KAOYAN SHUXUE
LINIAN ZHENTI MINGSHI JIEXI

# 考研数学
# 历年真题名师解析

## 数学三

薛威 编

**11年真题解析，冲刺高分的经典题型盘点**

- 分门别类，方便检索，精确定位知识点
- 新东方名师编写，真题解析详尽，思路开阔
- 解析与试卷独立成册，复习训练两不误

化学工业出版社

# 考研数学

# 历年真题名师解析

## 数学三

薛威 编

化学工业出版社
·北京·

《考研数学历年真题名师解析·数学三》根据2008~2018年共11年来考研大纲的知识重点与变化编写而成，对考研数学三的知识点进行了全面的梳理，将其分门别类整理出重点知识，并对11年来的真题进行了详尽的解析，根据题型进行专项训练，帮助考研学生举一反三掌握好相关知识，轻松应对考试。为配合题型讲解进行模拟训练，本书附有《考研数学真题试卷·数学三》，帮助考生全面把握出题形式。

本书解析步骤详尽，方法易懂，是编者近年来教学经验的总结与凝练，助力考生提高复习效率，冲刺考研高分。

**图书在版编目（CIP）数据**

考研数学历年真题名师解析. 数学三/薛威编. —北京：化学工业出版社，2018.10

ISBN 978-7-122-32714-7

Ⅰ.①考… Ⅱ.①薛… Ⅲ.①高等数学—研究生—入学考试—题解 Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字（2018）第162260号

责任编辑：旷英姿　　装帧设计：关　飞

责任校对：边　涛

出版发行：化学工业出版社（北京市东城区青年湖南街13号　邮政编码100011）

印　　装：三河市双峰印刷装订有限公司

787mm×1092mm　1/16　印张24　字数440千字　2018年10月北京第1版第1次印刷

购书咨询：010-64518888（传真：010-64519686）　　售后服务：010-64518899

网　　址：http://www.cip.com.cn

凡购买本书，如有缺损质量问题，本社销售中心负责调换。

定　　价：62.00元

# 目　　录

# 第一部分

# 高等数学

# 第一章　函数极限连续

**本章重点**：掌握极限问题、无穷小量阶的问题、极限的反问题（已知极限求表达式中的参数），这些是常考的内容；熟练掌握七种未定式转换、等价无穷小量化简，洛必达法则和泰勒公式求极限；掌握定积分定义求极限、夹逼准则和单调有界原理求数列极限的方法；会处理变限积分形式的极限；了解间断点的类型判断和连续函数的性质出现的频率低些.

## 1.等价无穷小化简常用公式（乘除法可以用，加法减法不可以）

当 $x\to 0$ 时：

$x-\sin x\sim\frac{1}{6}x^3$，$\tan x-x\sim\frac{1}{3}x^3$，$\tan x-\sin x\sim\frac{1}{2}x^3$，$\arcsin x-x\sim\frac{1}{6}x^3$，$x-\arctan x\sim\frac{1}{3}x^3$，

$\arcsin x-\arctan x\sim\frac{1}{2}x^3$，$a^x-1=e^{x\ln a}-1\sim x\ln a$，$(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$，$x-\ln(1+x)\sim\frac{1}{2}x^2$.

## 2.求极限中常用泰勒公式（背熟练）

$\sin x=x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$，$\cos x=1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$，$\tan x=x+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$，

$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$，$e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$，$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+o(x^2)$.

## 3.求极限最常用的方法

（1）幂指转换 $f(x)^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)}$.

（2）等价无穷小化简.

（3）洛必达法则和泰勒公式（近年题目要求熟练掌握泰勒公式）.

## 4.无穷小量的阶的概念

当 $x\to x_0$ 时，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$：

（1）$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=0$，称 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的高阶无穷小，记为 $f(x)=o(g(x))$.

（2）$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty$，称 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的低阶无穷小.

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=C\neq 0$,称$f(x)$是$g(x)$的同阶无穷小,记为$f(x)=O(g(x))$.

(4) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$,称$f(x)$是$g(x)$的等价无穷小,记为$f(x)\sim g(x)$.

(5) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g^k(x)}=C\neq 0$,称$f(x)$是$g(x)$的$k$阶无穷小.

### 5. 极限反问题的两个重要定理

(1)已知 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A$,$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$,则$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$.

(2)已知 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=B\neq 0$,$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$,则$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$.

这两个重要定理多用于无穷小量的阶的问题,反求表达式中的参数.

### 6.定积分定义求极限

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

### 7.间断点解题步骤

(1)找出无定义的间断点(例如分母为零的点).

(2)求间断点的左右极限.

(3)判断间断点的类型.

## 题型 1.1.1 函数的概念和性质

(2002 年,数学二/数学四)

设函数$f(x)$连续,则下列函数中,必为偶函数的是(　　).

(A) $\int_0^x f(t^2)\,\mathrm{d}t$　　(B) $\int_0^x f^2(t)\,\mathrm{d}t$

(C) $\int_0^x t[f(t)-f(-t)]\,\mathrm{d}t$　　(D) $\int_0^x t[f(t)+f(-t)]\,\mathrm{d}t$

【解析】 设$F(x)=\int_0^x t[f(t)+f(-t)]\,\mathrm{d}t$,则

$$F(-x)=\int_0^{-x} t\,[f(t)+f(-t)]\,\mathrm{d}t$$

$$\xlongequal{\text{令 } u=-t}\int_0^x(-u)[f(-u)+f(u)]\,\mathrm{d}(-u)$$

$$=\int_0^x u[f(u)+f(-u)]\,\mathrm{d}u=F(x).$$

即 $F(x)$ 是偶函数,(D)是正确的.

类似方法可以证明(A)(C)均为奇函数.对于(B)选项,因为

$$\int_0^{-x} f^2(t)\,\mathrm{d}t \xlongequal{u=-t} \int_0^x -f^2(-t)\,\mathrm{d}t,$$

不是偶函数.

(2005 年,数学一/数学二)

设 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 的一个原函数,“$M \Leftrightarrow N$”表示“$M$ 的充分必要条件是 $N$”,则必有( ).

(A) $F(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是奇函数　(B) $F(x)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是偶函数

(C) $F(x)$ 是周期函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是周期函数 (D) $F(x)$ 是单调函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是单调函数

**【解析】** 当取 $f(x)=\cos x+1$, $F(x)=\sin x+x+1$ 时,可判断(B)(C)(D)不正确. 故选项(A)正确.

(2005 年,数学三/数学四)

以下四个命题中,正确的是( ).

(A)若 $f'(x)$ 在 $(0, 1)$ 内连续,则 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有界

(B)若 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内连续,则 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有界

(C)若 $f'(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有界,则 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有界

(D)若 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有界,则 $f'(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有界

**【解析】** 若取 $f(x)=\ln x$,则 $f'(x)=\dfrac{1}{x}$,可知选项(A)和(B)都不正确.若取 $f(x)=\sqrt{x}$,则 $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$,可知选项(D)是不正确的.故选项(C)正确.

(2014 年,数学一/数学二)

设 $f(x)$ 是周期为 4 的可导奇函数,且 $f'(x)=2(x-1)$, $x\in[0, 2]$,则 $f(7)=$ ________.

**【解析】** 因为 $f(x)$ 是周期为 4 的奇函数,所以 $f'(x)$ 是周期为 4 的偶函数.如图 1.1.1 所示是 $y=f'(x)$ 在 $[-2, 2]$ 上的图像,其在第三象限中与坐标轴围成的三角形的面积为 1.

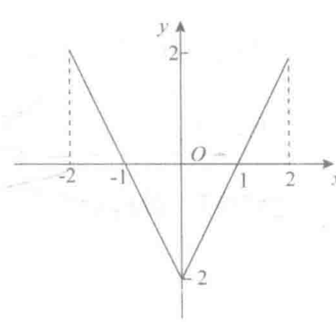

图 1.1.1

因为 $f(-1)-f(0)=\int_0^{-1} f'(x)\,\mathrm{d}x=1$,且 $f(0)=0$, $f(x)$ 的周期为 4,所以

$$f(7)=f(7-2\times4)=f(-1)=1.$$

## 题型 1.1.2 极限的概念和性质

(2014 年,数学三)

设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,且 $a\neq0$,则当 $n$ 充分大时有(　　).

(A) $|a_n|>\dfrac{|a|}{2}$　(B) $|a_n|<\dfrac{|a|}{2}$　(C) $a_n>a-\dfrac{1}{n}$　(D) $a_n<a+\dfrac{1}{n}$

**【解析】** 由题设知 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|a|$,当 $n$ 充分大时,有 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|a|>\dfrac{|a|}{2}$.故选(A).

(2015 年,数学三)

设$\{x_n\}$是数列,下列命题中不正确的是(　　).

(A) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,则$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}=a$

(B) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}=a$,则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$

(C) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,则$\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n+1}=a$

(D) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n+1}=a$,则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$

**【解析】** 例证法,设 $x_{3n}=1+\dfrac{1}{3n}$,$x_{3n+1}=1+\dfrac{1}{3n+1}$,$x_{3n+2}=2+\dfrac{1}{3n+2}$,则$\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n}=1$,$\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n+1}=1$,但 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n+2}=2$,故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n\neq1$.故选(D).

(2017 年,数学二)

设数列$\{x_n\}$收敛,则(　　).

(A) 当 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin x_n=0$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$　(B) 当 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+\sqrt{|x_n|})=0$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$

(C) 当 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+x_n^2)=0$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$　(D) 当 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+\sin x_n)=0$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$

**【解析】** 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,则

$\lim\limits_{n\to\infty}\sin x_n=\sin a=0$,$\sin a=0$,有无穷多个解,不收敛.

$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+\sqrt{|x_n|})=a+\sqrt{|a|}=0$,则 $a=0$ 或 $a=-1$,不收敛.

$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+x_n^2)=a+a^2=0$,则 $a=0$ 或 $a=-1$,不收敛.

于是(A)(B)(C)被排除.故选(D).

## 题型 1.1.3 数列极限的计算

(2008 年,数学一/数学二)

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调有界,$\{x_n\}$ 为数列,下列命题正确的是( ).

(A)若 $\{x_n\}$ 收敛,则 $\{f(x_n)\}$ 收敛　　(B)若 $\{x_n\}$ 单调,则 $\{f(x_n)\}$ 收敛

(C)若 $\{f(x_n)\}$ 收敛,则 $\{x_n\}$ 收敛　　(D)若 $\{f(x_n)\}$ 单调,则 $\{x_n\}$ 收敛

**【解析】** 在选项(B)中,因为数列 $\{x_n\}$ 单调,考虑到 $f(x)$ 是一个单调有界函数,所以数列 $\{f(x_n)\}$ 不仅单调,而且有界,由单调有界原理,从而收敛.故选(B).

(2006 年,数学一/数学二)

设数列 $\{x_n\}$ 满足 $0<x_1<\pi, x_{n+1}=\sin x_n (n=1,2,\cdots)$.

(Ⅰ)证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在,并求该极限;

(Ⅱ)计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$.

**【证明】** (Ⅰ)当 $0<x<\pi$ 时,有 $0<\sin x<x$,当 $0<x_n<\pi$ 时,有

$$0<x_{n+1}=\sin x_n<x_n<\pi.$$

已知 $0<x_1<\pi$,由数学归纳法知对一切 $n=1,2,\cdots$,有 $0<x_{n+1}=\sin x_n<x_n$,即 $\{x_n\}$ 单调减少且 $x_n>0$.由单调有界准则知 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在,记为 $a$,且 $a\geqslant 0$.

等式 $x_{n+1}=\sin x_n$ 两边令 $n\to\infty$ 取极限,得 $a=\sin a$.

由于 $f(x)=x-\sin x$,当 $0<x<\pi$ 时,$f'(x)=1-\cos x>0$,易知 $x=0$ 是解且唯一.故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$.

**【解析】** (Ⅱ)因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sin x_n}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$,当 $n\to\infty$ 时 $x_n\to 0$,考虑函数极限:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}=\lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)}=\lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2}\ln\left(1+\frac{\sin x}{x}-1\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0} e^{\frac{\sin x-x}{x^3}}=\lim_{x\to 0} e^{\frac{\cos x-1}{3x^2}}=\lim_{x\to 0} e^{\frac{-\frac{1}{2}x^2}{3x^2}}=e^{-\frac{1}{6}}.$$

从而　　原式 $=e^{-\frac{1}{6}}$.

(2009 年,数学二)

$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 e^{-x}\sin nx\,dx=$ ________.

**【解析】** 令 $I_n=\int e^{-x}\sin nx\,dx=-e^{-x}\sin nx+n\int e^{-x}\cos nx\,dx$

$$=-e^{-x}\sin nx-ne^{-x}\cos nx-n^2I_n,$$

所以
$$I_n=-\frac{(\sin nx+n\cos nx)e^{-x}}{n^2+1}+C,$$

即
$$\text{原式}=\lim_{n\to\infty}\left[-\frac{(n\cos nx+\sin nx)e^{-x}}{n^2+1}\Bigg|_0^1\right]$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left[-\frac{(n\cos n+\sin n)e^{-1}}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+1}\right]=0.$$

(2011 年,数学一/数学二)

(Ⅰ)证明:对任意的正整数 $n$,都有$\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$成立;

(Ⅱ)设 $a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\quad(n=1,2,\cdots)$,证明数列$\{a_n\}$收敛.

**【证明】** (Ⅰ)**【方法 1】** 令 $F(x)=x-\ln(1+x)\ (x>0)$,则 $F'(x)=1-\frac{1}{1+x}>0\ (x>0)$,即当 $x>0$ 时 $F(x)$ 单调增加.又 $F(0)=0$,所以 $F(x)>0\ (x>0)$,从而

$$F'\left(\frac{1}{n}\right)>0,\text{即}\ \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}.$$

再令 $G(x)=\ln(1+x)-\frac{x}{1+x}\ (x>0)$,则 $G'(x)=\frac{x}{(1+x)^2}>0\ (x>0)$,$G(x)\ (x>0)$单调增加.又 $G(0)=0$,所以 $G(x)>0\ (x>0)$,从而

$$G\left(\frac{1}{n}\right)>0,\ \text{即}\ \frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

综上可知,有 $\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$.

**【方法 2】** 令 $f(x)=\ln x\ (x>0)$.对任意正整数 $n$,在$[n,\ n+1]$连续,$(n,\ n+1)$上可导,根据拉格朗日中值定理,得

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln(1+n)-\ln n=\frac{1}{\xi},\text{其中}\ n<\xi<n+1,$$

所以
$$\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}.$$

(Ⅱ)**【方法 1】** 由(Ⅰ)知,当 $n\geqslant1$ 时,有

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<0,$$

$$a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$$

$$>\ln(1+1)+\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\ln n$$

$$=\ln(1+n)-\ln n>0,$$

故数列$\{a_n\}$单调减少且有下界,所以$\{a_n\}$收敛.

**【方法 2】** 因为

$$a_n=\frac{1}{n}+\sum_{k=1}^{n-1}\left[\frac{1}{k}-\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\right],\text{且}\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\sim\frac{1}{2n^2}(n\to\infty).$$

又$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$,级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛,所以数列$\{a_n\}$收敛.

(2012 年,数学二)

设$a_n>0(n=1,2,\cdots)$,$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$,则数列$\{S_n\}$有界是数列$\{a_n\}$收敛的(　　).

(A)充分必要条件　　(B)充分非必要条件

(C)必要非充分条件　　(D)既非充分也非必要条件

**【解析】** 因为$a_n>0(n=1,2,\cdots)$,所以数列$\{S_n\}$是单调增加的.

如果$\{S_n\}$有界,根据单调有界准则,知$\{S_n\}$的极限存在,记$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$.由此可得

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1})=S-S=0.$$

即数列$\{a_n\}$收敛.可知数列$\{S_n\}$有界是数列$\{a_n\}$收敛的充分条件.

但是,若$\{a_n\}$收敛,$\{S_n\}$却未必有界.例如,取$a_n=1(n=1,2,\cdots)$,则$\{a_n\}$收敛,但$\{S_n\}=n$无上界.可见$\{S_n\}$有界并非是$\{a_n\}$收敛的必要条件.故选(B).

(2012 年,数学二)

$\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\frac{1}{1+n^2}+\frac{1}{2^2+n^2}+\cdots+\frac{1}{n^2+n^2}\right)=$ ________.

**【解析】**

$$\text{原式}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{1+n^2}+\frac{n^2}{2^2+n^2}+\cdots+\frac{n^2}{n^2+n^2}\right)\cdot\frac{1}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2}+\cdots+\frac{1}{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2}\right]\cdot\frac{1}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\arctan x\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}.$$

(2012 年,数学二)

(Ⅰ)证明方程 $x^n+x^{n-1}+\cdots+x=1$($n$ 为大于 1 的整数)在区间$\left(\frac{1}{2},1\right)$有且仅有一个实根;

(Ⅱ)记(Ⅰ)中的实根为 $x_n$,证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在,并求此极限.

**【证明】** (Ⅰ)令 $f(x)=x^n+x^{n-1}+\cdots+x-1(n>1)$,则 $f(x)$ 在$\left[\frac{1}{2},1\right]$上连续,且

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}-1=-\frac{1}{2^n}<0,\ f(1)=n-1>0,$$

由闭区间上连续函数的零点定理知,方程 $f(x)=0$ 在$\left(\frac{1}{2},1\right)$内至少有一个实根.

当 $x\in\left(\frac{1}{2},1\right)$时,$f'(x)=nx^{n-1}+(n-1)x^{n-2}+\cdots+2x+1>1>0$,故 $f(x)$ 在$\left(\frac{1}{2},1\right)$内单调增加.

综上所述,方程 $f(x)=0$ 在$\left(\frac{1}{2},1\right)$内有且仅有一个实根.

(Ⅱ)由 $x_n\in\left(\frac{1}{2},1\right)$知数列$\{x_n\}$有界,又

$$x_n^n+x_n^{n-1}+\cdots+x_n=1,\quad x_{n+1}^{n+1}+x_{n+1}^n+x_{n+1}^{n-1}+\cdots+x_{n+1}=1.$$

因为 $x_{n+1}^{n+1}>0$,所以 $x_n^n+x_n^{n-1}+\cdots+x_n>x_{n+1}^n+x_{n+1}^{n-1}+\cdots+x_{n+1}$,于是有 $x_n>x_{n+1}$,$n=1,2,\cdots$即$\{x_n\}$单调减少.综上所述数列$\{x_n\}$单调有界,故$\{x_n\}$收敛.

记 $a=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.由于$\frac{x_n-x_n^{n+1}}{1-x_n}=1$,令 $n\to\infty$ 并注意到$\frac{1}{2}<x_n<x_1<1$,则有$\frac{a}{1-a}=1$,解得 $a=\frac{1}{2}$,即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{2}$.

(2013 年,数学二)

设函数 $f(x)=\ln x+\frac{1}{x}$.

(Ⅰ)求 $f(x)$ 的最小值;

(Ⅱ)设数列$\{x_n\}$满足 $\ln x_n+\frac{1}{x_{n+1}}<1$.证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在,并求此极限.

**【解析】** (Ⅰ)$f'(x)=\frac{x-1}{x^2}$,令 $f'(x)=0$,解得 $f(x)$ 的唯一驻点 $x=1$.

又 $f''(1)=\left.\dfrac{2-x}{x^3}\right|_{x=1}=1>0$，故 $f(1)=1$ 是唯一极小值，即最小值.

（Ⅱ）由（Ⅰ）的结果知 $\ln x+\dfrac{1}{x}\geqslant 1$，从而有 $\ln x_n+\dfrac{1}{x_{n+1}}<1\leqslant \ln x_n+\dfrac{1}{x_n}$，于是 $x_n\leqslant x_{n+1}$，即数列 $\{x_n\}$ 单调增加.

又由题设知 $\ln x_n$ 有意义，故 $x_n>0$，于是 $x_{n+1}>0$；故由 $\ln x_n+\dfrac{1}{x_{n+1}}<1$，知 $\ln x_n<1$. 因此 $x_n<\mathrm{e}$. 从而数列 $\{x_n\}$ 单调增加，且有上界，故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

记 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，可知 $a\geqslant x_1>0$. 在 $\ln x_n+\dfrac{1}{x_{n+1}}<1$ 两边取极限，得 $\ln a+\dfrac{1}{a}\leqslant 1$，又由（Ⅰ）知：$\ln a+\dfrac{1}{a}\geqslant 1$，故 $\ln a+\dfrac{1}{a}=1$，可得 $a=1$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$.

（2016 年，数学二/数学三）

极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\left(\sin\dfrac{1}{n}+2\sin\dfrac{2}{n}+\cdots+n\sin\dfrac{n}{n}\right)=$ ________.

**【解析】**

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}+\frac{2}{n}\sin\frac{2}{n}+\cdots+\frac{n}{n}\sin\frac{n}{n}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\frac{k}{n}\sin\frac{k}{n}\\&=\int_0^1 x\sin x\,\mathrm{d}x=-\int_0^1 x\,\mathrm{d}\cos x\\&=-x\cos x\Big|_0^1+\int_0^1\cos x\,\mathrm{d}x=\sin 1-\cos 1.\end{aligned}$$

（2018 年，数学一/数学二/数学三）

设数列 $\{x_n\}$ 满足，$x_1>0$，$x_n\mathrm{e}^{x_{n+1}}=\mathrm{e}^{x_n}-1$. 证：数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

**【证明】** 先证 $\{x_n\}$ 有界性. 设 $f(x)=\mathrm{e}^x-1-x$，$x>0$，则有

$$f'(x)=\mathrm{e}^x-1>0,$$

因此 $f(x)$ 在 $x=0$ 取最小值，故 $f(x)>f(0)=0$，$\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x}>1$，易证得

$$\mathrm{e}^{x_{n+1}}=\frac{\mathrm{e}^{x_n}-1}{x_n}>1.$$

即 $x_{n+1}>0$. 故 $x_n$ 有下界.

再证 $\{x_n\}$ 的单调性，由拉格朗日中值定理得

$$e^{x_{n+1}}=\frac{e^{x_n}-1}{x_n}=\frac{e^{x_n}-e^0}{x_n-0}=e^{\xi},\xi\in(0,\ x_n).$$

故 $x_{n+1}=\xi<x_n$,数列$\{x_n\}$单调减少.由单调有界原理可知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,则有 $ae^a=e^a-1$;又因为当 $x>0$ 时,$g(x)=xe^x-e^x+1$ 的导数$g'(x)=xe^x>0$,故 $g(x)$只有唯一的零点 $x=0$,所以 $a=0$.

## 题型 1.1.4 函数极限的计算

(2008 年,数学一/数学二)

求极限$\lim\limits_{x\to0}\frac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}$.

**【解析】**

$$原式=\lim_{x\to0}\frac{\sin x-\sin(\sin x)}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-\cos(\sin x)\cos x}{3x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos(\sin x)}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}\sin^2x}{3x^2}=\frac{1}{6}.$$

(2008 年,数学三)

计算$\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x}$.

**【解析】**

$$原式=\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{\sin x}{x}-1\right)$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{3x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=-\frac{1}{6}.$$

(2009 年,数学二)

求极限$\lim\limits_{x\to0}\frac{(1-\cos x)[x-\ln(1+\tan x)]}{\sin^4x}$.

**【解析】**

$$原式=\lim_{x\to0}\frac{x-\ln(1+\tan x)}{2x^2}=\lim_{x\to0}\frac{1-\frac{\sec^2x}{1+\tan x}}{4x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1+\tan x-\sec^2x}{4x}=\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\tan^2x}{4x}=\frac{1}{4}.$$

(2009 年,数学三)

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e-e^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}=$______.

【解析】 原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e-e^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e-e^{\cos x}}{\frac{1}{3}x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\cos x}\sin x}{\frac{2}{3}x}=\dfrac{3}{2}e.$

(2010 年,数学一)

极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right]^x=($ $)$.

(A)1　　(B)e　　(C)$e^{a-b}$　　(D)$e^{b-a}$

【解析】 当 $a=b$ 时,

$$原式=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a^2}{x^2-a^2}\right)^{\frac{x^2-a^2}{a^2}\cdot\frac{a^2}{x^2-a^2}\cdot x}=e^0=1;$$

当 $a\neq b$ 时,

$$原式=\lim_{x\to\infty}\left[1+\frac{(a-b)x+ab}{(x-a)(x+b)}\right]^{\frac{(x-a)(x+b)}{(a-b)x+ab}\cdot\frac{(a-b)x+ab}{(x-a)(x+b)}\cdot x}=e^{a-b}.$$

故选(C).

(2010 年,数学三)

设 $f(x)=\ln^{10}x,g(x)=x,h(x)=e^{\frac{x}{10}}$,则当 $x$ 充分大时有(　　).

(A)$g(x)<h(x)<f(x)$　　(B)$h(x)<g(x)<f(x)$

(C)$f(x)<g(x)<h(x)$　　(D)$g(x)<f(x)<h(x)$

【解析】 由于

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln^{10}x}=+\infty,\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{h(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{x}{10}}}{x}=+\infty,$$

所以当 $x$ 充分大时,有 $f(x)<g(x)<h(x)$.故选(C).

(2010 年,数学三)

求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^{\frac{1}{x}}-1)^{\frac{1}{\ln x}}$.

【解析】 设 $y=(x^{\frac{1}{x}}-1)^{\frac{1}{\ln x}}$,则 $\ln y=\dfrac{\ln(x^{\frac{1}{x}}-1)}{\ln x}=\dfrac{\ln(e^{\frac{\ln x}{x}}-1)}{\ln x}.$

因为 $$\lim_{x\to+\infty}\ln y=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(e^{\frac{\ln x}{x}}-1\right)}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{xe^{\frac{\ln x}{x}}}{e^{\frac{\ln x}{x}}-1}\cdot\frac{1-\ln x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1-\ln x}{x}}{e^{\frac{\ln x}{x}}-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{-2+\ln x}{x^2}}{e^{\frac{\ln x}{x}}\frac{1-\ln x}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2+\ln x}{1-\ln x}=-1,$$

所以 原式 $=e^{-1}$.

(2011 年,数学一)

求极限 $\lim_{x\to0}\left[\frac{\ln(1+x)}{x}\right]^{\frac{1}{e^x-1}}$.

【解析】 因为 $$\left[\frac{\ln(1+x)}{x}\right]^{\frac{1}{e^x-1}}=\left\{1+\left[\frac{\ln(1+x)-x}{x}\right]\right\}^{\frac{x}{\ln(1+x)-x}\cdot\frac{\ln(1+x)-x}{x}\cdot\frac{1}{e^x-1}}.$$

$$\lim_{x\to0}\left[\frac{\ln(1+x)-x}{x}\right]\cdot\frac{1}{e^x-1}=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-1}{2(1+x)}=-\frac{1}{2},$$

所以 原式 $=\frac{1}{\sqrt{e}}$.

(2011 年,数学二)

$\lim_{x\to0}\left(\frac{1+2^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=$ ________.

【解析】 原式 $=\lim_{x\to0}\left(1+\frac{2^x-1}{2}\right)^{\frac{2}{2^x-1}\cdot\frac{2^x-1}{2x}}=\lim_{x\to0}e^{\frac{2^x-1}{2x}}=e^{\frac{\ln2}{2}}=\sqrt{2}$.

(2011 年,数学三)

设 $f(x)=\lim_{t\to0}x(1+3t)^{\frac{x}{t}}$,则 $f'(x)=$ ________.

【解析】 由于 $f(x)=\lim_{t\to0}x(1+3t)^{\frac{x}{t}}=x\lim_{t\to0}\left[(1+3t)^{\frac{1}{3t}}\right]^{3x}=xe^{3x}$,

所以 $$f'(x)=e^{3x}+3xe^{3x}=(1+3x)e^{3x}.$$