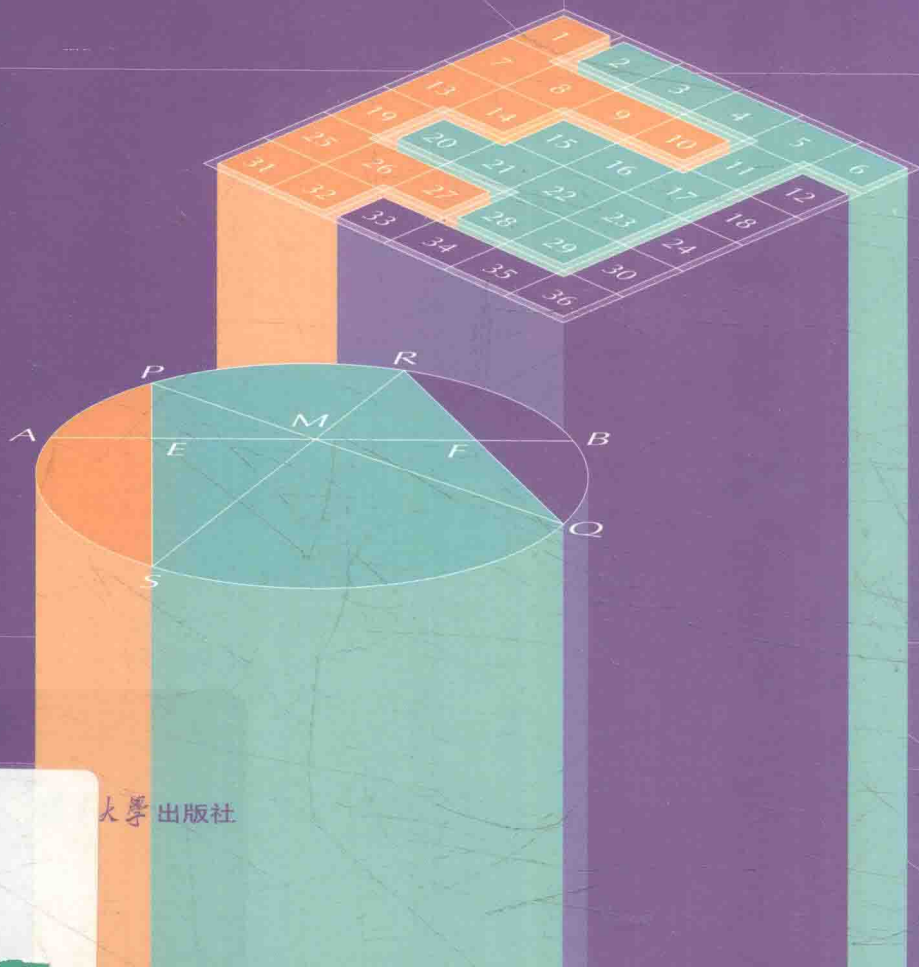


问题解决和 数学智慧

尚 强 胡炳生 著



大學出版社

问题解决和 数学智慧

尚 强 胡炳生 著

 复旦大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

问题解决和数学智慧/尚强,胡炳生著. —上海:复旦大学出版社, 2018.5
ISBN 978-7-309-13647-0

I. 问… II. ①尚…②胡… III. 数学-普及读物 IV. 01-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 089700 号

问题解决和数学智慧
尚 强 胡炳生 著
责任编辑/陆俊杰

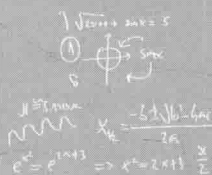
复旦大学出版社有限公司出版发行
上海市国权路 579 号 邮编: 200433
网址: fupnet@fudanpress.com <http://www.fudanpress.com>
门市零售: 86-21-65642857 团体订购: 86-21-65118853
外埠邮购: 86-21-65109143 出版部电话: 86-21-65642845
杭州日报报业集团盛元印务有限公司

开本 890 × 1240 1/32 印张 7.125 字数 175 千
2018 年 5 月第 1 版第 1 次印刷

ISBN 978-7-309-13647-0/O · 656
定价: 24.00 元

如有印装质量问题, 请向复旦大学出版社有限公司出版部调换。
版权所有 侵权必究

前言



“问题是数学的心脏”。学习数学,就是学习如何解决问题——纯粹数学和非纯粹数学的一般问题。推而广之,解决问题,不只是数学的学习内容,也是学习其他课程,乃至以后工作时所面对的任务。本书所说的问题解决,主要是针对非纯粹数学问题而言的。

解决各种问题,需要有各种专门的知识、技能和方法。但是归根结底,都需要人们“动脑筋”:进行积极的思维活动。人们的思维活动大致有 3 种形式:逻辑思维、形象思维和灵感思维。

数学属于思维科学,主要是逻辑思维,但也需要有形象思维的帮助。而对于困难的新问题,还需要有创新思维的加入(即所谓的数学智慧),才能化难为易,予以解决。

与知识、技能相比,数学智慧是更高层次的思维能力。学习问题的解决,不仅是学习解决普通的数学题,更是学习科学史上那些数学家和科学家们在解决许多实际困难问题中所闪现出来的数学智慧。如我国古代伟大的数学家和科学家祖冲之解决冬至点的问题,刘徽创制“牟合方盖”求得球体积公式,古希腊数学家和科学家阿基米德用力学方法解决数学问题,近代数学家欧拉用画图方法解决“七桥问题”,哈代运用初等数学方法解决“色盲遗传”的世纪难题等经典实例。读者阅读时,都能够体会到其中闪现出的精彩数学智慧。

虽然智慧(包括数学智慧)不能重复,不能简单地复制,但是我们

可以从前人的经验中得到启迪和借鉴,学习他们创新的思维方法、巧妙的问题转化途径,以及锲而不舍的钻研精神。由此可以激发我们的智慧和创新精神。

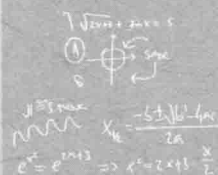
说起来很奇怪,青少年学生对于越是困难的问题,越有兴趣去思考和钻研。与其他学科相比,数学中的难题更多,而且解决它们只要动动脑筋就可以,无需什么设备和器材,简单易行。因此数学学习最能激发青少年的好奇心和学习兴趣,这里面蕴藏着的激发他们智慧的机会,也就会更多。

本书所说的问题解决,很大部分是历史上著名的难题,很多还是社会和生活中的有趣问题。对于它们的解决,不限于解决它们的数学方法,更重要的是要说明这些问题的来龙去脉,说明解决它们的思维路线和蕴藏其中的数学智慧,从而使读者,特别是中学生们,在问题解决中获得数学知识、数学方法、解题技能和数学智慧,借以提高学生的思维能力和思维品质,进而提升学生的整体素质,增长学生的学习智慧。

本书作者

2018/1/10

目 录



一、中国古人的心智发明	1
——矩的发明和勾三股四弦五的发现	
二、干支纪日	7
——给时间起名的妙法	
三、竹笛吹出了历史的回声	10
——我国古代度量衡标准制定的故事	
四、从三分损益到十二平均律	13
五、弱马战胜强马的智谋	15
六、谈古论今说幻方	18
七、隔墙算和韩信点兵	27
八、祖冲之测定冬至点的智慧	33
九、围棋盘 19 格的由来	37
十、狄青出奇制胜的奥秘	41
十一、书中自有黄金数	43
十二、阿基米德对 π 的研究	47
十三、徽率是怎样产生的?	50

十四、从 3.14 到“优率”3.141 6	53
十五、祖冲之“盈、朒”二数算法探源	56
十六、人类对圆周率精益求精的追问	59
十七、从七桥问题到中国邮路设计	64
十八、从兔子繁殖引出的优选数列	68
十九、赌徒梅累的得分问题引出的大学问	74
二十、欧拉公式和足球烯的发现	77
二一、《红楼梦》掷骰子游戏你玩过吗?	81
二二、色盲能遗传给全人类吗?	85
二三、彩票中的数学问题	90
二四、体育比赛的名次该如何排定?	97
二五、人口增长模型与人口预测	100
二六、辨别油画真伪与历史年代测定	103
二七、易拉罐什么样的尺寸最合理?	106
二八、电梯升降停靠站合理安排	108
二九、热水瓶保温测试问题	112
三十、混水何时能变清?	114
三一、北京—纽约开通极地航线有何意义?	116
三二、洗衣服用水的合理方案	120
三三、几何图形商标设计问题	125
三四、设计最经济的线路方案	130
三五、课堂上的生日调查	135

三六、一只蝴蝶飞到了你的案头	138
——蝴蝶定理探趣	
三七、英雄所见略同	144
三八、似曾相识燕归来	150
三九、一个古典问题解决的妙趣	153
四十、列表助你逻辑推理	160
四一、从拣石子游戏探究怪题奇解	165
四二、联想旧友找新朋	170
四三、横看成岭侧成峰	174
四四、平淡之中有神奇	177
四五、举一反三推及四	182
四六、柳暗花明又一村	189
四七、数学之美在简约	193
四八、于无形处借有形	197
四九、万变不离其宗	201
五十、莫把相似当相同	205
五一、椭圆也是“圆柱曲线”吗?	213
后记	217

一、中国古人的心智发明

——矩的发明和勾三股四弦五的发现

$$\sqrt{10} + 1 + 2 + 1 = 5$$

$$H \approx \frac{1}{2} \pi \sin \theta$$
$$X_{10} = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \times 1 \times 1}}{2 \times 1}$$
$$e^x = e^{(-2+3)} \Rightarrow x^2 = 2 \times 1 \pm \frac{x}{2}$$

1. 勾股——勾股定理的历史源头

勾股定理,被认为是数学史上的第一定理,是人类早期的心智发明,是人类智慧的结晶。

但是,它在东西方的数学发展史上的作用和地位,却大不相同。在中国古代,勾股定理是归纳的结果,来源于人类进行实际测量(如测影观时、兴修水利)的活动。在古希腊,勾股定理则是演绎推理的结果,来源于几何理论。相传约在公元前 2000 年,中国大禹治水,左执规矩,右执准绳。这里所说的规矩、准绳,就是用来测量地势高下,治理水利的。其中“矩”是最重要的测量工具之一。

矩可以用来画直角和垂线。但矩不同于现在画图用的三角板,它是由两条直木条制作而成的,构成直角尺,没有斜边,如图 1-1 所示。其中较短的边称为“勾”,较长的则称为“股”。只有当这两边构成直角时,才能准确测量高低远近。

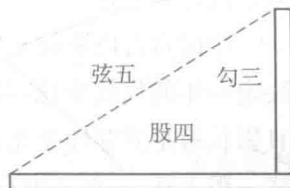


图 1-1

如果不垂直,那么用其来测量,便会差之毫厘,失之千里。但是,怎样才能保证勾与股这两边构成直角呢?这是个非常困难的现实问题。

我们的祖先,在多次试验和实践,经过无数次失败之后,终于发现了“勾三股四弦五”的真理!即取勾长为3单位,股长为4单位,若能用一根5单位长的绳恰好连接成“弦”,那么,这勾与股两条边,就一定垂直。由此定理(实际上是勾股定理的逆定理),便能够很方便地制作出标准的测量工具——矩。这真是了个了不起的发现!

大家不要以为“勾三股四弦五”只不过是勾股定理的特例,并不能算是发现了勾股定理。其实,这却是勾股定理的最重要的特例,而且是中国古代劳动群众在长期劳动实践中的伟大创造。人们利用这一发现,才能判定和制作成两边垂直的矩,也只有用这样标准的矩,才能进行准确的测量,判定地势的高低远近,才能治理水患。我们可以这样合情推理:人们正是从这简单的特例,逐步发现勾股定理的一般情形。而反过来,若直接用勾股定理的一般情形,是制作不出来两边垂直之矩的。

2. 用矩进行测量

中国古代的先贤们,不仅利用勾股定理(及其逆定理)制作标准的测量工具——矩,而且巧妙地利用矩或联合利用两个矩,进行各种复杂的测量工作。

中国自古以来就是“以农立国”,农业对气候的依赖性极大。而决定一年的气候变化,与太阳的位置有关。人们发现,在一年之中,日影长短是周期性变化的,这决定着气候的寒暑交替的规律:用同样一根木杆,一年之中有一天的日影最长,这一天叫作“冬至”;有一天日影最短,这一天叫作“夏至”。因为日影长时容易测量,故把冬至这一天定为一年(回归年)的开始。那么如何才能准确地测量出日影的长度呢?首先要立一根木杆(称为表)垂直地面。如果表与地面不垂直,那么测量出的日影就不准确。

要将表垂直于地面,抽象来看,就是要使一根直线垂直于一个平面。那么,我们应该怎么办呢?在远古时期,中国的先民们就发现如下用矩之妙。方法是将这两个矩的短边(勾)平放地面上,将两个矩的长边(股)重合在一起,合成一条直线段,那么,这重合的股边便垂直于地面,如图 1-2 所示(实际上,这相当于一立体几何公理:若一条直线垂直于平面上两条相交直线,则该直线与平面垂直)。

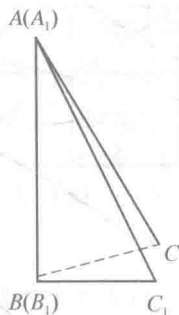


图 1-2

3. 勾股术,解直角三角形

我国古代的数学家把勾股定理发展成为一套解直角三角形的系统方法——勾股术(《九章算术》第九章)。刘徽又在此基础上,发展出了联合用两个矩的远距离测量术(重差术)。

以 a, b 为勾股的直角三角形,称为“勾股形”;以 a, b 为长宽的矩形面积,称为“勾股积”。勾股术的应用,以下列数学基本原理和基本算法为依据:

(1) 出入相补原理:两个图形分别分成若干彼此面积相等部分,那么这两个图形的面积相等。

(2) 矩形面积公式:以 a, b 为长宽的矩形,其面积 $S = ab$ 。

(3) 平行四边形面积公式:以 a, h 分别为底边和高的平行四边形面积 $S = ah$ 。

(4) 三角形面积公式:分别以 a, h 为底边和高的三角形面积 $S = \frac{1}{2}ah$ 。

(5) 矩形对角线将其分成两个等积三角形。

(6) 过矩形对角线上任意一点作两条平行于两边的平行线,将矩形分成 4 个矩形,其中不包括对角线的两个矩形面积相等。

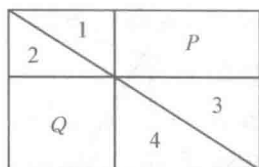


图 1-3

事实上,如图 1-3 所示,矩形被对角线分成 2 个等积的大勾股形;再被两平行线分成 2 个矩形和 4 个小勾股形。其中 $\triangle 1 = \triangle 2$, $\triangle 3 = \triangle 4$; 所以 $\square P = \square Q$ (“ $\triangle$ ”及“ $\square$ ”分别指相应的三角形及矩形的面积,下同)。

首先来看中国古代关于勾股定理的图证法。

先举赵爽的弦图证法。如图 1-4: 以弦长为边作正方形,以 4 边为弦,作 4 个勾股形,中间正好构成一个小正方形——称为“黄方”,其面积为勾股差的平方。



图 1-4 弦图



图 1-5 勾股重组图

现将弦图中 4 个勾股和 1 个黄方,重新组合成图 1-5 的形式,便得到 1 个勾方和 1 个股方之和。

于是便有等式:

弦方 = 4 勾股 + 黄方 = 4 勾股 + 勾股差方 = 股方 + 勾方。

若用 a , b , c 表示该勾股形的 3 边勾、股、弦,那么上述关系即为

$$c^2 = 4 \times \frac{1}{2} ab + (a - b)^2 = 2ab + (a^2 - 2ab + b^2) = a^2 + b^2.$$

类似于此的图证法,后世数学家有多种设计,包括国内外发现的已知设计图证法,竟有多达百种。作为数学活动,这可以让学生来一试身手。

在勾股形中,除3边勾、股、弦以外,还有勾股和、勾股差(实际是较长的股减去较短的勾的差,下同)、股弦和、股弦差、勾弦和、勾弦差,共计9个量。若已知其中任意2个量,利用勾股术,就可以求出其他7个量。这就是通常的所谓“解直角三角形”。这在中国古算书《九章算术》中都有相应的例题。

4. 重差术,远距离测量术

刘徽在为《九章算术》作注时,在第九章“勾股”之后,将勾股术发展为“重差术”,并举出9个远距离测量问题,来说明其方法的运用。后人将其专门辑为一本算书——《海岛算经》。这种不用角的概念的测量方法,被后人称为“不用角概念的三角学”。今以《海岛算经》第四题为例,予以说明古人的数学智慧。

《海岛算经》第四题:

今有望深谷,岸上仰卧一矩,令勾高六尺,从勾端测望深谷之底,视线入此矩之股九尺一寸。又置重矩于此矩之上,两矩之间相距三丈。更从勾端测望深谷之底,视线入上矩之股八尺五寸。试问谷深几何?

说明和分析 这是一个有实际意义的、从高山测量深谷的远距离测量问题。

若实际测量,则有很大难度,因为深谷是人所不能到达的。这里用的测量工具是两个矩,而且是“仰矩”,即将它的长边——股平放,以便人眼观察深谷底部,得出数据。

两次用矩观察深谷所得数据是:勾高 $AB = CD = 6$ 尺,下矩入股 $BE = 9$ 尺1寸,上矩入股 $DF = KL = 8$ 尺5寸。两矩之间距离 $DB = 30$ 尺。要求谷深 BL 。

解法 连接成若干矩形,如图 1-6

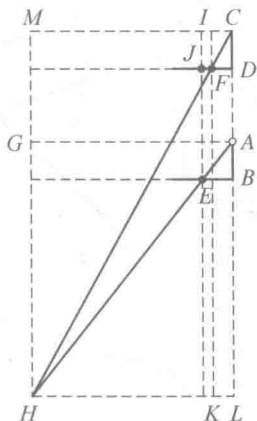


图 1-6

所示。

由于 F 为矩形 CH 对角线上一点,故 $\square FL = \square FM$;又 E 为矩形 AH 对角线上一点,故 $\square EG = \square EL$ 。因 $AB = CD$,二式相减,得 $\square FI = \square FL - \square EL$,即

$$\begin{aligned} CD \times FJ &= \square FL - \square EL \\ &= LD \times DF - BL \times BE. \end{aligned}$$

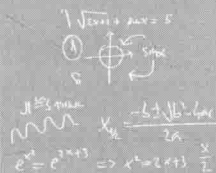
而 BL 为谷深, FJ 为前后入股之差, CD 为勾长, DF 为上矩入股深, BE 为下矩入股深, BD 为两矩之间距离,故可求得谷深

$$BL = \frac{BD \times DF - CD \times FJ}{BE - DF}.$$

代入有关数据,即求得谷深为 41 丈 9 尺。

二、干支纪日

——给时间起名的妙法



干支纪年，在我们日常生活中仍然在用，例如，2017 年是丁酉年，2018 年是戊戌年。每年入梅、出梅、入伏、出伏等都与干支纪日有关。那么，干支纪年、干支纪日，与数学有关系吗？——有，而且关系很大。

时间，像一条无穷无尽的大河，日复一日，年复一年，不断向未来延伸。怎样来分辨昨天与前天、去年与前年呢？又怎样来记载某年某月某日发生了某个重大事件呢？这实在是个难题。

我们的祖先想出了一个绝妙的方法——干支纪日法。

干，就是“十天干”：甲、乙、丙、丁、戊、己、庚、辛、壬、癸；支，就是“十二地支”：子、丑、寅、卯、辰、巳、午、未、申、酉、戌、亥。用十天干与十二地支搭配起来，就能得到不同的干支名：甲子、乙丑、丙寅、丁卯，等等。因为天干与地支数目相差 2，所以循环搭配时，逢单的甲、丙、戊、庚、壬 5 个天干，只能与逢单的子、寅、辰、午、申、戌这 6 个地支相配，得 30 个干支名；逢双的乙、丁、己、辛、癸 5 个天干，只能与逢双的丑、卯、巳、未、酉、亥这 6 个地支相配，得另外 30 个干支名。不同的干支名，有且只有 60 个，合称“六十甲子”。

用这 60 个干支，给每一天起一个名字，依次称为：甲子日，乙丑日，丙寅日，丁卯日，等等，直至癸亥日，这样，连续 60 天，每天都有不同的名字（见表 2-1）。然后又从头再命名为甲子日，等等，周而复

始,循环使用。

表 2-1 六十甲子表

干支	干支	干支	干支	干支	干支	干支	干支	干支	干支
甲子	乙丑	丙寅	丁卯	戊辰	己巳	庚午	辛未	壬申	癸酉
甲戌	乙亥	丙子	丁丑	戊寅	己卯	庚辰	辛巳	壬午	癸未
甲申	乙酉	丙戌	丁亥	戊子	己丑	庚寅	辛卯	壬辰	癸巳
甲午	乙未	丙申	丁酉	戊戌	己亥	庚子	辛丑	壬寅	癸卯
甲辰	乙巳	丙午	丁未	戊申	己酉	庚戌	辛亥	壬子	癸丑
甲寅	乙卯	丙辰	丁巳	戊午	己未	庚申	辛酉	壬戌	癸亥

据《春秋》记载:“鲁隐公三年春二月己巳日有食之。”这是一次日全食,发生在公元前 720 年 2 月 22 日。从那以来,我国干支纪日,连续使用了 2 600 多年,直至清末,从未间断,也从未发生混乱。这是世界上最为成功、使用时间最长的纪日法。干支法的设计,含有明显的组合学思想,这是世界上实际应用组合学知识的最早范例。

从东汉《四分历》颁行的那一年开始,又用干支纪年。这一年是东汉章帝元和二年(公元 85 年),纪年的干支名为乙酉。干支纪年法一直用到现在。历史上发生的一些重大事件,也大多用事发当年的干支名来命名。如“辛亥革命”“戊戌政变”,等等。

干支纪日,60 天一循环,大约是两个月,方便记忆,又能区分相继两个甲子周期中同一日名的不同季节、不同景象,不至于弄错。

干支纪年,60 年一循环,大约是古人的一生。古语说:“人生七十古来稀”,可见那时超过 70 岁的人很少。现在社会进步了,中国人的平均寿命已经大大提高。但是人过 60 岁,又回到出生时的那个干支年,“花甲重逢”,还是值得庆贺的。

今天,这种干支纪年、纪日的方法,仍然有用。

其一,可以推算出历史上任何一年的干支名。

其二,农历的某些节令,仍然是按照干支纪日法来确定的。例如,每年的“入梅”,规定为芒种后第一个丙日(天干为丙);“出梅”规定为小暑后第一个未日(地支为未)。所以,每年的“梅天”日数是不固定的。

最后,我们来说说干支年号的推算方法。

首先推算得:公元4年是甲子年。设要推算公元 N 年的干支名,它在最近一个甲子周期中的序号为 $b(0 \leq b < 60)$,即有公式:

$$b = N - 60q - 3, \text{其中 } q \text{ 是某个正整数。}$$

或作带余除法:求 $N-3$ 被60除后所得的余数。

例如,推算抗日战争爆发的1937年的干支名:

$$1937 - 3 = 1934; 1934 = 60 \times 32 + 14.$$

因此,1937年在甲子周期表中,是第14个干支名——丁丑;即1937年是农历丁丑年。

不过有两点需要注意:

第一,一个公历年跨越两个农历年,一般是以该年春节后的新农历年度的干支名来作对应;如果一个事件发生在某年元月或二月,那么就要查万年历,才能确定它所对应的干支年号。

第二,照国际惯例,没有公元0年,公元元年(1年)的前一年,是公元前1年(-1年)。所以,推算公元前某年的干支年号时,要再减去1年。