全国各大考研辅导机构**通用教材**

JINBANG BOOKS·SINCE 1997
金榜图书
北京时代巨流文化有限公司

李永乐·王式安
考研数学系列

考研数学临阵磨枪

数学一

主编◎李永乐　刘喜波　章纪民

核心搭配：《复习全书》+《660题》+《历年真题》

保命125分，冲击145分

双色印刷
高品质阅读体验

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

金榜图书

全国各大考研辅导机构**通用教材**

李永乐·王式安考研数学系列

考研数学临阵磨枪

数学一

主编 ◎ 李永乐 刘喜波 章纪民

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

内容简介

《考研数学临阵磨枪》是考研临考前最后复习的用书。最后整理一下知识脉络，列一个知识清单，再做几道基本的考研题，背一下基本公式。纵观历年考研试卷，我们不难发现，题目是有法可依的，是有套路的，尽管每年的题目不同，但是内涵基本相同。本书是介绍基本题目，目的就是帮大家考过平均分。本书涉及的内容主要包含：基本计算、基本应用和基本概念。从宏观的、联系的角度，全方位、整体性、精炼性、模块性分成若干类型，呈现给考生，每一类型包括例题和知识点清单，以期达到“临阵磨枪”的效果。

图书在版编目(CIP)数据

考研数学临阵磨枪. 数学一/李永乐，刘喜波，章纪民主编. —西安：西安交通大学出版社，2017.11

ISBN 978-7-5605-9116-2

Ⅰ.①考… Ⅱ.①李… ②刘… ③章… Ⅲ.①高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料 Ⅳ.①013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 291057 号

书　　名　考研数学临阵磨枪·数学一
主　　编　李永乐　刘喜波　章纪民
责任编辑　王　芬　贺彦峰

出版发行　西安交通大学出版社
　　　　　　西安市兴庆南路 10 号(邮政编码 710049)
网　　址　http://www.xjtupress.com
电　　话　(029)82668357　82667874(发行中心)
　　　　　　(029)82668315(总编办)
印　　刷　三河市鑫鑫科达彩色印刷包装有限公司

开　　本　787mm×1092mm　1/16　**印张**　9　**字数**　200 千字
版次印次　2017 年 12 月第 1 版　2017 年 12 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5605-9116-2
定　　价　39.80 元

前　言

一直想写一本考研临考前最后复习的用书。想象一下，如果是我，在临考前该做些什么呢？我想我会整理一下知识脉络，列个知识清单，再做几道基本的考研题，背一下基本公式。

本书就是为了这个目的而写的。

纵观历年考研试卷，我们不难发现，一份考研试卷是由“基本”题目和“亮点”题目组成。所谓“基本”题目，就是那些每隔几年就会出现一次的题目，相同的知识点以不同的形式出现，这些题目往往不会花费出题老师很多精力，一个有经验的大学数学老师，一口气出十几道题应该不会有任何困难。“亮点”题目就是那些出题老师花了很多精力(或者挖了很多坑)的题目。某一年的考研试卷，如果基本题目多了，那么平均分就高，如果亮点题目多了，那么平均分就低。

基本题目是有法可依的，是有套路的，尽管每年的题目不同，但是内涵基本相同，只是相同的内容，换了不同的包装而已。亮点题目完全就不按套路出题，基本上是不可预知的。

本书是介绍基本题目，换句话说，本书的目的就是帮同学们拿到平均分。如果有同学对分数要求很高，比如 140 分，那么仅看本书是远远不够的。

考虑到这是考试前临阵磨枪用书，考生在看本书前已经复习过几轮，所以本书就不对所用到的方法作解释了。

限于编写时间和精力，因而书中一定存在不妥之处，希望广大读者提出批评和指正。

衷心祝愿同学们取得好成绩，进入自己理想中的学校！

编　者

目录

高等数学

线性代数

概率论与数理统计

高等数学

第一部分　基本计算

计算是考研数学的必考内容.在考卷中呈现的可能是一题简单的计算题,也可以融合在其他题目中.考研微积分的计算题主要有导数(偏导数,微分,全微分)的计算,积分(一元积分,重积分,曲线、曲面积分)的计算,微分方程的求解.

一、导数(偏导数,微分,全微分)的计算

导数(偏导数,微分,全微分)的计算包括下面几个内容:

1.1 一元显函数的导数(微分)计算:$y = f(x)$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad dy = f'(x_0)dx$$

1.2 多元显函数的偏导数(全微分)计算:以二元函数为例,$z = f(x,y)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = f'_x(x_0,y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x,y_0) - f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = f'_y(x_0,y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0,y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

$$df(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)dy$$

一元显函数(包括复合函数),多元显函数的偏导数(全微分)计算也比较简单,在此就不举例介绍了.

1.3 隐函数导数的计算

若方程 $F(x,y) = 0$ 确定了一元隐函数 $y = y(x)$,由隐函数定义,我们有恒等式:

$$F(x,y(x)) \equiv 0, \forall x \text{ 成立},$$

两边对 x 求导,$\frac{d}{dx}F(x,y(x)) = 0$,

$$F'_x(x,y) + F'_y(x,y) \cdot y'(x) = 0,$$

即

$$y'(x) = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}$$

从这是可见:函数 $y = y(x)$ 存在并可导有一个必要条件是,$F'_y(x,y) \neq 0$.

多元隐函数也有类似的结论:若方程 $F(x,y,z) = 0$ 确定了一个二元隐函数 $z = z(x,y)$,由隐函数定义有恒等式:$F(x,y,z(x,y)) \equiv 0, \forall (x,y)$ 成立,

两边对 x 求偏导,$\frac{\partial}{\partial x}F(x,y,z(x,y)) = 0, F'_x(x,y,z) + F'_z(x,y,z) \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0$,所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}},\text{同理}\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}.$$

1.4 **反函数导数的计算**

函数 $y=f(x)$ 的反函数记作 $x=f^{-1}(y)$.

反函数是特殊的隐函数,满足方程 $F(x,y)=y-f(x)=0$ 的隐函数 $x=x(y)$. $y=f(x(y))$, $\forall y$ 成立. 两边对 y 求导, $1=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$,所以

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}}=\frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}$$

1.5 **参数函数导数的计算**

若 $x=x(t)$ 反函数 $t=t(x)$ 存在,则 $\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}$ 构成 y 是 x 的函数(参数函数): $y=y(t(x))$.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}.$$

1.6 **变限积分定义的函数的导数计算**

变上限积分 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$,变下限积分 $\int_x^b f(t)\mathrm{d}t$,一般的复合变限积分 $\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\mathrm{d}t$.

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, $\alpha(x)$, $\beta(x)$ 可导,则复合变限积分 $\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\mathrm{d}t$ 定义的函数在 $[a,b]$ 上可导且 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\mathrm{d}t\right)=f(\beta(x))\beta'(x)-f(\alpha(x))\alpha'(x)$.

例 1.1 (数一,2017) 已知函数 $y(x)$ 由方程 $x^3+y^3-3x+3y-2=0$ 确定,求 $y(x)$ 的极值.

【解】 这是求函数极值的题目,根据极值的充分条件与必要条件,首先要求函数 $y(x)$ 的驻点,然后求二阶导数,判断驻点是否是极值点. 所以我们首先求函数 $y(x)$ 的一阶、二阶导数.

记 $F(x,y)=x^3+y^3-3x+3y-2$,则 $\frac{\partial F}{\partial x}=3x^2-3$, $\frac{\partial F}{\partial y}=3y^2+3$.

所以 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{3x^2-3}{3y^2+3}$.

求二阶导数,方法如下:

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x^2-1}{y^2(x)+1}\right)=-\frac{(x^2-1)'(y^2+1)-(x^2-1)\cdot(y^2(x)+1)'}{(y^2+1)^2}$$

$$=-\frac{2x(y^2+1)-(x^2-1)\cdot 2y\left(-\dfrac{x^2-1}{y^2+1}\right)}{(y^2+1)^2}.$$

【注记 1】 为了使大家更清楚计算过程,简单的化简就不做了.

【注记 2】 本题接下来是用极值的充分与必要条件定理求驻点，并判断驻点是否是极值点，等介绍微分的应用时再做.

例 1.2 （数一，2016）设函数 $f(u,v)$ 可微，$z=z(x,y)$ 由方程 $(x+1)z-y^2=x^2f(x-z,y)$ 确定，则 $\mathrm{d}z\big|_{(0,1)}=$ ________.

【解】 当 $x=0,y=1$ 时 $z=1$.

记 $F(x,y,z)=(x+1)z-y^2-x^2f(x-z,y)$，则

$$\frac{\partial F}{\partial x}=z-\left(2xf(x-z,y)+x^2\frac{\partial f}{\partial u}\right),$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=-2y-x^2\frac{\partial f}{\partial v},$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}=(x+1)-x^2\frac{\partial f}{\partial u}\cdot(-1),$$

因此在 $(0,1)$ 点，$\dfrac{\partial z}{\partial x}(0,1)=-\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x}(0,1,1)}{\frac{\partial F}{\partial z}(0,1,1)}=-1,\dfrac{\partial z}{\partial y}(0,1)=-\dfrac{\frac{\partial F}{\partial y}(0,1,1)}{\frac{\partial F}{\partial z}(0,1,1)}=2,$

故 $\mathrm{d}z\big|_{(0,1)}=-\mathrm{d}x+2\mathrm{d}y$.

例 1.3 （数一，2013）设 $\begin{cases}x=\sin t\\ y=t\sin t+\cos t\end{cases}$ （t 为参数），则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=$ ________.

【解】 $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\sin t+t\cos t-\sin t}{\cos t}=t,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\cdot\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=1\cdot\frac{1}{\cos t}=\frac{1}{\cos t},\text{所以}\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}.$$

【知识清单填空 1】

1.1 导数与微分的四则运算法则：若 $f(x),g(x)$ 可导，则

(1) $[f(x)\pm g(x)]'=$ ________.

(2) $[f(x)\cdot g(x)]'=$ ________.

(3) $g(x)\neq 0,\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]'=$ ________.

(4) $\mathrm{d}[f(x)\pm g(x)]=$ ________.

(5) $\mathrm{d}[f(x)\cdot g(x)]=$ ________.

(6) $g(x)\neq 0,\mathrm{d}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]=$ ________.

1.2 复合函数求导：如果 $y=f(u)$ 可导，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}=f'(u)$，$u=\varphi(x)$ 可导，$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\varphi'(x)$，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ ________，且 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$ ________.

1.3 初等函数的导数公式：

(1) $(c)'=$ ________（c 为常数）；

(2)$(x^{\mu})' =$ ________ $(x > 0,\mu$ 为任意实数$)$;

(3)$(a^x)' =$ ________ $(a > 0)$;$(e^x)' =$ ________;

(4)$(\log_a x)' =$ ________ $(a > 0)$;$(\ln x)' =$ ________;$(\ln|x|)' =$ ________;

(5)$(\sin x)' =$ ________;$(\cos x)' =$ ________;

(6)$(\tan x)' =$ ________;$(\cot x)' =$ ________;

(7)$(\sec x)' =$ ________;$(\csc x)' =$ ________;

(8)$(\arcsin x)' =$ ________;$(\arccos x)' =$ ________;

(9)$(\arctan x)' =$ ________;$(\text{arccot}\, x)' =$ ________.

(10)$f(x) = [h(x)]^{g(x)}$,$f'(x) =$ ________.

1.4　若 $f(x)$,$g(x)$ 均 n 阶可导,$[f(x) \pm g(x)]$,$cf(x)$ 也 ________,且$[f(x) \pm g(x)]^{(n)} =$ ________;$[cf(x)]^{(n)} =$ ________,其中 $c \in \mathbf{R}$ 为常数.

莱布尼茨公式:若 $f(x) = u(x) \cdot v(x)$,其中 $u(x)$,$v(x)$ 均 n 阶可导,则 $f^{(n)}(x) =$ ________.

1.5　与一元函数一样,两个多元函数可以作四则运算,也有类似的求偏导公式:

(1) $\dfrac{\partial}{\partial x_i}[f(X) \pm g(X)] =$ ________;

(2) $\dfrac{\partial}{\partial x_i}[f(X) \cdot g(X)] =$ ________;

(3) $\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left[\dfrac{f(X)}{g(X)}\right] =$ ________;

(4) 多元函数的复合运算.

$y = f(u_1, u_2, \cdots, u_m)$ 为 m 元函数$(n = 1,2,3)$,其中

$$u_1 = g_1(x_1, x_2 \cdots, x_n), (x_1, x_2 \cdots, x_n) \in \Omega \subset \mathbf{R}^n$$
$$u_2 = g_2(x_1, x_2 \cdots, x_n), (x_1, x_2 \cdots, x_n) \in \Omega \subset \mathbf{R}^n$$
$$\cdots\cdots$$
$$u_m = g_m(x_1, x_2 \cdots, x_n), (x_1, x_2 \cdots, x_n) \in \Omega \subset \mathbf{R}^n$$

若函数 $f(u_1, u_2, \cdots, u_m)$ 和 $g_i(x_1, x_2 \cdots, x_n)$,　$i = 1,2,\cdots,m$ 均为可微函数,则其复合

$$y = f(g_1(x_1, x_2 \cdots, x_n), g_2(x_1, x_2 \cdots, x_n), \cdots, g_m(x_1, x_2 \cdots, x_n))$$

也为 ________,并且有求偏导的链式法则:$\dfrac{\partial y}{\partial x_i} =$ ________,$i = 1,2,\cdots,n$.

1.6　隐函数求导:

若函数 $y = y(x)$,由方程 $F(x,y) = 0$ 确定,则 $y'(x) =$ ________;

如果多元隐函数 $y = y(x_1, x_2, \cdots, x_n)$　$(n = 1,2,3)$ 由方程 $F(x_1, x_2, \cdots, x_n, y) = 0$ 确定,则 $y'_{x_i}(x) =$ ________.

1.7　反函数求导:$\dfrac{dx}{dy} =$ ________.

1.8　参数函数求导:$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$,则 $\dfrac{dy}{dx} =$ ________.

【知识清单答案 1】

1.1 (1) $[f(x)]' \pm [g(x)]'$　　(2) $[f(x)]'g(x) + f(x)[g(x)]'$

(3) $\dfrac{[f(x)]'g(x)-f(x)[g(x)]'}{[g(x)]^2}$　(4) $\mathrm{d}[f(x)]\pm\mathrm{d}[g(x)]$

(5) $\mathrm{d}[f(x)]g(x)+f(x)\mathrm{d}[g(x)]$　(6) $\dfrac{\mathrm{d}[f(x)]g(x)-f(x)\mathrm{d}[g(x)]}{[g(x)]^2}$

1.2 可导，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$

1.3 (1)0　(2)$\mu x^{\mu-1}$　(3)$a^x\ln a$；e^x　(4)$\dfrac{1}{x\ln a}$；$\dfrac{1}{x}$；$\dfrac{1}{x}$.

(5)$\cos x$；$-\sin x$　(6) $\sec^2 x$；$-\csc^2 x$　(7)$\sec x\tan x$；$-\csc x\cot x$

(8) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；$\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$　(9) $\dfrac{1}{1+x^2}$；$\dfrac{-1}{1+x^2}$

(10) $f(x)\left[g'(x)\ln h(x)+g(x)\cdot\dfrac{h'(x)}{h(x)}\right]$

1.4 n 阶可导，$f^{(n)}(x)\pm g^{(n)}(x)$；$cf^{(n)}(x)$. $\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k u^{(n-k)}(x)v^{(k)}(x)$.

1.5 (1) $\dfrac{\partial}{\partial x_i}[f(X)]\pm\dfrac{\partial}{\partial x_i}[g(X)]$　(2) $\left(\dfrac{\partial}{\partial x_i}[f(X)]\right)g(X)+f(X)\left(\dfrac{\partial}{\partial x_i}[g(X)]\right)$

(3) $\dfrac{\left(\dfrac{\partial}{\partial x_i}[f(X)]\right)g(X)-f(X)\left(\dfrac{\partial}{\partial x_i}[g(X)]\right)}{[g(X)]^2}$

(4) 可微函数，$\dfrac{\partial f}{\partial u_1}\dfrac{\partial u_1}{\partial x_i}+\dfrac{\partial f}{\partial u_2}\dfrac{\partial u_2}{\partial x_i}+\cdots+\dfrac{\partial f}{\partial u_m}\dfrac{\partial u_m}{\partial x_i}$

1.6 $-\dfrac{f'_x(x,y)}{f'_y(x,y)}$；$-\dfrac{f'_{x_i}(x_1,x_2,\cdots,x_n,y)}{f'_y(x_1,x_2,\cdots,x_n,y)}$

1.7 $\dfrac{1}{\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}}=\dfrac{1}{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}$

1.8 $\dfrac{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}$

二、极限的计算

初等函数都是连续函数，所以在定义域的内部，初等函数的极限值就是函数值. 值得讨论的极限都是当自变量趋于定义域的边界，也就是所谓不定式的极限. 下面是常见的几类不定式.

2.1 $\dfrac{0}{0}$ 型不定式：

如果(1) $\lim\limits_{x\to\square}f(x)=\lim\limits_{x\to\square}g(x)=0$；(2) 在极限点附近，$f'(x)$，$g'(x)$ 都存在，且 $g'(x)\neq 0$；(3) $\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在或为无穷大，则 $\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 存在或为无穷大，且

$$\lim_{x\to\square}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\square}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

【注记】　这里 $x\to\square$ 可以是趋于一个实数（左极限或右极限）或趋于无穷.

2.2 $\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式：

如果(1) $\lim\limits_{x\to\square} g(x)=\infty$；(2) 在极限点附近，$f'(x)$，$g'(x)$ 都存在，且 $g'(x)\neq 0$；(3) $\lim\limits_{x\to\square}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在或为无穷大，则 $\lim\limits_{x\to\square}\frac{f(x)}{g(x)}$ 存在或为无穷大，且

$$\lim_{x\to\square}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\square}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

2.3 $0\cdot\infty$ 型，$\infty-\infty$ 型，0^0 型，1^∞ 型不定式：

化成 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式来计算.

例 2.1 （数学一，2017）若函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}, & x>0\\ b, & x\leqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则

(A) $ab=\frac{1}{2}$.　(B) $ab=-\frac{1}{2}$.　(C) $ab=0$.　(D) $ab=2$.

【解】 要使分段函数在 $x=0$ 点连续，只要 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$ 即可，也就是 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-\cos\sqrt{x})}{ax}=b$. 因此本题的本质还是求极限问题.

$\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos\sqrt{x})=0$，$\lim\limits_{x\to 0} ax=0$，所以这是 $\frac{0}{0}$ 型不定式.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos\sqrt{x})'}{(ax)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{a}=\frac{1}{2a},$$

所以当 $\frac{1}{2a}=b$ 时，函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 点连续，(A) 选项正确.

例 2.2 （数学一，2016）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x t\ln(1+t\sin t)\mathrm{d}t}{1-\cos x^2}=$ ________.

【解】 这是一题与变上限积分有关的 $\frac{0}{0}$ 型不定式.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x t\ln(1+t\sin t)\mathrm{d}t}{1-\cos x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\int_0^x t\ln(1+t\sin t)\mathrm{d}t\right)'}{(1-\cos x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{x\ln(1+x\sin x)}{2x\sin x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\ln(1+x\sin x))'}{(2\sin x^2)'}=\frac{1}{2}.$$

【注记】 如果能记住一些常见的等价无穷小替换，本题将更容易计算.

例 2.3 （数学一，2015）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}=$ ________.（解法略）

例 2.4 （数学二，2013）$\lim\limits_{x\to 0}\left(2-\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=$ ________.

【解】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{1+x}}{1}=1$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=\infty$，

所以$\lim\limits_{x\to 0}\left(2-\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$ 为 1^{∞} 型不定式.

$$\lim_{x\to 0}\left(2-\frac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left(1+\left(1-\frac{\ln(1+x)}{x}\right)\right)^{\frac{1}{1-\frac{\ln(1+x)}{x}}\cdot\frac{1-\frac{\ln(1+x)}{x}}{x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\left(1+\left(1-\frac{\ln(1+x)}{x}\right)\right)^{\frac{1}{1-\frac{\ln(1+x)}{x}}}\right)^{\frac{1-\frac{\ln(1+x)}{x}}{x}}$$

而$\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)=0$,所以由 e 的定义,$\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\left(1-\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)\right)^{\frac{1}{1-\frac{\ln(1+x)}{x}}}=\mathrm{e}$.

因为$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\dfrac{\ln(1+x)}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\ln(1+x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\dfrac{1}{1+x}}{2x}=\dfrac{1}{2}$,

所以$\lim\limits_{x\to 0}\left(2-\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$.

【知识清单填空 2】

2.1 函数极限的运算性质:

下面以 $x\to x_0$ 函数 $f(x)$ 的极限为例,其他极限($x\to x_0^-,x\to x_0^+,x\to+\infty,x\to-\infty,x\to\infty$)的结论完全类似.

(1) 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,$C$ 为实常数,则$\lim\limits_{x\to x_0}(Cf(x))=$ ________;

(2) 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A,\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$,则$\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x))=$ ________;

(3) 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A,\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$,则$\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x))=$ ________;

(4) 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A,g(x)\neq 0,\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B\neq 0$,则$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=$ ________;

(5) 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty,f(x)\neq 0$,则$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=$ ________.

2.2 常用等价无穷小量($x\to 0$)

(1)$x\sim$ ________ $\sim$ ________ $\sim$ ________ $\sim$ ________;

(2)$1-\cos x\sim$ ________;

(3)$a^x-1\sim$ ________$(a>0)$;

(4)$\mathrm{e}^x-1\sim$ ________;

(5) $(x+1)^{\lambda}-1\sim$ ________$(\lambda\in R)$;

(6)$\sin x-x\sim$ ________.

【知识清单答案 2】

2.1 (1)CA; (2)$A\pm B$; (3)AB; (4) $\dfrac{A}{B}$; (5)0.

2.2 (1)$\sin x$;$\tan x$;$\ln(1+x)$;e^x-1 等 (2) $\dfrac{1}{2}x^2$; (3)$x\ln a$; (4)x; (5)λx; (6)$-\dfrac{1}{6}x^3$.

三、积分的计算

积分的计算也是考研的基本计算,其中重中之重是不定积分的计算.

3.1 不定积分与定积分:

若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数,则原函数的全体 $F(x)+C$ 称为不定积分,记作

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)+C.$$

两种不定积分的计算方法:换元法,分部积分法.

两类函数的不定积分:分式有理函数,三角有理函数的不定积分.

3.2 定积分的计算(牛顿 — 莱布尼兹公式):

若 $f(x)$ 是$[a,b]$上的连续函数,$F(x)$ 为 $f(x)$ 在$[a,b]$上的一个原函数,则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b)-F(a) \triangleq F(x)\Big|_a^b.$$

例 3.1 (数学一,2017) 求$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$.

【解】 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 x\ln(1+x)\mathrm{d}x$,在此我们用到定积分的定义.

而由分部积分法,

$$\begin{aligned}\int x\ln(1+x)\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int\ln(1+x)\mathrm{d}(x^2)=\frac{1}{2}\left(x^2\ln(1+x)-\int x^2\cdot(\ln(1+x))'\mathrm{d}x\right)\\ &=\frac{1}{2}\left(x^2\ln(1+x)-\int\frac{x^2}{1+x}\mathrm{d}x\right)=\frac{1}{2}\left(x^2\ln(1+x)-\int\frac{(x^2-1)+1}{1+x}\mathrm{d}x\right)\\ &=\frac{1}{2}\left(x^2\ln(1+x)-\frac{x^2}{2}+x-\ln(1+x)\right)+C\end{aligned}$$

由牛顿 — 莱布尼兹公式,

$$\int_0^1 x\ln(1+x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(x^2\ln(1+x)-\frac{x^2}{2}+x-\ln(1+x)\right)\Big|_0^1=\frac{1}{4}.$$

例 3.2 (数学一,2016) 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2(x-1), & x<1.\\ \ln x, & x\geqslant 1.\end{cases}$ 则 $f(x)$ 的一个原函数是

(A)$F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1.\\ x(\ln x-1), & x\geqslant 1.\end{cases}$ (B)$F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1.\\ x(\ln x+1)-1, & x\geqslant 1.\end{cases}$

(C)$F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1.\\ x(\ln x+1)+1, & x\geqslant 1.\end{cases}$ (D)$F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1.\\ x(\ln x-1)+1, & x\geqslant 1.\end{cases}$

【解】 当 $x<1$ 时,$\int f(x)\mathrm{d}x=\int 2(x-1)\mathrm{d}x=\int 2(x-1)\mathrm{d}(x-1)=(x-1)^2+C_1$;

当 $x\geqslant 1$ 时,$\int f(x)\mathrm{d}x=\int\ln x\mathrm{d}x=x\ln x-\int x\cdot(\ln x)'\mathrm{d}x=x\ln x-x+C_2$.

原函数是连续函数,所以$\lim\limits_{x\to 1^-}((x-1)^2+C_1)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x\ln x-x+C_2)$,$C_1=-1+C_2$,

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}(x-1)^2-1+C, & x<1;\\ x\ln x-x+C, & x\geqslant 1\end{cases}$$

令 $C=1$,(D) 为正确选项.

【注记】 隐函数为可微函数,一定连续.

例 3.3 (数学一,2015) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}+|x|\right)\mathrm{d}x=$ ________.

【解】 $$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}+|x|\right)\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}x+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|x|\mathrm{d}x$$
$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|x|\mathrm{d}x=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}|x|\mathrm{d}x=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}x\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{4}.$$

【注记】 本题的计算用到奇函数、偶函数在关于原点对称区间上定积分的性质.

例 3.4 (数学二,2014) $\int_{-\infty}^{1}\frac{1}{x^2+2x+5}\mathrm{d}x=$ ________.

【解】 $$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+5}=\int\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2+2^2}=\frac{1}{2^2}\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\left(\frac{x+1}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}\left(\frac{x+1}{2}\right)}{1+\left(\frac{x+1}{2}\right)^2}$$
$$=\frac{1}{2}\arctan\frac{x+1}{2}+C,$$

所以 $$\int_{-\infty}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+5}=\frac{1}{2}\arctan\frac{x+1}{2}\Big|_{-\infty}^{1}$$
$$=\frac{1}{2}\arctan\frac{x+1}{2}\Big|_{x=1}-\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{2}\arctan\frac{x+1}{2}=\frac{3}{8}\pi.$$

【注记】 本题用到广义积分的定义.

例 3.5 (数学一,2013) 计算 $\int_{0}^{1}\frac{f(x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$,其中 $f(x)=\int_{1}^{x}\frac{\ln(t+1)}{t}\mathrm{d}t$.

【解】 先求不定积分. 由条件,$f'(x)=\frac{\ln(x+1)}{x}$. 再由分部积分法,
$$\int\frac{f(x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\int f(x)\mathrm{d}(2\sqrt{x})=2\sqrt{x}f(x)-\int 2\sqrt{x}f'(x)\mathrm{d}x$$
$$=2\sqrt{x}f(x)-\int 2\sqrt{x}\cdot\frac{\ln(x+1)}{x}\mathrm{d}x,$$

所以 $$\int_{0}^{1}\frac{f(x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=2\sqrt{x}f(x)\Big|_{0}^{1}-2\int_{0}^{1}\frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x.$$

显然 $2\sqrt{x}f(x)\Big|_{0}^{1}=2f(1)=0$,且再由分部积分法
$$2\int_{0}^{1}\frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=4\int_{0}^{1}\ln(x+1)\mathrm{d}(\sqrt{x})=4\sqrt{x}\ln(x+1)\Big|_{0}^{1}-4\int_{0}^{1}\frac{\sqrt{x}}{x+1}\mathrm{d}x$$
$$=4\ln 2-4\int_{0}^{1}\frac{\sqrt{x}}{x+1}\mathrm{d}x.$$

令 $\sqrt{x}=t$,则 $\int_{0}^{1}\frac{\sqrt{x}}{x+1}\mathrm{d}x=\int_{0}^{1}\frac{2t^2}{t^2+1}\mathrm{d}t=2(t-\arctan t)\Big|_{0}^{1}=2-\frac{\pi}{2}$,

$$\int_{0}^{1}\frac{f(x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=8-2\pi-4\ln 2.$$

3.3 二重积分的计算

(1) 二重积分化为累次积分,坐标系选择及计算问题

如果积分区域 $D=\{(x,y)\mid a\leqslant x\leqslant b,\alpha(x)\leqslant y\leqslant\beta(x)\}$,则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b\mathrm{d}x\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)}f(x,y)\mathrm{d}y;$$

如果积分区域 $D=\{(x,y)\mid c\leqslant y\leqslant d,h_1(y)\leqslant x\leqslant h_2(y)\}$,则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_c^d\mathrm{d}y\int_{h_1(y)}^{h_2(y)}f(x,y)\mathrm{d}x.$$

极坐标系 $\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$, $r\geqslant 0,0\leqslant\theta<2\pi.$

若区域 D 在极坐标下的表达形式为 $D_{r\theta}=\{(r,\theta)\mid r_1(\theta)\leqslant r\leqslant r_2(\theta),\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta\}$,则二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_\alpha^\beta\mathrm{d}\varphi\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r.$

(2) 二重积分交互积分次序:如果积分区域 $D=$ $\{(x,y)\mid a\leqslant x\leqslant b,\alpha(x)\leqslant y\leqslant\beta(x)\}=\{(x,y)\mid c\leqslant y\leqslant d,h_1(y)\leqslant x\leqslant h_2(y)\}$,则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b\mathrm{d}x\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_c^d\mathrm{d}y\int_{h_1(y)}^{h_2(y)}f(x,y)\mathrm{d}x.$$

例 3.6 (数学二,2017) 已知平面区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2y\}$,计算二重积分

$$\iint_D(x+1)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

【解】 由被积函数的奇偶性及积分区域的对称性可知

$$\begin{aligned}\iint_D(x+1)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\iint_D(x^2+2x+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D(x^2+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_D 2x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint_D(x^2+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

化为极坐标系下的二次积分,

$$\iint_D(x^2+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^\pi\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}(r^2\cos^2\theta+1)r\mathrm{d}r=4\int_0^\pi\sin^4\theta\cos^2\theta\mathrm{d}\theta+\pi=\frac{5}{4}\pi.$$

例 3.7 (数学二,2017) 设 D 是由直线 $y=1,y=x,y=-x$ 围成的有界区域,计算二重积分 $\iint\limits_D\frac{x^2-xy-y^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

【解】 积分区域关于 y 轴对称,所以 $\iint\limits_D\frac{xy}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$

用极坐标系计算

$$\begin{aligned}\iint_D\frac{x^2-xy-y^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\iint_D\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{\sin\theta}}\frac{r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)}{r^2}r\mathrm{d}r\\&=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\cot^2\theta-1)\mathrm{d}\theta=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\csc^2\theta-2)\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

$$= (-\cot\theta - 2\theta)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = 1 - \frac{\pi}{2}.$$

【注记 1】 用到偶函数对称区域积分的性质；

【注记 2】 也可以用直角坐标系计算.

例 3.8 （数学二，2017）$\int_0^1 \mathrm{d}y \int_y^1 \frac{\tan x}{x}\mathrm{d}x =$ ______.

【解】 交换积分次序，

$$\int_0^1 \mathrm{d}y \int_y^1 \frac{\tan x}{x}\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^x \frac{\tan x}{x}\mathrm{d}y = \int_0^1 \tan x \mathrm{d}x = -\ln\cos x\Big|_0^1 = -\ln\cos 1.$$

例 3.9 （数学一，2016）已知平面区域

$D = \left\{(r,\theta) \mid 2 \leqslant r \leqslant 2(1+\cos\theta), -\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}\right\}$，计算二重积分$\iint\limits_D x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

【解】 $\iint\limits_D x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_2^{2(1+\cos\theta)} r\cos\theta \cdot r\mathrm{d}r = \frac{8}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [(1+\cos\theta)^3 - 1]\mathrm{d}\theta$

$$= \frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (3\cos^2\theta + 3\cos^3\theta + \cos^4\theta)\mathrm{d}\theta = \frac{32}{3} + 5\pi.$$

【注记】 有一个公式要记住：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n\theta \mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n\theta \mathrm{d}\theta = \begin{cases} \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}, & n\text{ 为正偶数}; \\ \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{2}{3} \cdot 1, & n\text{ 为大于 1 的奇数} \end{cases}$$

例 3.10 （数学二，2015）设 D 是第一象限中由曲线 $2xy = 1$，$4xy = 1$ 与直线 $y = x$，$y = \sqrt{3}x$ 围成的平面区域，函数 $f(x,y)$ 在 D 上连续，则$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$

(A) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \mathrm{d}\theta \int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\mathrm{d}r$.　　(B) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \mathrm{d}\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\mathrm{d}r$.

(C) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \mathrm{d}\theta \int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) \mathrm{d}r$.　　(D) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \mathrm{d}\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) \mathrm{d}r$.

【解】 曲线 $2xy = 1$，$4xy = 1$ 的极坐标方程分别为 $r = \frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}$，$r = \frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}$，直线 $y = x$，$y = \sqrt{3}x$ 的极坐标方程分别为 $\theta = \frac{\pi}{4}$，$\theta = \frac{\pi}{3}$. 化成极坐标系下的二次积分为

$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \mathrm{d}\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\mathrm{d}r$，(B) 为正确选项.

例 3.11 （数学二，2007）设二元函数

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2, & |x| + |y| \leqslant 1, \\ \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & 1 < |x| + |y| \leqslant 2, \end{cases}$$

计算二重积分$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$，其中，$D = \{(x,y) \mid |x| + |y| \leqslant 2\}$.

【解】 记 D_1 为积分区域 D 的第一象限部分，由于积分区域 D 关于 x，y 轴均对称，函数