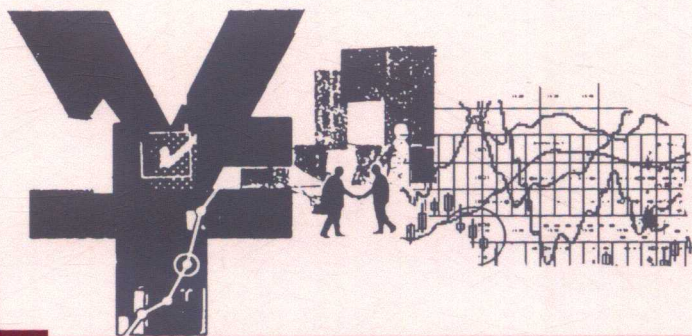



经济与管理研究文库

# 自回归条件持久 (ACD) 模型 及其应用研究

■ 王江涛 著



 华中师范大学出版社

F830.91

427

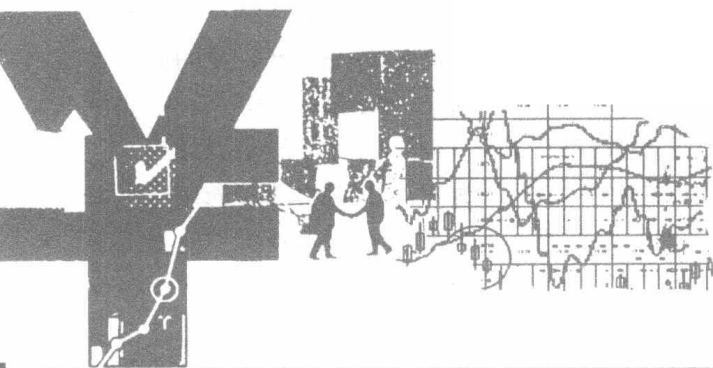
经济与管理研究文库


01-3

本书得到教育部人文社会科学研究青年项目基金  
(15YJC910007) 的资助。

# 自回归条件持久 (ACD) 模型 及其应用研究

■ 王江涛 著



 华中师范大学出版社

# 新出图证(鄂)字10号

## 图书在版编目(CIP)数据

自回归条件持久(ACD)模型及其应用研究/王江涛著. —武汉:华中师范大学出版社, 2018.6  
(经济与管理研究文库)

ISBN 978-7-5622-8269-3

I. ①自… II. ①王… III. ①证券投资—经济模型—研究 IV. ①F830.91

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第145677号

## 自回归条件持久(ACD)模型及其应用研究

© 王江涛 著

责任编辑:史小艳

责任校对:缪玲

封面设计:甘英胡灿

编辑室:学术出版中心

电话:027-67867792

出版发行:华中师范大学出版社有限责任公司

社址:湖北省武汉市洪山区珞喻路152号

邮编:430079

电话:027-67863426(发行部)

传真:027-67863291

网址:<http://press.ccnu.edu.cn>

电子信箱:[press@mail.ccnu.edu.cn](mailto:press@mail.ccnu.edu.cn)

印刷:北京虎彩文化传播有限公司

督印:王兴平

开本:710mm×1000mm 1/16

印张:15.75

字数:223千字

版次:2018年6月第1版

印次:2018年6月第1次印刷

定价:38.00元

欢迎上网查询、购书

敬告读者:欢迎举报盗版,请打举报电话027-67861321



# 前 言

过去大多数金融实证研究所使用的数据都是日间数据，这种数据只注重每天开始或结束时的状态而忽视了交易日中所有交易过程所蕴含的信息。随着资本市场自动化程度的提高和计算机技术的进步，这种现象得到了改观。现在每个交易中心都建立了记录每个单独交易信息的高频数据库，从这些高频数据中我们可以知道交易过程中发生的每个交易的信息，其中的信息包括交易发生的时间、交易的价格以及交易量等<sup>①</sup>。这些高频数据中的交易信息能让人们进一步研究资本市场的行为，进而使高频数据成为包括金融学、数量经济及时间序列分析等领域内研究的热点。许多杂志都针对高频数据进行过专题研究，许多国际会议都将高频数据的相关问题设定为中心议题。

高频数据的一个重要特征是每个数据间的时间间隔是不均等的，这一特征使得以前的各种计量经济的标准方法不再适用。根据相关的市场微观结构理论，这些不均等的时间间隔包含了许多市场信息，且这些信息必须出现于模型中。根据这些情况，Engle 和 Rusell 在 1982 年提出了描述交易时间间隔的自回归条件持久模型(ACD)<sup>[76]</sup>。自 ACD 模型被构建以来，该模型及其扩展形式就成为研究非均匀时间间隔金融数据的主要工具。随后，关于 ACD 模型的研究在条件期望表达形式的扩展、随机误差项所服从概率分布的设定和 ACD 模型的实际应

---

<sup>①</sup> 本书所使用的分时高频数据中每一次记录的信息包括：证券代码；交易日期；交易时间；交易价格；累积交易量；累积交易总额；买价一到买价五及其对应的等待买量；卖价一到卖价五及其对应的等待卖量。



用等方面得到了迅猛发展。

从本质上看,人们通常提及的模型,如 GARCH 模型和 ACD 模型等,都是某种类型的随机方程。方程的解,即模型刻画的随机过程才是大家最感兴趣的对象。当把模型应用于实际数据时,一个基本问题是要求模型的解是二阶平稳的。如果实际问题中还需要考虑数据趋势问题,则要求模型的解存在高阶矩。这些问题的解决都完全依赖于模型定义的要素,其中主要包括模型的表达形式、系数和误差项的假定等。在模型建立之后,如果能通过对模型的研究得到模型平稳解存在的条件、解高阶矩存在的条件和解的相关结果等理论性质,那么将模型应用于实际数据中的合理性就能得到极大的提高,这些理论将对模型的实际应用有着重要的指导作用。尽管目前已有很多关于 ACD 模型的理论研究结果,但这些结果都只是针对某种具体的具有特殊形式的模型[如  $ACD(p, q)$  模型和 LMACD 模型]建立的。同时,这方面还有一些问题没有完全解决,如高阶矩存在的充分必要条件等。如果能构建一种具有统一形式的 ACD 模型,使其能包含现存的 ACD 模型,同时这种统一形式的 ACD 模型的各种理论问题又能够彻底地被解决,则对指导各种 ACD 模型的实际应用具有重要的意义。

ACD 模型构建的初衷是描述高频数据中不相等的时间间隔,并以此为基础来理解和分析市场微观结构和市场微观结构理论。这使得 ACD 模型成为定量研究市场微观结构理论的方法之一。我国证券市场起步比较晚,目前还处在逐步发展壮大的阶段,所以用 ACD 模型对中国证券市场微观结构及其理论进行定量的分析,对完善和发展中国证券市场微观结构理论并以此为基础建立有效而又透明的证券交易市场有重要的作用。但是对中国证券市场微观结构理论的研究是从最近二十年开始的,所有的研究工作中定性分析的较多,用 ACD 模型深入、精细地定量分析国内证券市场微观结构理论的工作不多。同时,值得指出的是,最近有关 ACD 模型应用方面的研究呈现出两种趋势:将 ACD 模型与其他相关的模型结合一起使用,如 ACD-GARCH 模型(陈敏等, 2003)<sup>[4]</sup>和用来描述其他经济事件的时间间隔,如公司重组、央行新政策的颁布等。事实上,任何一个模型都可以应用于描述和分析多种情况下的数据,只要产生数据的机制满足模型定义的要求即可。ACD 模型应用研究方面的这两种趋势对模型本身的扩展和研究领域的扩展起着建设性指导作用,但是 ACD 模型在这两个方面的工作仅处于起步阶段。

鉴于上述介绍的情况,全书的工作主要集中在对 ACD 模型理论问题的研究

以及模型应用领域的扩展两个方面。全书大致可分为两大部分，第一部分为理论部分，包括第一、二、三章。其中第一章介绍了现存的各种 ACD 模型；第二章提出了一类非中心化 ACD 模型并讨论了这一类模型的性质；第三章提出了一类新的中心化的 ACD 模型并研究了其具有的性质。第二部分为应用部分，包括第四至第八章。在第四章中，我们将 ACD 模型应用于分析国内证券市场微观结构理论；第五章系统地介绍了真实波动的各种非参数估计方法的基本思想以及大样本性质并对比分析了真实波动的这些估计方法的异同，为后续的研究作铺垫；第六章对真实波动非参数核估计中的窗宽选择问题进行了深入的讨论，成功地解决了最优窗宽的确定问题；第七章是在第六章的基础上，进一步考虑瞬时波动率度量的相关问题；第八章用 ACD 模型的最新扩展形式来分析波动数据。最后是全文的总结与未来研究的展望。各章具体的内容如下：

在第一章中，我们首先介绍了 ACD 模型的定义，并在此基础上从离散随机过程中强度函数演变的角度阐释了定义 ACD 模型的理论基础以及模型的根本假设条件。接着我们将目前出现的各种 ACD 模型分为短记忆和长记忆两种类型，分别介绍了两种类型中具有典型代表性的模型，其中包括各种常见的短记忆 ACD 模型和两种常见的长记忆 ACD 模型：FIACD 模型和 LMACD 模型。最后我们简单地讨论了常见 ACD 模型，特别是长记忆 ACD 模型的估计方法。

在第二章中，我们引进了一类非中心化 ACD 模型，记为  $ACD_1(\infty)$  模型。根据该模型中系数之和是否为 1，将模型分为两类<sup>①</sup>：短记忆  $ACD_1(\infty)$  模型和长记忆  $ACD_1(\infty)$  模型。短记忆  $ACD_1(\infty)$  模型包括了常见的  $ACD(p, q)$  模型，而 FIACD 模型则是长记忆  $ACD_1(\infty)$  模型的一种特例。应用 Volterra 展开的方法，我们分别研究了  $ACD_1(\infty)$  模型在系数之和是否为 1 这两种情况下的性质，得到了模型平稳解和各阶矩存在的条件。随后，我们进一步研究了 HYACD 模型和 SEMIACD 模型的性质，发现 HYACD 模型的解是短记忆的。最后，我们讨论了长记忆  $ACD_1(\infty)$  模型中有待进一步研究的几个问题。

在第三章中，由于常见的 LMACD 模型不属于  $ACD_1(\infty)$  模型，为了 ACD 模型研究的完整性，我们提出了一类中心化 ACD 模型，即  $DACD(\infty)$  模型。该模型也可以根据其系数的和是否为 1 分为两种情况<sup>②</sup>。根据对  $ACD_1(\infty)$  模型与

① 根据模型的定义，所有的系数之和不可能大于 1，详细的论证见模型的定义。

② 中心化 ACD 模型中的系数之和也不可能大于 1，其原因与非中心 ACD 模型的一样。

$DACD(\infty)$ 模型之间关系的研究,我们发现,当所有的系数之和小于1时,两种模型之间可以相互转换;当系数之和等于1时,这两种模型就完全不同,而常见的LMACD模型属于 $DACD(\infty)$ 模型。在模型定义的基础上,我们得出了 $DACD(\infty)$ 模型的正交Volterra展开式并研究了模型的理论性质,得到了模型平稳解存在的条件和解的相关性的性质。然后,以LMACD模型作为 $DACD(\infty)$ 模型的特例,我们研究了模型的系数对长记忆效果的影响。随后对比分析了 $DACD(\infty)$ 模型与LARCH模型的定义,发现 $DACD(\infty)$ 模型与LARCH模型之间存在一种重要关系,利用这种关系我们研究了 $DACD(\infty)$ 模型高阶矩存在的条件,为LMACD模型后续的应用提供理论基础。本节最后,我们对全书的理论部分进行了总结。

在第四章中,我们将ACD模型应用于检验和分析国内证券市场微观结构的相关理论。首先,介绍了市场微观结构的相关理论,包括存货模型理论、信息模型理论和中国证券市场微观结构的特征。接着,分析了定量研究市场微观结构理论的方法,说明了所构建模型的理论基础和新指标创建的原则和意义。然后,对模型中所用到的数据和处理数据的方法进行了说明,其中包括非参数回归方法及其对应的窗宽选择的介绍和数据日间模式的分析。最后,用处理后的数据对模型进行估计并分析了实证结果。

在第五章中,首先,介绍了已实现波动率的定义,并在此基础上分析了市场噪音对已实现波动估计的影响。随后,用实际数据分析了国内证券市场中噪音的相关性类型。然后,系统地讨论了真实波动的主要三种非参数估计量,即子抽样估计量、预平均估计量以及核估计量的基本思想和大样本性质,比较了这三种估计量的关系以及它们各自的优势,再用实际数据重点考察了窗宽的选择对这些估计量最终结果的影响,数据结果显示所有这些真实波动的非参数一致估计量都严格地依赖于窗宽的选择。最后,探讨了有关真实波动估计未来的研究方向。

在第六章中,以已实现核估计作为真实波动非参数估计量的代表,我们讨论了其中的窗宽选择问题。首先,介绍了真实波动已实现核估计的基本结果,包括该估计量的理论假设条件及其性质和最优窗宽的理论表示。然后,总结了现有的在不相关噪音条件下窗宽选择方法的不足。接着,我们在一类更宽松的噪音条件下讨论了最优窗宽中相关参数的估计,根据相关参数估计量的性质,利用非参数回归中选择窗宽的方法设计了一种确定最优窗宽的算法,随后对算

法做了改进，使其成为一种完全由数据驱动的算法。对两种算法都从理论证明和实际数据表现两方面进行了验证。最后，将所构建的算法应用于多只证券的数据中，讨论了多维真实波动的已实现核估计，从而为ACD模型应用于分析波动数据提供数据支持。

在第七章中，进一步讨论了瞬时波动率的估计及其实际应用中所存在的窗宽选择问题。首先，介绍了瞬时波动率核估计的定义与性质。其次，给出了估计量的最优窗宽理论表达式并讨论了其中未知参数的估计问题。再次，构建了一种数据驱动的算法，该算法能自动从数据中求解出最优窗宽的数值。最后，分别用实际数据和模拟数据检验了算法的表现。

在第八章中，首先，介绍了与ACD模型的扩展有重要关系的、能同时描述数据中趋势成分和长记忆现象的SEMIFAR模型的定义、模型的估计以及估计算法的设计。随后，介绍了logACD模型在长记忆和半参数两个方面扩展的最新结果：FI-logACD模型和SEMI-FI-logACD模型的基本内容。最后将这些模型应用于所得的波动数据上并对其进行了分析。最后，对全书的主要工作进行了总结并在此基础上提出未来研究的方向。

在本书的写作和修改过程中，作者得到了中南财经政法大学统计学院和华中师范大学经济与工商管理学院许多老师的帮助，特别感谢我的导师刘洪教授，以及德国帕德博恩大学冯元化教授对我多年来的指导与帮助。感谢他们给我提供的攻读博士学位和留学的机会。还要感谢上海财经大学统计学院周勇教授对我科研工作的支持和帮助。同时，本书还得到了华中师范大学经济与工商管理学院邓宏乾教授、涂正革教授和郑承利教授的帮助，他们提供了许多有建设性的意见。本书也得到了教育部人文社会科学研究青年项目基金(项目编号：15YJC910007)的支持。



# 目 录

## 第一篇 理论部分

<b>第一章 各种 ACD 模型</b> .....	(3)
第一节 短记忆 ACD 模型 .....	(4)
第二节 长记忆 ACD 模型 .....	(17)
<b>第二章 一类非中心化 ACD 模型</b> .....	(27)
第一节 非中心化 ACD 模型 .....	(27)
第二节 短记忆非中心化 ACD 模型的性质 .....	(32)
第三节 长记忆非中心化 ACD 模型 .....	(41)
<b>第三章 中心化 ACD 模型</b> .....	(46)
第一节 中心化 ACD 模型 .....	(47)
第二节 中心化 ACD 模型的平稳解 .....	(52)
第三节 模型的高阶矩 .....	(61)

## 第二篇 实际应用部分

<b>第四章 ACD 模型在市场微观结构理论方面的应用</b> .....	(71)
第一节 市场微观结构理论 .....	(72)
第二节 基于价格持续期的市场微观结构理论分析 .....	(78)

第三节	数据的说明与预处理 .....	(81)
第四节	实证结果及其分析 .....	(90)
<b>第五章</b>	<b>数据的准备：波动率的估计 .....</b>	<b>(93)</b>
第一节	已实现波动率(Realized Volatility) .....	(93)
第二节	真实波动率 $IV$ 的一致估计量 .....	(112)
第三节	波动率各种估计量的比较及其发展方向 .....	(118)
<b>第六章</b>	<b>已实现核估计的窗宽选择 .....</b>	<b>(123)</b>
第一节	已实现核估计 RK 的理论性质 .....	(123)
第二节	不相关噪音条件下的窗宽选择 .....	(126)
第三节	相关噪音条件下的窗宽选择 .....	(128)
第四节	多维波动率的已实现核估计 .....	(140)
<b>第七章</b>	<b>瞬时波动率的核估计及其窗宽选择 .....</b>	<b>(144)</b>
第一节	瞬时波动率核估计与最优窗宽 .....	(145)
第二节	确定最优窗宽的算法 .....	(149)
第三节	算法的实际数据检验 .....	(152)
<b>第八章</b>	<b>ACD 模型的扩展及其在波动率方面的应用 .....</b>	<b>(159)</b>
第一节	SEMIFAR 模型的介绍 .....	(160)
第二节	FI-logACD 模型及其扩展型 .....	(165)
第三节	SEMI-FI-log-ACD 模型在波动率领域内的应用 .....	(170)
<b>结论与展望</b>	.....	<b>(179)</b>
<b>参考文献</b>	.....	<b>(183)</b>

# 第一篇 理论部分

---



# 第一章 各种 ACD 模型

为了对 ACD 模型的理论性质和实际应用进行全面的研 究，我们首先要对 ACD 模型的基本知识和现有的成果有所了解。因此，本章将 ACD 模型分为短记忆和长记忆两类，分别介绍了它们的定义、各种扩展形式、理论性质和估计方法，为后面的理论分析和实际应用研究作铺垫。我们先来看长记忆和短记忆的定义。

对于某个样本序列  $\{x_t\}$ ，如果其对应的相关函数  $\gamma(k)$  随着  $k$  的增加衰减得缓慢，或者序列的相关函数对应的谱密度在 0 附近的值趋向于无穷大，则序列具有长记忆性。具体来说，序列的记忆性可根据其记忆系数来刻画。如果序列

的相关函数满足： $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma(k) \rightarrow \infty$ ，那么该序列具有长记忆性。如果其对应的相

关系数函数满足： $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma(k) = c$ ，其中  $c$  是一常数，那么序列具有短记忆性。序

列的谱密度函数为  $f(\lambda) = (2\pi)^{-1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp(ik\lambda)\gamma(k)$ 。当  $\lambda \rightarrow 0$  时，序列的谱密度

有： $f(\lambda) \sim c_f |\lambda|^{-\alpha}$ ，其中  $c_f$  为常数， $\sim$  表示左右两边的数值之比为 1。当  $\alpha \in (0, 1)$  时，其对应的序列是长记忆的；当  $\alpha = 0$  时，序列是短记忆的<sup>①</sup>；当  $\alpha \in (-1, 0)$  时，说明序列中存在过度差分现象。对于模型来说，如果模型所描

---

① 事实上，长记忆现象的这些定义本质是一致的，它们只不过是同一现象在不同观察角度上的描述。



述的随机过程(模型的解)具有长记忆性,那么称该模型是长记忆模型;反之,则称为短记忆模型。根据上述对长记忆的定义可以看出,要判断模型是否具有长记忆就必须考察模型所描述的序列相关函数的性质,这在实际应用中不是十分方便。事实上,模型的记忆性可以通过考察模型表达式系数的变化行为判断出来。其相关的结论如下:如果平稳的序列 $\{x_t\}$ 存在 Wold 展开式: $x_t = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \epsilon_{t-j}$ ,其中 $\{\epsilon_t\}$ 是白噪音序列,系数满足: $a_j \sim j^{d-1} l(j)$ 且 $0 < d < \frac{1}{2}$ , $l(j)$ 是一缓慢变化的函数,那么序列 $\{x_t\}$ 是长记忆的。这个结论在模型理论分析中经常被用到。实际运用中, $l(j)$ 可以是一正常数。

## 第一节 短记忆 ACD 模型

高频数据的一个重要特征是每个数据间的时间间隔是不均等的,这一特征使得以前各种计量经济学中标准方法不再适用。然而,根据相关的市场微观结构理论,这些不均等的时间间隔包含了许多市场信息,必须出现于模型中。因此,Engle 和 Rusell 在 1998 年提出了描述交易时间间隔的自回归条件持久模型(ACD)<sup>[76]</sup>。假设 $\{y_i\}$ 表示具有实际意义的离散随机过程,如连续交易的交易价格等。 $\{t_i\}$ 表示随机变量 $y_i$ 到达的时间。用 $x_i = t_i - t_{i-1}$ 表示连续两个随机事件达到的时间间隔,也可以看作随机变量的持续时间,它一般跟已发生的 $x_j$ , $j < i$ 有关。假设 $\varphi_i$ 表示 $x_i$ 的条件期望,即 $\varphi_i = E(x_i | F_{i-1})$ , $F_{i-1}$ 表示到 $t_{i-1}$ 时间的信息集。ACD 模型定义为

$$x_i = \varphi_i \epsilon_i, \quad \varphi_i = \varphi_i(x_{i-1}, \dots, x_1, \theta) \quad (1.1)$$

其中, $\epsilon_i$ 是独立同分布的独立变量,满足 $E(\epsilon_i) = 1$ 。 $\theta$ 是未知参数构成的向量。这里的定义是一组 ACD 模型。它没有设定条件期望 $\varphi_i$ 的表达形式和随机误差项服从的分布。ACD 模型的扩展基本上是从条件期望的表达形式和误差项的分布函数两个方面展开的。为了更好地掌握 ACD 模型,我们先来探讨 ACD 模型的概率基础。

## 一、ACD 模型的概率基础

事实上可以这么认为, ACD 模型是 Engle 在 1998 年基于具有新形式条件强度函数<sup>①</sup>的一类新的自我实现<sup>②</sup>的点过程而提出来的<sup>③</sup>。对于具有后效性的自适应点过程, 一个关键量是其对应的条件强度函数(也称为风险函数):

$$\lambda(t | N(t), t_1, \dots, t_{N(t)}) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(N(t+\Delta t) > N(t) | N(t), t_1, \dots, t_{N(t)})}{\Delta t} \quad (1.2)$$

其中,  $N(t)$  表示直到  $t$  时刻随机变量  $y_i$  发生的次数。根据各种问题的实际情况, 研究者提出了多种形式的条件强度函数, 如 Hawkes<sup>[109]</sup> 提出的随后被 Ogata 和 Akaike(1982) 等广泛应用于地震预测等领域的日历时间形式<sup>[135]</sup>:

$$\lambda(t | N(t), t_1, \dots, t_{N(t)}) = \omega + \sum_{i=1}^{N(t)} \pi(t - t_i)$$

由于这种形式的条件强度函数所描述的事件的边界效应与从事件发生的时刻到当前为止的时间段内的事件相互独立, 因而不适合用来描述交易数据。随后, 为了用相关变量对持续时间序列进行分析, Cox(1955, 1972) 引入了另外一种形式的条件强度函数<sup>[60][61]</sup>:

$$\lambda(t | z_{N(t)}, \dots, z_1) = \lambda(t) \exp\{\beta' z_{N(t)}\}$$

其中,  $z_{N(t)}$  是一组直到时间  $t_i$  的所有解析变量构成的一个向量。这种形式的条件强度函数随后被扩展成一类普遍的风险函数。Cox(1972) 建议以滞后的持续时间作为  $z_{N(t)}$  中构成的部分<sup>[61]</sup>。Lancaster(1979)<sup>[122]</sup> 将这种形式的条件强度函数引入计量经济学领域内<sup>[119]</sup>。关于这类模型的一个重要的问题是, 无法确定模型所描述的关系是序列相关性的真实反映还是数据中不可观察的异质性。

研究发现金融活动中还存在这样一种现象: 随机变量在某个时间内到达的频率非常高而在临近的时间区域内到达的时间间隔又比较长。这种现象与医学

① 英文原文是“intensity function”。

② 英文原文是“self-exciting”。

③ 任何一本介绍随机过程的教材中都有关于强度函数和自我实现的定义。通俗地讲, 强度函数  $\lambda(t)$  度量着从现在开始  $[0, t)$  时间内某事件发生的概率。而如果一个点过程中已发生的事件影响着未发生的事件的概率结构, 那么该点过程就是自我实现的。

中“一个病人如果开始只是具有某种特别的特征，那么他最终发展到患某种疾病的时间比正常人要快得多”的现象非常相似。这一现象可以很好地用“加速失败时间”<sup>①</sup>模型进行描述。基于这种考虑，Engle(1982)提出了一组 ACD 模型：

$$x_i = \varphi_i \epsilon_i, \quad \varphi_i = \varphi_i(x_{i-1}, \dots, x_1, \theta)$$

假设随机误差项的密度函数为  $g(\epsilon, \phi)$ ， $\phi$  是其参数向量。现在我们具体讨论上述 ACD 模型对应的条件强度函数。根据随机误差项的假设，我们可以知道：在  $[t_{i-1}, t)$  内， $x_i$  的条件概率分布为

$$p(x < u \mid F_{i-1}) = p\left(\frac{x}{\varphi_i} < \frac{u}{\varphi_i} \mid F_{i-1}\right) = \int_0^{u/\varphi_i} g(s) ds$$

所以， $x_i$  的条件密度函数为  $f(u \mid F_{i-1}) = g(u/\varphi_i) / \varphi_i$ 。根据式(1.2)条件强度函数的定义，在  $[t_{i-1}, t)$  内

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p(t - t_{N(t)} < x < t - t_{N(t)} + \Delta t \mid x \geq t - t_{N(t)})}{\Delta t} = \frac{f(t - t_{N(t)})}{S(t - t_{N(t)})}$$

其中， $S(t - t_{N(t)})$  是其对应的生存函数， $S(t - t_{N(t)}) = \int_{-t_{N(t)}}^{\infty} g(u/\varphi_{N(t)+1}) / \varphi_{N(t)+1} du$ 。于是

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= \frac{g((t - t_{N(t)}) / \varphi_{N(t)+1}) / \varphi_{N(t)+1}}{\int_{-t_{N(t)}}^{\infty} g(u / \varphi_{N(t)+1}) / \varphi_{N(t)+1} du} \\ &= \frac{g((t - t_{N(t)}) / \varphi_{N(t)+1}) / \varphi_{N(t)+1}}{\int_{(t - t_{N(t)}) / \varphi_{N(t)+1}}^{\infty} g(u) du} = h\left(\frac{t - t_{N(t)}}{\varphi_{N(t)+1}}\right) \frac{1}{\varphi_{N(t)+1}} \end{aligned}$$

其中， $h(x)$  为  $\epsilon_i$  的强度函数。这种形式的条件强度函数就是一种特殊的“加速失败时间”模型。从上式中可以看出，ACD 模型的条件强度函数完全由随机误差项的概率分布和条件期望的形式决定。在 Engle(1982)首次提出的 ACD 模型中， $\epsilon_i$  被假定服从指数分布，此时模型对应的条件强度函数为  $\lambda(t \mid x_{N(t)}, \dots, x_1) = \varphi_{N(t)+1}^{-1}$ 。由于指数分布对应的条件强度函数是一常数，这与交易数据中的现象不相符。随后各种更符合实际情况的随机误差项的分布和条件期望的形式被提出。但从上面对 ACD 模型概率基础的讨论中可以看出，只要数据中存在与“随机变量在某个时间内到达的频率非常高而在临近的时间区域内到达的时间间隔

<sup>①</sup> 原文为“accelerated failure time”。

又比较长”相类似的现象，我们就可以用 ACD 模型对该数据进行建模分析。这也是本书第七章中将该模型用于分析波动率序列数据的理由。

## 二、模型误差项的假定

ACD 模型随机误差项概率分布的假定在 ACD 模型中起着关键作用，这是因为随机误差项的设定既关系到模型条件强度函数的形式又影响着模型的估计方法。因此，我们首先来讨论模型的误差项。

理论上说，任何具有正的支撑集的期望为 1 的概率分布函数都可以作为随机误差项  $\epsilon_i$  的分布函数。在 Engle 的文章中，为了方便起见，一个自然的选择是用标准指数分布(形状参数为 1)作为误差项的概率分布，这就形成了 EACD 模型<sup>[74]</sup>。但是误差项的这种指数形式的分布与交易数据中表现出的特征相矛盾。其主要原因是，误差项的这种设定对应的条件风险函数为一常数(见：Dufour 和 Engle, 2000<sup>[72]</sup>；Feng, Jiang 和 Song, 2004<sup>[79]</sup>)。为了使模型更具有一般性，Engle 和 Rusell(1998)用标准 Weibull 分布<sup>①</sup>作为误差项的分布函数，这就形成了 WACD 模型。很显然，当标准 Weibull 分布中的形状参数  $\gamma$  等于 1 时，它就变成了标准指数分布。与标准 Weibull 分布对应的风险函数分为两类，当  $\gamma > 1$  时，风险函数是单调递增的；当  $\gamma < 1$  时，风险函数是单调递减的。但 Engle 和 Rusell(1982)将 WACD 模型用于实际数据时出现了过度离散的现象<sup>[74]</sup>。同时 Gramming 和 Maurer(2000)对这种只具有单调形式的风险函数的设定提出了质疑。他们提出用 Burr 分布作为误差项的分布，其对应的模型被称为 Burr-ACD 模型<sup>[95]</sup>。这种分布虽然包含了指数的分布和 Weibull 分布，但其所有的高阶矩不一定都存在，除非严格限制其中的参数，这限制了该模型的应用范围。Lunde(1999)建议用广义 F 分布作为误差项的概率分布<sup>[126]</sup>。广义 F 分布和 Burr 分布对应的风险函数都具有波峰形状，其具体形状完全取决于密度函数的参数。这种具有波峰形状的风险函数能较好地描述实际数据中既有大量的长持续时间又具有大量的短持续时间的现象。

精确地确定误差项的概率分布在 ACD 模型的实际应用中也起着重要的作用。Gramming 和 Maurer(2000)用蒙特卡洛模拟的方法研究了用单调形式风险

① 尺度参数为 1 的 Weibull 分布为标准 Weibull 分布。