

李旭超 著

能量泛函正则化模型 理论分析及应用



科学出版社

能量泛函正则化模型理论 分析及应用

李旭超一著



科学出版社

北京

内 容 简 介

本书讲述能量泛函正则化模型理论分析及应用。主要内容包括能量泛函正则化模型国内外发展现状,图像稀疏化基本理论,半二次型能量泛函正则化模型基本原理及应用,能量泛函正则化模型整体处理、分裂原理、对偶模型分裂原理、原始-对偶模型分裂原理及在图像恢复中的应用。

本书可作为应用数学、计算机科学、电子科学与通信、自动化、生物信息工程等专业的高年级本科生、研究生及相关领域的教师、科研人员、医学工作者和工程技术人员等的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

能量泛函正则化模型理论分析及应用/李旭超著. —北京:科学出版社, 2018.8

ISBN 978-7-03-058503-5

I. ①能… II. ①李… III. ①泛函数-正则化-应用-图像处理-研究
IV. ①TN911.73

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018) 第 182780 号

责任编辑:张海娜 赵微微/责任校对:何艳萍

责任印制:张 伟/封面设计:蓝正设计

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

北京中石油彩色印刷有限责任公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2018 年 8 月第 一 版 开本:720×1000 1/16

2018 年 8 月第一次印刷 印张:12 3/4

字数:257 000

定价:85.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

前 言

能量泛函正则化模型实用性较强,发展迅猛。在参考大量中外文献的基础上,结合作者多年的研究,最终撰写成书。

全书共 7 章。第 1 章介绍能量泛函正则化模型研究进展;第 2 章介绍图像稀疏化基本理论;第 3 章介绍半二次型能量泛函正则化模型基本原理及应用;第 4 章介绍能量泛函正则化模型整体处理及在图像恢复中的应用;第 5 章介绍原始能量泛函正则化模型分裂原理及在图像恢复中的应用;第 6 章介绍正则化对偶模型分裂原理及在图像恢复中的应用;第 7 章介绍原始-对偶模型分裂原理及在图像恢复中的应用。

在撰写本书的过程中,作者参考了国内外许多同行的研究成果,引用其观点、数据与结论,在此表示衷心的感谢。赤峰学院附属医院边素轩女士提出了很多宝贵的修改意见并对书稿进行了初步排版;赤峰学院数学与统计学院李书海院长、郑国军书记,计算机与信息工程学院刘燕院长、何荣杰书记在本书出版过程中提供了大力支持,在此对他们表示衷心的感谢。2013~2014 年作者去美国进行为期一年多的访问学习,其间密苏里大学 Wenjie He 教授系统地讲解了紧框架原理及应用,使作者受益匪浅,在此表示深深的感谢。

内蒙古自治区科技厅自然科学基金项目“大规模凸非光滑型正则化模型研究及在图像恢复中的应用”(2016MS0602)、内蒙古自治区教育厅高等学校科学研究项目“紧框架域大规模半二次型正则化问题研究及在图像恢复中的应用”(NJZY16254)为本书的顺利出版提供了资助,在此表示衷心的感谢。

由于作者水平有限,书中难免存在不妥之处,敬请读者批评指正。

李旭超

2018 年 4 月于赤峰学院

目 录

前言

第 1 章 能量泛函正则化模型研究进展	1
1.1 能量泛函正则化模型的起源	1
1.2 能量泛函正则化模型的形式	1
1.2.1 点扩散函数的形式	2
1.2.2 拟合项的形式	6
1.2.3 正则项的形式	7
1.2.4 权重的确定方法	9
1.2.5 正则化模型解的特性	12
1.3 能量泛函正则化模型国内外研究现状	12
1.3.1 空域正则化模型研究进展	12
1.3.2 变换域正则化模型研究进展	16
1.3.3 空域与变换域混合正则化模型研究进展	17
1.4 图像恢复能量泛函正则化模型存在的问题与发展趋势	19
1.4.1 图像恢复正则化模型存在的问题	19
1.4.2 图像恢复正则化模型的发展趋势	19
参考文献	20
第 2 章 图像稀疏化基本理论	25
2.1 傅里叶变换及在图像处理中的应用	26
2.1.1 傅里叶变换	26
2.1.2 高维傅里叶变换的特性	26
2.1.3 傅里叶变换在图像处理中的应用	28
2.2 小波变换及在图像处理中的应用	32
2.2.1 小波变换	33
2.2.2 小波变换在图像处理中的应用	34
2.2.3 小波变换在微分方程中的应用	38
2.3 样条函数	40
2.4 框架及其构造	44
2.4.1 框架	44
2.4.2 紧框架的构造	46

参考文献	49
第 3 章 半二次型能量泛函正则化模型基本原理及应用	52
3.1 半二次型正则项的特性	52
3.1.1 正则项中的一元势函数	52
3.1.2 正则项中的二元势函数	55
3.2 半二次型能量泛函正则化模型	56
3.2.1 乘式半二次型正则化模型	56
3.2.2 加式半二次型正则化模型	57
3.3 半二次型能量泛函正则化模型牛顿迭代原理	57
3.3.1 预条件共轭梯度迭代算法	57
3.3.2 半二次型能量泛函正则化模型牛顿迭代算法	60
3.3.3 迭代算法步长的确定	61
3.3.4 半二次型能量泛函正则化模型牛顿迭代算法收敛特性	66
3.3.5 半二次型能量泛函正则化模型在图像恢复中的应用	68
3.4 半二次型能量泛函正则化模型交替迭代原理	69
参考文献	72
第 4 章 能量泛函正则化模型整体处理及在图像恢复中的应用	74
4.1 成像系统模型整体处理	75
4.2 KL-TV 能量泛函正则化模型及应用	79
4.2.1 KL-TV 能量泛函正则化模型	79
4.2.2 KL-TV 能量泛函正则化模型的经典牛顿迭代算法	80
4.2.3 改进的牛顿迭代算法在 KL-TV 模型中的应用	81
4.2.4 改进的牛顿迭代算法收敛性	83
4.3 改进的牛顿迭代算法在图像恢复中的应用	85
4.3.1 实验测试	86
4.3.2 图像恢复仿真实验	87
4.3.3 真实 MRI 恢复实验	92
参考文献	93
第 5 章 原始能量泛函正则化模型分裂原理及在图像恢复中的应用	96
5.1 逼近算子及其特性	97
5.1.1 逼近算子	97
5.1.2 逼近算子的特性	100
5.1.3 常用函数的逼近算子	103
5.2 原始能量泛函正则化模型分裂原理	107
5.2.1 Bregman 距离及其特性	107

5.2.2	分裂 Bregman 迭代算法	110
5.2.3	快速软阈值分裂迭代算法	113
5.2.4	ADMM 分裂迭代算法	116
5.3	标准正则化模型的逼近牛顿算子分裂原理	117
5.3.1	标准正则化模型的二阶逼近模型分裂原理	117
5.3.2	牛顿迭代子问题搜索方向和步长的确定	118
5.3.3	逼近牛顿迭代算法及其收敛特性	119
5.3.4	逼近牛顿迭代算法图像恢复实验	121
5.4	混合正则化模型分裂原理	124
5.4.1	受泊松噪声降质图像的混合能量泛函正则化模型及分裂算法	124
5.4.2	受椒盐噪声降质图像的混合能量泛函正则化模型及分裂算法	127
	参考文献	130
第 6 章	正则化对偶模型分裂原理及在图像恢复中的应用	134
6.1	对偶变换基本原理	134
6.1.1	Fenchel 共轭变换	134
6.1.2	Fenchel 共轭变换的特性	138
6.2	原始模型转化为对偶模型	141
6.2.1	对偶定理	141
6.2.2	常用的图像恢复正则化模型转化为对偶模型	143
6.3	L_1 -TV 型正则化模型的对偶模型分裂原理及应用	146
6.3.1	原始 L_1 -TV 型正则化模型	146
6.3.2	将原始 L_1 -TV 模型转化为增广拉格朗日模型	146
6.3.3	将增广拉格朗日模型分裂为两个子问题	147
6.3.4	将两个子问题转化为对偶模型	147
6.3.5	对偶模型迭代算法收敛分析	150
6.4	L_1 -TV 型正则化的对偶模型在图像恢复中的应用	151
6.4.1	L_1 -TV 型正则化中的对偶分裂迭代算法	151
6.4.2	对偶分裂迭代算法在图像恢复中的应用	151
	参考文献	159
第 7 章	原始-对偶模型分裂原理及在图像恢复中的应用	161
7.1	原始模型转化为原始-对偶模型	162
7.1.1	利用 Fenchel 变换将原始模型转化为原始-对偶模型	162
7.1.2	利用拉格朗日乘子获得原始-对偶模型	165
7.1.3	利用增广拉格朗日乘子将原始模型转化为原始-对偶模型	165
7.2	原始-对偶模型的一阶 Primal-Dual 混合梯度迭代算法	166

7.2.1	一阶 Primal-Dual 混合梯度迭代算法	166
7.2.2	一阶 Primal-Dual 混合梯度迭代算法的收敛特性	170
7.3	原始-对偶模型的二阶 Primal-Dual 牛顿迭代算法	170
7.3.1	原始 L_2 凸光滑型能量泛函正则化模型	170
7.3.2	正则项伪 Huber 函数的特性	171
7.3.3	L_2 伪 Huber 正则化模型转化为原始-对偶模型	173
7.3.4	原始对偶模型的一阶、二阶 KKT 条件	174
7.3.5	原始-对偶模型牛顿迭代算法	175
7.3.6	原始-对偶模型牛顿迭代算法的收敛特性	177
7.3.7	原始-对偶模型在图像恢复中的应用	178
	参考文献	194

第 1 章 能量泛函正则化模型研究进展

1.1 能量泛函正则化模型的起源

对于给定的数学模型,人们试图获得描述问题的理想解,然而由于经典数学模型的局限性,有时很难获得封闭解,即使获得解析解,由于模型本身固有的局限性或者模型所属空间的局限性,建立的数学模型无法准确描述对象的特征,而且所研究的问题往往是不适定的,进一步增加问题研究的难度。

20 世纪 70 年代以来,尤其是近十年,在自动控制、信号分析、生物器官状态分析、军事逆向工程和宇宙探索等自然科学和工程技术领域,提出了很多形式的反问题。国内外很多学者对反问题进行了广泛研究^[1,2],取得了很多有价值的研究成果,但被学术界广泛认可的是能量泛函正则化模型的建立。

能量泛函正则化模型具有以下优点:① 模型简单,容易建立。正则化模型仅由拟合项、正则项和权重组成,拟合项与理想解成像过程相吻合,正则项由期望解的特性决定,而权重与噪声息息相关。② 成熟的线性系统理论为反问题的研究提供强有力的数学工具。正则化模型变分后可用矩阵方程组来表示,因此可以利用奇异值分解、谱分解、矩阵分块和预条件等技术,研究模型求解问题。③ 贝叶斯理论的发展为拟合项和正则项的发展注入新的活力。从贝叶斯公式和能量泛函对等的角度来说,条件概率相当于拟合项,理想解的先验信息相当于正则项,理想解的最大后验概率的常对数似然值等价于能量泛函,而贝叶斯理论中的条件概率模型和先验概率模型有助于能量泛函正则化模型的建立。④ 正则化模型的建立具有多样性。后验概率分布等价于能量泛函,因此可以选用合适的概率分布函数描述拟合项与正则项,使得正则化模型的研究具有多样性。⑤ 算法设计理论成熟。根据正则化模型的特点,利用数值代数、矩阵论和非线性优化等理论,对模型进行整体处理、分裂处理和转化处理,设计高效、快速的优化算法。

1.2 能量泛函正则化模型的形式

在地质勘探、无损探伤、图像修复、最优控制和军事制导等领域,反问题的研究可用第一类的积分方程来描述^[3],表达式为

$$\int_0^T a(x, y) u(y) dy = g(x) \quad (1.1)$$

式中, $a(x, y)$ 为核函数; $u(y)$ 为期望解; $g(x)$ 为采样获得的数据; $(0, T)$ 为积分区间。问题描述为: 已知 $g(x)$ 和 $(0, T)$, 在给定 $a(x, y)$ 的条件下, 计算 $u(y)$ 。对式 (1.1) 进行离散化, 获得离散表达式为

$$Au + \varepsilon = g \quad (1.2)$$

式中, A 为 $m \times n$ 维矩阵; u 和 g 为列向量; ε 为噪声。若 $m < n$, 采样 g 是 u 的不完备表述, 使得期望解的信息丢失; 若 $m > n$, 采样 g 是 u 的过完备表述, 造成式 (1.2) 多解, 而期望解 u 是唯一的, 解的选取很难确定; 若 $m = n$, 虽然不产生信息丢失和多解现象, 但由于 A 的条件数较大, 且受随机噪声 ε 的影响, 获得的解幅值较大, 严重偏离期望解。

采用有限差分法离散化技术对式 (1.1) 进行离散, 获得矩阵 A , 由于其特征值幅值变化较大, 具有奇异特性, 导致式 (1.2) 的解是不适定的, 为解决此问题, 建立由拟合项、正则项和权重组成的能量泛函正则化模型, 表达式为

$$E(u, \alpha) = \inf_{u, \alpha} \{ \Phi(Au, g), \alpha, R(Du) \} \quad (1.3)$$

式中, $\Phi(Au, g)$ 为拟合项; $R(Du)$ 为正则项; α 为正则项权重; $\inf$ 表示下确界。

1.2.1 点扩散函数的形式

由于成像设备的制造比较复杂, 以及受成像环境的影响, 如电子设备老化、大气扰动和磁场干扰等, 一般很难获得成像系统的数学模型。目前, 主要有以下几种点扩散函数模拟图像模糊过程。

1. 高斯点扩散函数

假设二元正态分布的均值为 $[\mu_1, \mu_2]^T$, 协方差矩阵为 $\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$, 若 $|\rho| < 1$, $\sigma_1\sigma_2 \neq 0$, 则二维高斯点扩散函数的表达式为

$$p(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1} \right)^2 - 2\rho \frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2} \right)^2 \right] \quad (1.4)$$

式中, μ_1 、 μ_2 和 ρ 决定点扩散函数的形状, 若 $\sigma_1 = \sigma_2$, $\mu_1 = \mu_2$, 则形成对称模糊核, 否则, 产生非对称模糊核。若 μ_1 、 μ_2 和 ρ 是时变的, 则称为空间时变的模糊核, 否则称为定常模糊核。若模糊核是对称的, 形成的矩阵是循环对称矩阵, 利用快速傅里叶变换进行对角化。取 $\rho = 0$, $\sigma_1 = 2$, $\sigma_2 = 4$ 和 $\rho = 0$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 4$, 尺

寸为 40×40 ，非对称点扩散函数和对称点扩散函数如图 1.1 (a)、(b) 所示，相应的奇异值分解如图 1.1 (c) 所示。

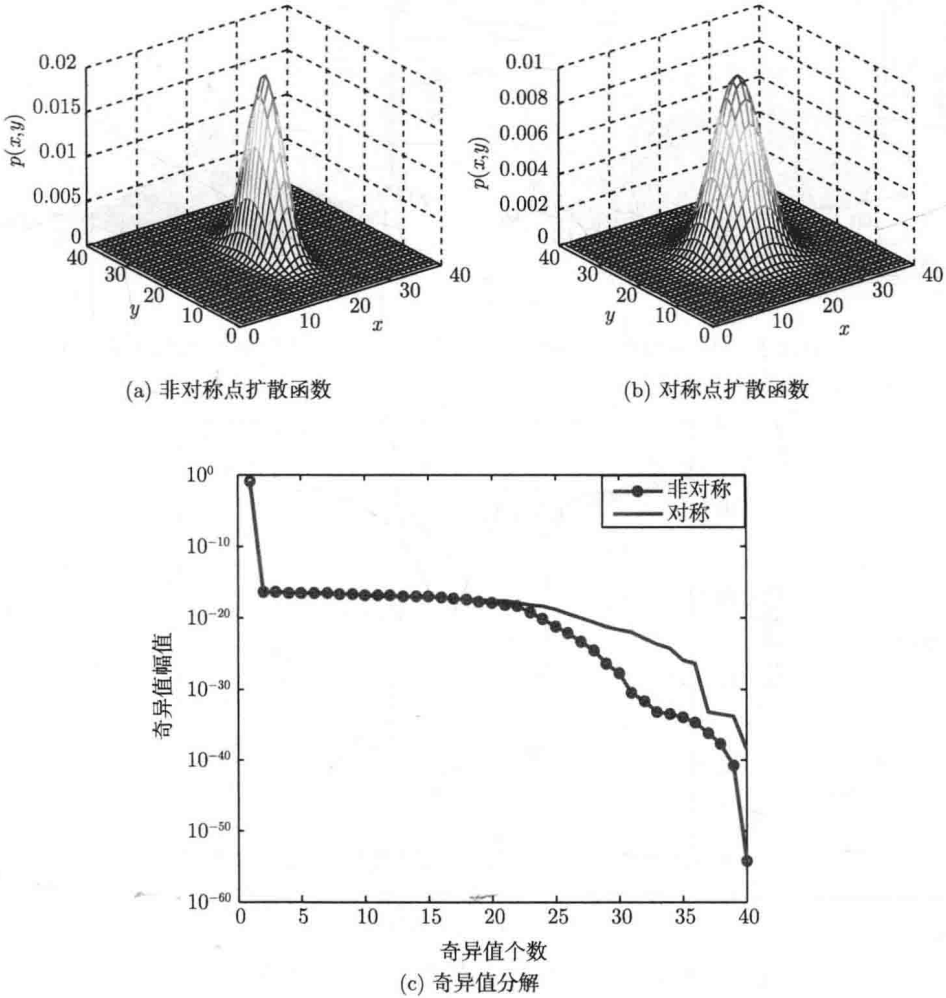


图 1.1 高斯点扩散函数及奇异值分解

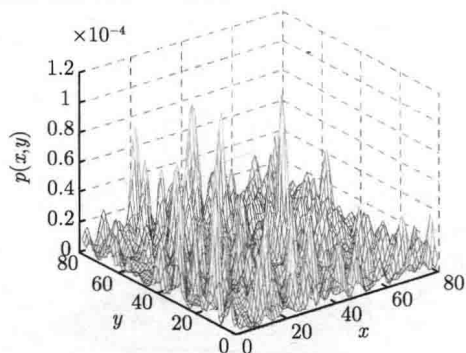
2. 大气扰动点扩散函数

利用天文望远镜获得观测图像，常常受到大气扰动的影响，点扩散函数的表达式为

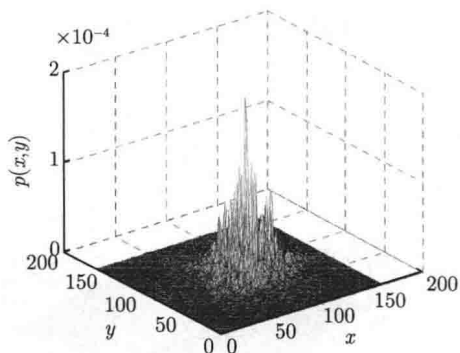
$$p(x,y) = |F^{-1} \{k(x,y) \exp [j\phi(x,y)]\}|^2 \tag{1.5}$$

式中， $k(x,y)$ 为天文望远镜的孔径函数； $\phi(x,y)$ 为大气扰动引起的相位差； F^{-1} 表示傅里叶逆变换。给定孔径函数的相位差函数，产生的点扩散函数和相应的奇异

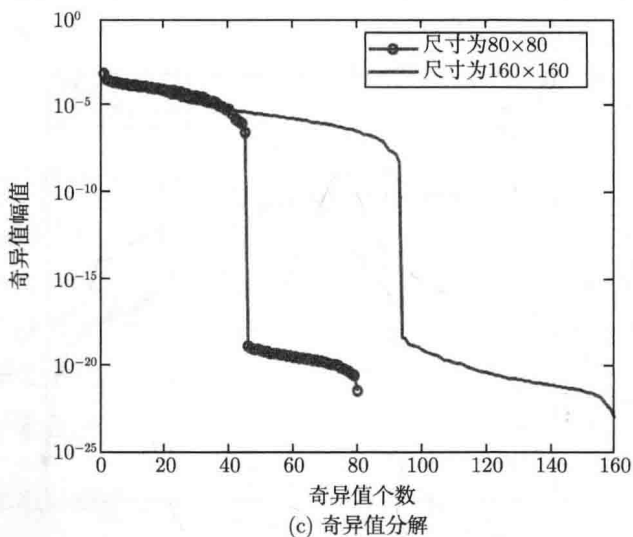
值分解如图 1.2 所示。



(a) 尺寸为80×80的点扩散函数



(b) 尺寸为160×160的点扩散函数



(c) 奇异值分解

图 1.2 大气扰动点扩散函数及奇异值分解

3. 运动点扩散函数

在实际成像过程中,理想目标与成像系统具有相对运动,若理想目标是刚体,成像系统与目标的相对运动可用角度 θ 和相对位移 $(\Delta x, \Delta y)$ 表示,将目标旋转与相对位移写成仿射变换的形式,表达式为

$$p(x, y) = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & \Delta x \\ -\sin \theta & \cos \theta & \Delta y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

式中, θ 、 Δx 和 Δy 是成像系统与理想物体的相对角度、水平与垂直位移。图 1.3 为不同参数形成的运动模糊核和对应矩阵的奇异值分解。

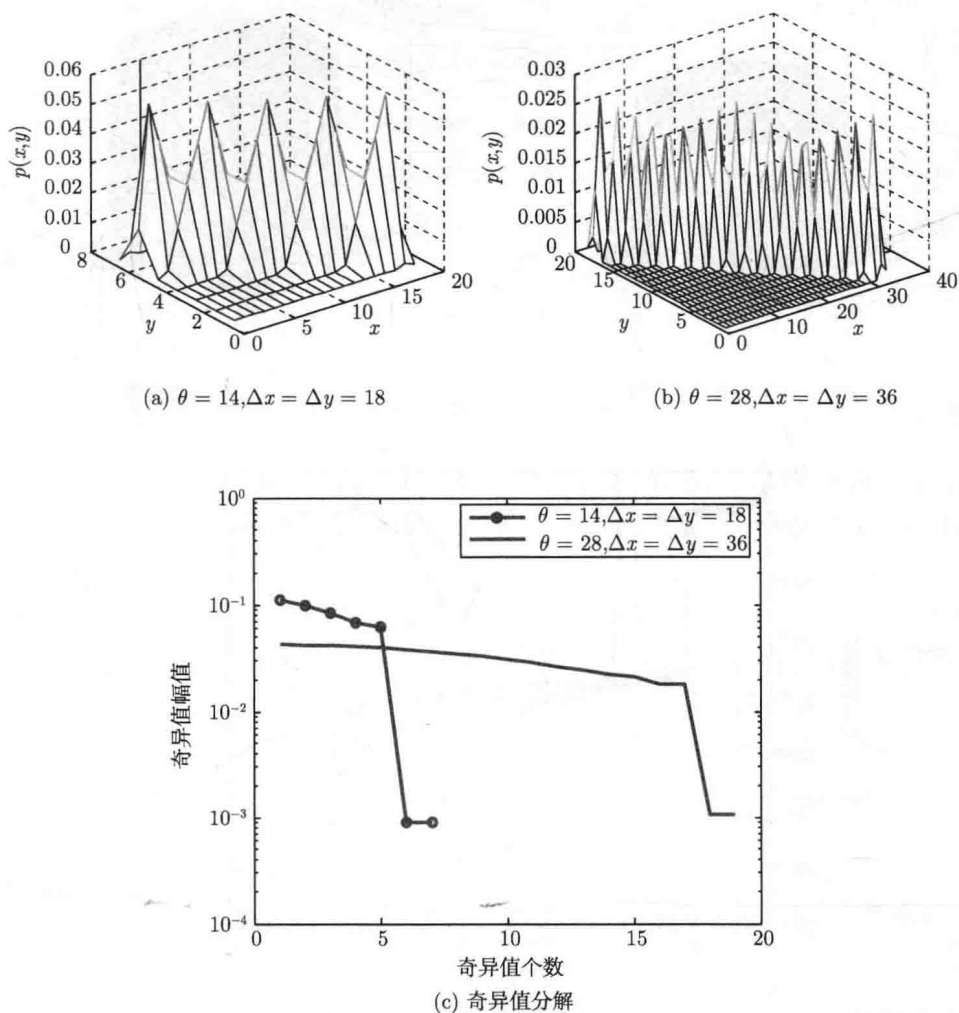


图 1.3 运动点扩散函数及奇异值分解

4. 聚焦点扩散函数

成像系统本身的缺陷或场景的深度导致其无法聚焦, 造成采集获得的图像扭曲。聚焦点扩散函数可用均匀圆面积的反比来刻画, 表达式为

$$p(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi r^2}, & \sqrt{x^2 + y^2} \leq r \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (1.7)$$

式中, r 是圆的半径。图 1.4 为不同参数形成聚焦模糊核和对应矩阵的奇异值分解。

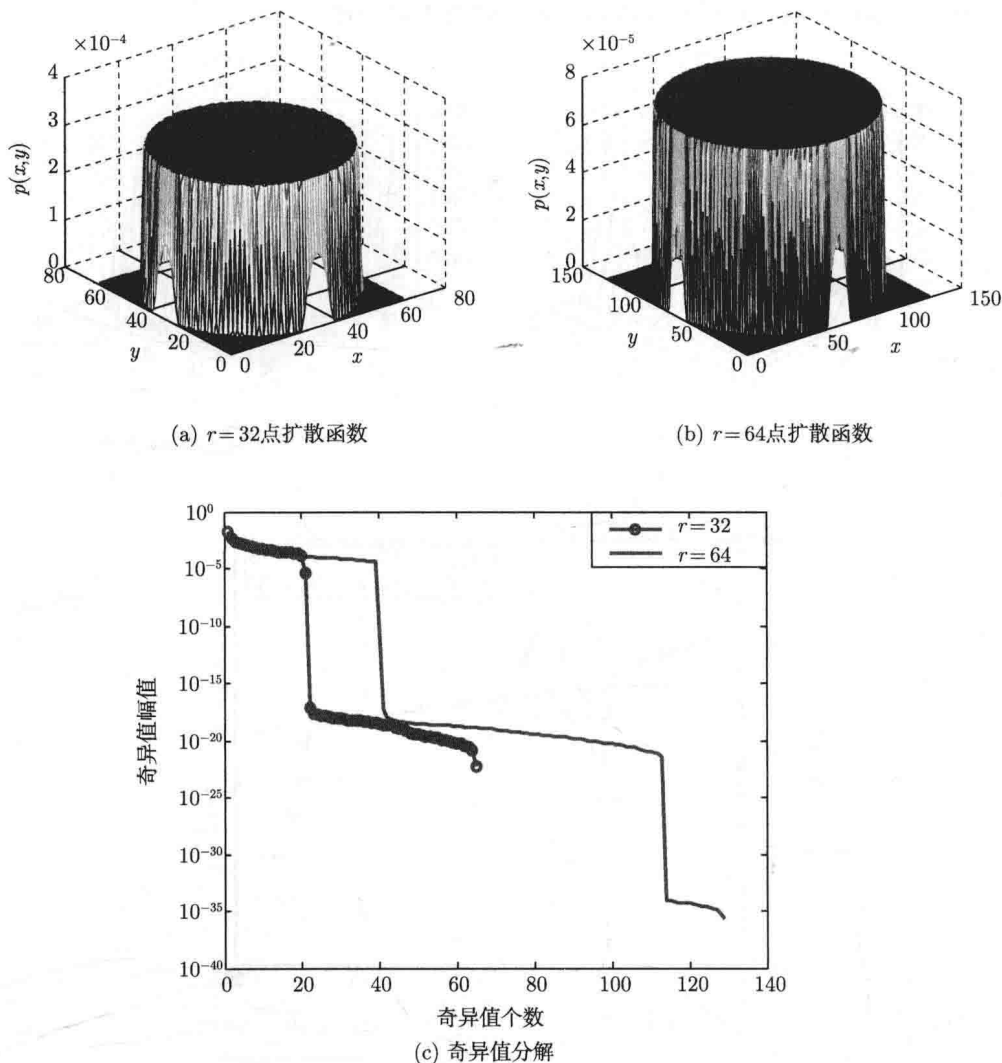


图 1.4 聚焦点扩散函数及其奇异值分解

1.2.2 拟合项的形式

拟合项用来描述采样与成像过程, 由噪声的统计特性决定, 主要有以下几种形式。

(1) 若噪声服从加性高斯分布, 常用最小二乘描述拟合项, 表达式为

$$\Phi(Au, g) = \frac{1}{2} \|Au - g\|_{L_2}^2 \quad (1.8)$$

式 (1.8) 是光滑的凸函数, 具有二阶导数, 若算子 A 是非线性的, 对其进行泰勒展开, 设计基于梯度和海森矩阵的一阶和二阶迭代算法, 但如果梯度幅值较小或海森矩阵不具有特殊结构, 造成算法收敛缓慢。

(2) 若噪声服从椒盐分布, 常用 L_1 范数描述拟合项, 表达式为

$$\Phi(Au, g) = \|Au - g\|_{L_1} \quad (1.9)$$

式 (1.9) 是非光滑的凸函数, 能准确体现椒盐噪声的统计分布, 但非光滑特性对算法设计造成十分不利的影响, 一般需要引入辅助变量, 采用对偶变换, 将原始模型求解转化为对偶模型求解 [4]。

(3) 相干原理成像的雷达系统, 噪声一般服从乘性 gamma 分布, 采用 I -散度函数描述拟合项, 表达式为

$$\Phi(Au, g) = \left\| \ln(Au) + \frac{g}{Au} \right\|_{L_1} \quad (1.10)$$

式 (1.10) 是关于 u 的非凸函数, 最优解依赖初始值, 容易陷入局部极值, 而且由于非凸性, 算法一般收敛很慢。为克服此缺点, 采用对数变换, 将式 (1.10) 转化为凸函数, 表达式为

$$\Phi(Au, g) = \|z + ge^{-z}\|_{L_1} \quad (1.11)$$

式中, $z = \ln(Au)$ 。由于模型是非线性的, 一般采用 Douglas-Rachford 变量分裂技术 [5], 将其转化为分裂的 Bregman 算法和其他非线性优化算法 [6]。

(4) 光子和核磁共振成像, 噪声与像素的幅值相关, 服从泊松分布, 常用 Kullback-Leibler 函数描述拟合项, 表达式为

$$\Phi(u) = \|Au - g \ln(Au)\|_{L_1} \quad (1.12)$$

式 (1.12) 是光滑的凸函数, 但由于具有非线性项, 对算法设计造成不利影响。

1.2.3 正则项的形式

拟合项是从统计意义上建立的, 不能体现解的结构特征, 而且由于模型是不适应的, 仅仅应用拟合项无法获得有效解, 为此, 引入正则项。正则项不但使能量泛函具有唯一的稳定解, 而且能体现解的结构特征, 一般是非线性的, 主要有以下几种形式。

(1) Tikhonov 形式的正则项, 用理想解的 L_2 范数作为正则项, 表达式为

$$R(Du) = \|u\|_{L_2}^2 \quad (1.13)$$

式 (1.13) 最早由 Tikhonov 院士提出, 其光滑特性使得算法设计相对容易, 但模型具有各向同性, 容易抹杀图像的边缘。

(2) 一阶有界变差函数的半范数作为正则项, 表达式为

$$R(Du) = |Du|_{L_1} \quad (1.14)$$

式 (1.14) 最早由 Rudin 等 [7] 提出, 称为 ROF(Rudin-Osher-Fatemi) 模型, 该模型具有各向异性, 有利于保护图像的边缘, 但式 (1.14) 是非光滑的, 使得算法设计比较复杂, 常利用光滑逼近函数、次微分和对偶模型对其进行转化, 然后设计求解算法。

式 (1.14) 等价 Radon 测度, 由 Lebesgue-Nikodym 定理 [8] 可知, 式 (1.14) 可以分解为绝对连续部分 $\nabla u dx$ 和奇异部分 $D^s u$, 表达式为

$$Du = \nabla u dx + D^s u \quad (1.15)$$

式 (1.15) 更能体现图像的间断跳跃特性, 但计算比较复杂, 而且容易在平稳区域产生阶梯效应。

(3) 非局部有界变差函数作为正则项, 表达式为

$$R(Du) = \sqrt{\int_{\Omega} \omega(x, y) [u(x) - u(y)]^2 dy} \quad (1.16)$$

式中, $\omega(x, y)$ 是权重, 一般选用可分离的高斯函数, 表征相邻像素和邻域像素的结构相似性和光学相似性。该模型最早由 Buades 等 [9] 提出, 能有效地保护图像的纹理信息, 在图像纹理合成、修补和压缩传感中得到广泛应用。

(4) 二阶有界变差函数的半范数作为正则项, 表达式为

$$R(Du) = |D^2 u|_{L_1} \quad (1.17)$$

文献 [10] 给出分布导数意义下的二阶有界变差函数定义, 通过变分获得四阶偏微分方程, 该模型有利于克服在平稳区域产生的阶梯效应, 但容易导致图像过于光滑。

(5) 加权 L_p 范数作为正则项, 表达式为

$$R(Du) = \left(\sum_i \omega_i |v_i|^p \right)^{1/p} \quad (1.18)$$

式中, $1 \leq p < 2$; $v = Wu$, W 为小波变换或紧框架变换, 对图像进行稀疏表示。若变换域系数的幅值较大, 赋予较小的权重 ω_i , 进行较弱的惩罚, 反之, 进行较强的惩罚。该正则项是非光滑的凸函数, 不容易进行算法设计。若 $p = 1$, 与式 (1.8) 组合形成能量泛函, 其解等价于软阈值算子。

(6) 分段函数作为正则项, 表达式为

$$R(Du) = \begin{cases} \frac{1}{q(x)} |Du|^{q(x)}, & |Du| \leq \beta \\ |Du| - \frac{\beta q(x) - \beta^{q(x)}}{q(x)}, & |Du| > \beta \end{cases} \quad (1.19)$$

式中, 阈值 $\beta > 0$; $q(x) = 1 + \frac{1}{1 + k |\nabla G_\sigma * g|}$; G_σ 是方差为 σ^2 的高斯函数。用分段函数作为正则项, 对一阶差分幅值小于阈值的像素进行较强的惩罚, 有利于消除噪声; 相反, 进行较弱的惩罚, 有利于保护图像的边缘, 但 β 和 σ^2 很难确定。为摆脱此困境, 在正则项的分段函数中引入共轭指数^[11], 表达式为

$$R(Du) = \begin{cases} \frac{1}{p(x)} |Du|^{p(x)}, & |Du| \leq 1 \\ |Du| - \frac{1}{q(x)}, & |Du| > 1 \end{cases} \quad (1.20)$$

式中, $1 < p(x) < 2$; $\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{q(x)} = 1$ 。

(7) 分数阶有界变差函数作为正则项, 表达式为

$$R(u) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} |\nabla^\alpha u_{ij}| \quad (1.21)$$

式中, α 为分数阶导数的阶次; n 为整数。分数阶有界变差函数是用分数阶导数来定的, 尽管分数阶导数的使用已经有很长的历史, 但到目前为止没有统一的定义形式, 主要有 Riemann-Liouville、Caputo 和 Grunwald-Letnikov 三种形式^[12]。在使用时, 式 (1.21) 常以上确界的形式出现, 表达式为

$$R(u) = \sup_q \langle q, \nabla^\alpha u \rangle_Y \quad (1.22)$$

式中, $q = (q^1, q^2) \in Y$; $|q_{ij}| = \sqrt{(q_{ij}^1)^2 + (q_{ij}^2)^2} \leq 1$; $\sup$ 表示上确界。

1.2.4 权重的确定方法

正则参数 α 是拟合项与正则项的权重, 若数值过小, 噪声滤波不充分, 容易产生高频振荡现象; 若数值过大, 不但噪声被滤除, 而且解的大部分分量也被滤除, 导致获得的图像过于平滑。目前, 确定方法主要有无偏风险预测估计、广义交叉验证法^[13]、 L -曲线法及自适应确定法^[14]等。

1. 无偏风险预测估计

若式 (1.8) 与式 (1.13) 组合形成能量泛函, 变分获得的表达式为

$$u_\alpha = (A^T A + \alpha I)^{-1} A^T g \quad (1.23)$$