6.7	实验结果及分析	433
12.7	基于模糊轨迹关联的视频多目标跟踪方法	433
12.7.1	模糊轨迹关联	434
12.7.2	目标初始化	437
12.7.3	目标终止	437
12.7.4	实验结果及分析	438
12.8	小结	439
	参考文献	440

第1章 模糊集合

1.1 普通集合

1.1.1 集合的概念

我们把被讨论的全体对象的集合称为论域, 论域通常以 $U, V, \dots, X, Y, \dots$ 等大写字母表示。把论域中的每个对象称为元素, 以相应的 $u, v, \dots, x, y, \dots$ 等小写字母表示。

定义 1.1.1 给定论域 X 和某一性质 P , X 中具有性质 P 的元素所组成的总体称为集合, 简称集。

经常以大写字母 $A, B, \dots$ 来表示集合。从中任意指定一个元素 x 及任意一个集合 A , 在 x 和 A 之间, 要么 x 属于 A (记作 $x \in A$), 要么 x 不属于 A (记作 $x \notin A$), 二者必居且仅居其一, 这是普通集合论中最起码的要求。

如果一个集合所包含的元素为有限个, 就称为有穷集, 否则称为无穷集。

在数学上常用式 (1.1.1) 表示某一集合 A :

$$A = \{x | P(x)\} \quad (1.1.1)$$

其中, $P(x)$ 是 “ x 具有性质 P ” 的缩写。

例 1.1.1 $A = \{x | x \text{ 是正整数}\}$, 即 A 是由全体正整数所组成的集合。有时候可以简写成 $A = \{x \text{ 是正整数}\}$ 。

有穷集可以用列举法来表示。

例 1.1.2 $A = \{x | x = a, b, c \text{ 或 } d\}$, 这是由 a, b, c, d 四个元素组成的集合。用列举法可以表示为 $A = \{a, b, c, d\}$ 。

例 1.1.3 $A = \{x | x = a\} = \{a\}$, 这是一个单点集, 即仅有一个元素 a 的集合。

为了表示方便, 我们在后面的论述中引进了逻辑符号 $\wedge, \vee, ^c, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \exists$ 和 $\forall$ 。 $A \wedge B$ 表示 A 且 B 。 $A \vee B$ 表示 A 或 B 。 A^c (或记作 $\bar{A}$) 表示非 A 。 $A \Rightarrow B$ 表示 A 蕴含 B 。 $A \Leftrightarrow B$ 表示 A 和 B 等价。 $(\exists x)P(x)$ 表示存在 x 满足 $P(x)$ 。 $(\forall x)P(x)$ 表示所有的 x 均满足 $P(x)$ 。

1.1.2 空集、全集、子集和幂集

定义 1.1.2 不含论域 X 中任何元素的集合称为空集, 记为 $\emptyset$, 即

$$\emptyset = \{x | x \neq x\}$$

定义 1.1.3 论域的全体称为全集, 记为 Ω , 即表示 $(\forall x) x \in \Omega$ 。

定义 1.1.4 设 A, B 是 X 上的两个集合, 如果对任意 $x \in X$, 都有

$$x \in A \Rightarrow x \in B \quad (\text{若 } x \in A, \text{ 则 } x \in B)$$

则称 B 包含 A , 记作 $B \supseteq A$, 或称 A 被 B 包含, 记作 $A \subseteq B$ 。

定义 1.1.5 如果 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$, 则称 A 和 B 相等, 记作 $A=B$ 。

定义 1.1.6 若 $B \subseteq A$, 则称 B 是 A 的子集。

显然有

$$\emptyset \subseteq A \subseteq \Omega \quad (1.1.2)$$

即空集是任何集合的子集。

定义 1.1.7 集合 A 的全体子集组成了 A 的一个子集族, 称为集合的幂, 记作 $P(A)$, 即

$$P(A) = \{B \mid B \text{ 是 } A \text{ 的子集}\}$$

例如, 设二元集 $A = \{a, b\}$, 则

$$P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$$

于是 X 的子集 A 有两种记法: $A \subseteq X$ 或 $A \subseteq P(X)$ 。

1.1.3 集合的运算及其性质

定义 1.1.8 设 $A, B \subseteq P(X)$, 有

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\} \quad (1.1.3)$$

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\} \quad (1.1.4)$$

$$A^c = \{x \mid x \notin A\} \quad (1.1.5)$$

分别称为 A 与 B 的并集、交集和 A 的补集。

当有 n 个集合 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 进行并、交运算时, 记作

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^n A_i \quad (1.1.6)$$

$$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^n A_i \quad (1.1.7)$$

可以用文氏图来表示集合的运算, 如图 1.1.1 所示, 分别表示两个集合的并集、交集和补集。

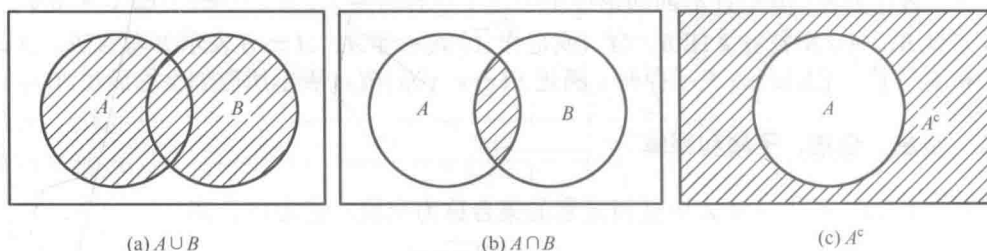


图 1.1.1 集合运算示意图

上述集合运算有如下一些性质, 注意到它们都是成对出现的。

(P1) 幂等律:

$$A \cup A = A, \quad A \cap A = A$$

(P2) 交换律:

$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A$$

(P3) 结合律:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

(P4) 吸收律:

$$(A \cap B) \cup B = B$$

$$(A \cup B) \cap B = B$$

(P5) 分配律:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

(P6) 两极律:

$$A \cup \Omega = \Omega, \quad A \cap \Omega = A$$

$$A \cup \emptyset = A, \quad A \cap \emptyset = \emptyset$$

(P7) 复原律:

$$(A^c)^c = A$$

(P8) 互补律:

$$A \cup A^c = \Omega$$

$$A \cap A^c = \emptyset$$

(P9) 对偶律:

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

对偶律也称为德·摩根律。由它可导出一条对偶原则——集论中成立的任一定理，若将其中的 $\cup$ 与 $\cap$ 互换， A 与 A^c 互换， $\subseteq$ 与 $\supseteq$ 互换，则该定理仍成立。

对于多个集合，对偶律可表示为

$$\left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right)^c = \bigcap_{i=1}^n A_i^c$$

$$\left(\bigcap_{i=1}^n A_i \right)^c = \bigcup_{i=1}^n A_i^c$$

定义 1.1.9 记

$$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\} \quad (1.1.8)$$

称为 B 对 A 的差集，简称 A 减 B 。

差运算与补运算可以互相表示：

$$A - B = A \cap B^c \quad (1.1.9)$$

$$A^c = \Omega - A \quad (1.1.10)$$

定义 1.1.10 记

$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A) \quad (1.1.11)$$

称为 A 与 B 的对称差。

图 1.1.2 表示了集合的差与对称差。由图可见, $A - B$ 意味着属于 A 而不属于 B 的所有元素组成的集合, 而 $A \oplus B$ 意味着或仅属于 A 或仅属于 B 的所有元素组成的集合。

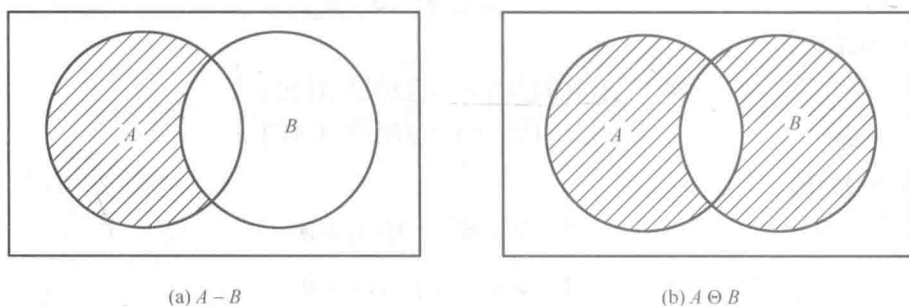


图 1.1.2 集合的差与对称差

1.1.4 特征函数

设 A 是论域 X 上的集合, 记

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases} \quad (1.1.12)$$

为集合 A 的特征函数。

式 (1.1.12) 表明, 对于任意 $x \in X$, 都有唯一确定的特征函数 $\mu_A(x) \in \{0, 1\}$ 与之对应。这样的对应关系称为映射。

据此, 可以将 A 表示为

$$\mu_A(x): X \rightarrow \{0, 1\} \quad (1.1.13)$$

式 (1.1.13) 表示 $\mu_A(x)$ 是从 X 到 $\{0, 1\}$ 的一个映射, 它唯一确定了集合 A :

$$A = \{x \mid \mu_A(x) = 1\}$$

特征函数 $\mu_A(x)$ 表征了元素 x 对集合 A 的隶属程度。当 $\mu_A(x) = 1$ 时, 表示 x 完全隶属于 A ; 当 $\mu_A(x) = 0$ 时, 表示 x 完全不属于 A 。

例 1.1.4 设论域 $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, 集合 $A = \{x_2, x_3, x_5\}$ 。我们得到

$$\mu_A(x_1) = 0, \quad \mu_A(x_2) = 1, \quad \mu_A(x_3) = 1, \quad \mu_A(x_4) = 0, \quad \mu_A(x_5) = 1$$

可以将 A 记为

$$A = \mu_A(x_1)/x_1 + \cdots + \mu_A(x_5)/x_5 = 0/x_1 + 1/x_2 + 1/x_3 + 0/x_4 + 1/x_5$$

这里的“+”号并不是求和，而是表示各个元素和特征函数对应关系的一个总括。

若 $x \in A$ ，则 $x \notin A^c$ ；若 $x \notin A$ ，则 $x \in A^c$ 。由此可以得到

$$\mu_{A^c}(x) = 1 - \mu_A(x) \quad (1.1.14)$$

除了这条运算性质，我们不难看出，特征函数也满足下列两条运算性质：

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x)) \quad (1.1.15)$$

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x)) \quad (1.1.16)$$

例 1.1.5 对于例 1.1.4 的情况，我们可以得到

$$\mu_{A^c}(x_1) = 1, \quad \mu_{A^c}(x_2) = 0, \quad \mu_{A^c}(x_3) = 0, \quad \mu_{A^c}(x_4) = 1, \quad \mu_{A^c}(x_5) = 0$$

于是，可以将 A^c 表示为

$$A^c = 1/x_1 + 0/x_2 + 0/x_3 + 1/x_4 + 0/x_5$$

集合运算实质上是逐个元素地对其特征函数进行运算。特征函数的这种运算与二值逻辑的布尔运算 $(\{0,1\}, \vee, \wedge, ^c)$ 一致。

根据特征函数的讨论，可以引出模糊集合的概念。

1.2 模糊集合的基本概念和运算

1.2.1 模糊集合的概念

在普通集合论中，论域 X 中的某一个元素 x 要么完全属于某个集合 A ($\mu_A(x)=1$)，要么完全不属于 A ($\mu_A(x)=0$)，元素间的分类具有分明的边界。从这个意义上说，也可以称普通集合为“硬集”。

例 1.2.1 设教室中有 5 个学生，分别以 s_1 、 s_2 、 s_3 、 s_4 和 s_5 来表示，其中 s_1 、 s_2 和 s_3 是男生， s_4 和 s_5 是女生。以 A_1 表示男生的集合，以 A_2 表示女生的集合。使用特征函数的概念，可以将 A_1 和 A_2 分别表示为

$$A_1 = 1/s_1 + 1/s_2 + 1/s_3 + 0/s_4 + 0/s_5$$

$$A_2 = 0/s_1 + 0/s_2 + 0/s_3 + 1/s_4 + 1/s_5$$

显然， A_1 和 A_2 的分界是分明的。但是，当试图在这 5 个学生中构成一个表示“有才干的学生”的集合时，会感到传统的集合概念是难以应用的。学生的才干虽有高低之分，但是，对于“有才干的学生”这样的集合，不能指明哪些学生一定属于它，哪些学生一定不属于它。实际上人们在处理这样的问题时，也不需要完全确定谁是或者谁不是它的成员，只需要对每个元素确定一个数，用这个数来表示该元素对所言集合的隶属程度。若学生 s_1 对于“有才干的学生”的集合隶属程度高于学生 s_2 ，我们就说学生 s_1 比学生 s_2 相对地更属于“有才干的学生”这个集合。

正是考虑到在现实世界中很多事物的分类边界是不分明的，而这种不分明的划分在人类的识别、判断和认知过程中起着重要的作用，为了用数学的方法来处理这种问题，Zadeh 于 1965 年提出了模糊集合的概念^[1]。他用隶属度函数来划分处于中间过渡的事物对差异双方所