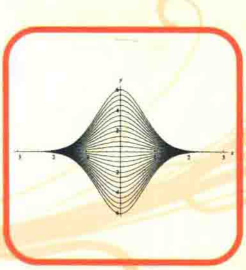
高等院校公共课程“十二五”规划教材

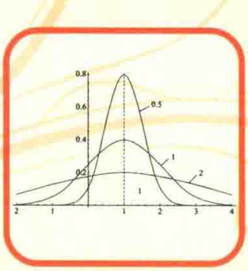
高等工科数学

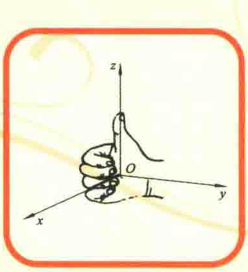
（下册）

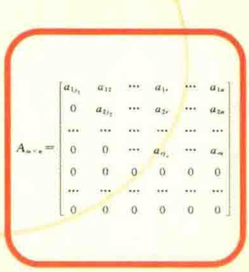
干国胜　肖海华　主编

GAODENG GONGKE SHUXUE (XIACE)









中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

高等院校公共课程“十二五”规划教材

高等工科数学

（下册）

主　编　干国胜　肖海华

副主编　范　光　李爱萍　李　波

参　编　彭先萌　张国梁　彭志南

姜秋明　王致兰　王存荣

中国铁道出版社

CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

内 容 简 介

本书根据现代课程的教育理念，以职业能力为主线构建课程体系，由“实验与对话”引入教学内容，使课程具有开放性和生成性，激发学生学习兴趣，提升学生数学素养。

本书主要内容包括常微分方程、多元函数微积分、行列式与矩阵、线性方程组、随机事件与概率、随机变量及其数字特征、数学建模等。此外，符号计算系统 Mathematica 与数学内容有机结合，突破高职院校生数学计算困难的瓶颈。

本书可作为高等职业院校工科类专业的教材，也可作为相关技术人员的参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

高等工科数学．下册/干国胜，肖海华主编．—北京：中国铁道出版社，2012．3(2013．1 重印)

高等院校公共课程“十二五”规划教材

ISBN 978-7-113-14175-2

Ⅰ．①高…　Ⅱ．①干…②肖…　Ⅲ．①高等数学-高等学校-教材　Ⅳ．①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 012829 号

书　　名：高等工科数学(下册)
作　　者：干国胜　肖海华　主编

策划编辑：秦绪好　　**读者热线**：400-668-0820
责任编辑：赵　鑫
编辑助理：何　佳
封面设计：付　巍　　**封面制作**：白　雪
责任印制：李　佳

出版发行：中国铁道出版社(100054，北京市西城区右安门西街 8 号)
网　　址：http://www.51eds.com
印　　刷：三河市华业印装厂
版　　次：2012 年 3 月第 1 版　　2013 年 1 月第 2 次印刷
开　　本：787 mm×1092 mm　1/16　**印张**：10.5　**字数**：246 千
印　　数：3 001～5 500 册
书　　号：ISBN 978-7-113-14175-2
定　　价：22.00

前　言

迄今为止，由于数学科学的巨大发展，使其比以往任何时代都更牢固地确立了它作为整个科学技术的基础地位。它帮助人们探讨原因、量化过程、控制风险、优化管理、合理预测等，数学正突破传统的应用范围向几乎所有的人类知识领域渗透，并越来越直接地为人类物质生产与日常生活做出贡献。同时，数学作为一种文化，已成为人类文明进步的标志。因此，对于当今社会每一个有文化的人士而言，不论他从事何种职业，都需要学习数学，了解数学和运用数学。

高等职业教育是培养高端专门型人才的职业教育，是要培养适应技术不断更新、市场经济不断变化的高端技能型人才。高职院校高等数学课程的目标是提高学生数学职业核心能力和通识能力，为提高学生职业能力服务，为学生职业生涯可持续发展提供支撑。职业核心能力是指与人交流、与人合作、数字应用、信息处理、解决问题、自我学习、创新改革、外语应用等八项能力，是人们职业生涯中除岗位专业能力之外的基本能力，它适用于各种职业，适应岗位的不断变换，是伴随人终身的可持续发展能力。本书的宗旨就是把职业核心能力的培养渗透到数学教学过程中。具体来说：

1. 培养学生“数字应用”和“信息处理”能力是高等数学的分内工作，关键是要通过教学的方式、方法将其落到实处，把现代职业人和社会人的新能力要求包括新的价值观、道德标准、环境和自然的新认识，以及新一代IT技术与应用及其他新技术的应用落到实处。

2. 将数学史作为背景引入，可激发学生对数学的求知需要和学习兴趣，体会数学的内在本质以及它在文化意义，也为“与人交流”能力的培养搭建了平台。

3. 实验与对话使课程设计面向每一个学生，让学生以前所未有的方式感受数学本身的魅力，通过自己的实践来获得数学知识，即让学生通过自己的“再创造”学习过程获得数学知识，实现课程的开放性和生成性，也为“与人合作”能力的培养创造了条件。

4. 符号计算系统Mathematica与数学内容有机结合，让学生能够借助计算机进行快速复杂的计算，突破学生数学计算困难的瓶颈，也为“自我学习”能力的培养提供了支撑。

5. 数学建模实例，使学生在“做中学”中领悟数学的奥秘，也培养了学生的“解决问题”和“创新改革”方面的能力。

本书编写过程中遵循以下原则：淡化数学推导证明以及对数学理论结构完整的把握；强化理解基本的数学思想；借助软件工具进行快速准确地计算；培养学生的初步数学建模能力，并通过自主学习拓展数学知识的能力；实现自我提升数学素养和数学学习兴趣的目的。

由于时间仓促，编者水平有限，书中疏漏之处在所难免，热诚希望有关专家、读者不吝指正。

本书下册参考学时为50学时，带“*”的内容为选学部分。

本书可供高等职业教育工科类院校的学生作为教材或教学参考书使用。

编　者

2011年12月

目　　录

第 7 章

常微分方程

“300 年来分析是数学里首要的分支，而微分方程又是分析的心脏，这是初等微积分的天然后继课，又是了解物理科学的一门最重要的数学；在它所产生的较深的问题中，它又是高等分析里大部分思想和理论的根源.”塞蒙斯(Simmons)曾如此评价微分方程在数学中的地位.

在科学技术和实际应用中，寻求变量之间的函数关系是一个重要课题. 在大量的实际问题中，人们往往不能直接找到函数关系，但可以得到未知函数及其导数(或微分)与自变量之间关系的表达式，这样的表达式称为**微分方程**. 微分方程是描述客观事物数量关系的一种重要数学模型. 本章将研究几种特殊类型的微分方程及其解法.

实验与对话　作积分曲线族

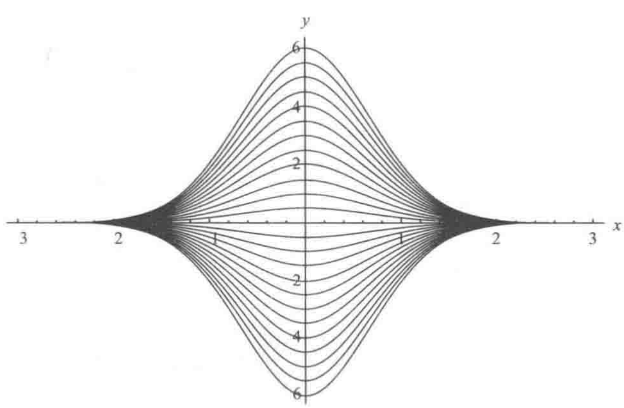
【例】　作微分方程 $y'+2xy=xe^{-x^2}$ 的通解所决定的曲线族.

解　利用 Mathematica 求微分方程通解为

$$y=\frac{1}{2}x^2e^{-x^2}+Ce^{-x^2}$$

其中 C 为任意的常数.

再利用 Mathematica 作曲线 $y=\frac{1}{2}x^2e^{-x^2}+Ce^{-x^2}$ 图形，给出 C 的不同值，观察图形的变化情况(见下图). 展开师生对话，并将对话中所产生的相关问题记录在下面的方框里.



问题记录：

7.1 微分方程的概念与可分离变量的微分方程

7.1.1 微分方程

我们已经学过代数方程，它是含未知数的等式. 在科学研究和现实生活中还常碰到含有未知函数的导数或微分的关系式，例如：

(1)一物体以一定的初速度垂直上抛，设此物体的运动只受重力的影响，因为物体运动的加速度是路程 s 对时间 t 的二阶导数，则其函数关系为

$$ms''(t)=-mg,$$

即

$$s''(t)=-g.$$

(2)已知直角坐标系中的一条曲线，其上任一点 $P(x,y)$ 处的切线斜率等于该点的纵坐标的平方，即 $y'=y^2$.

在实际问题中还可以列出很多这样的关系式，如：

①$y'=2x^2$；

②$(y-2xy)\mathrm{d}x+x^3\mathrm{d}y=0$；

③$y'-2x=3y$；

④$y''=3\sqrt{1+y'^2}$；

⑤$y''+3y'+4y=0$.

下面给出微分方程的定义.

定义 7.1 凡是含有未知函数的导数(或微分)的等式，称为**微分方程**. 未知函数是一元函数的微分方程称为**常微分方程**，未知函数是多元函数的微分方程称为**偏微分方程**.

本章只讨论常微分方程，简称微分方程. 微分方程中出现的未知函数导数的最高阶数，称为微分方程的**阶**. 方程①、②、③为一阶微分方程，方程④、⑤为二阶微分方程.

一阶微分方程的一般形式为 $F(x,y,y')=0$ 或 $y'=f(x,y)$.

n 阶微分方程的一般形式为

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0.$$

其中 x 是自变量，y 是未知函数；$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})$是给定的函数，而且一定含有 $y^{(n)}$.

7.1.2 微分方程的解

定义 7.2 代入微分方程后，使其成为恒等式的函数，称为该微分方程的**解**.

不难验证，函数 $y=x^2+1$，$y=x^2+2$，$y=x^2+6$ 及 $y=x^2+C$ 都是 $y'=2x$ 的解.

若微分方程的解中含有相互独立的任意常数的个数与方程的阶数相同，则称此解为该微分方程的**通解**(或**一般解**). 确定微分方程通解中的任意常数的值的条件称为**初始条件**. 通解中的任意常数被确定而得到的解，称为方程的**特解**.

例如 $y=x^2+C$ 是 $y'=2x$ 的通解. $y=x^2+1$，$y=x^2-\frac{1}{2}$都是 $y'=2x$ 的特解.

定义 7.3 求微分方程 $y'=f(x,y)$满足初始条件$y|_{x=x_0}=y_0$特解的问题称做一阶微分方

程的**初始问题**. 记作：$\begin{cases} y'=f(x,y) \\ y|_{x=x_0}=y_0 \end{cases}$，求解某初值问题就是求方程的特解.

【例 7.1】 验证：函数 $y=C_1\mathrm{e}^x+C_2x\mathrm{e}^x$ （C_1,C_2 是任意常数）是微分方程 $y''-2y'+y=0$ 的通解.

解 对 $y=C_1\mathrm{e}^x+C_2x\mathrm{e}^x$ 的两边求导数得

$$y'=C_1\mathrm{e}^x+C_2(1+x)\mathrm{e}^x,\ y''=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^x+C_2(1+x)\mathrm{e}^x,$$

将 y,y' 及 y'' 代入原方程的左边，有

$$[C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^x+C_2(1+x)\mathrm{e}^x]-2[C_1\mathrm{e}^x+C_2(1+x)\mathrm{e}^x]+(C_1\mathrm{e}^x+C_2x\mathrm{e}^x)=0,$$

即函数 $y=C_1\mathrm{e}^x+C_2x\mathrm{e}^x$ （C_1,C_2 是任意常数）是微分方程 $y''-2y'+y=0$ 的通解.

【例 7.2】 验证方程 $y'=\dfrac{2y}{x}$ 的通解为 $y=Cx^2$ （C 为任意常数），并求满足初始条件 $y|_{x=1}=2$ 的特解.

解 由 $y=Cx^2$ 得 $y'=2Cx$，

将 y 及 y' 代入原方程的两边，左边有 $y'=2Cx$，而右边 $\dfrac{2y}{x}=2Cx$，所以函数 $y=Cx^2$（C 为任意常数）为方程 $y'=\dfrac{2y}{x}$ 的通解.

将初始条件 $y|_{x=1}=2$ 代入通解，得 $C=2$，故所求特解为 $y=2x^2$.

【例 7.3】 设曲线上的任一点 $P(x,y)$ 处的切线斜率与切点的横坐标成反比，且曲线通过点(1,4)，求该曲线的方程.

解 设所求曲线的方程为 $y=y(x)$，依题意，得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{k}{x}$，即

$$\mathrm{d}y=\frac{k}{x}\mathrm{d}x$$

两边积分
$$\int \mathrm{d}y=\int \frac{k}{x}\,\mathrm{d}x$$

得
$$y=k\ln x+C.$$

由已知曲线通过点(1,4)，代入上式，得 $C=4$.

所以，所求曲线方程为 $y=k\ln x+4$.

一般地，微分方程的特解的图形是一条曲线，该曲线称做微分方程的**积分曲线**；通解是一族积分曲线；初始问题 $\begin{cases} y'=f(x,y) \\ y|_{x=x_0}=y_0 \end{cases}$ 是微分方程通过点 (x_0,y_0) 的那条积分曲线.

7.1.3 可分离变量的微分方程

定义 7.4 形如 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x)g(y)$ 的一阶微分方程，称为**可分离变量的微分方程**.

该微分方程的特点是等式右边可以分解成两个函数之积，其中一个仅是 x 的函数，另一个仅是 y 的函数，即 $f(x),g(y)$ 分别是变量 x,y 的已知连续函数.

可分离变量的微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x)g(y)$ 的求解的步骤为：

第一步，分离变量 $\dfrac{1}{g(y)}\mathrm{d}y=f(x)\mathrm{d}x \quad (g(y)\neq 0)$；

第二步，两边积分 $$\int \frac{1}{g(y)}\mathrm{d}y = \int f(x)\mathrm{d}x + C.$$

这里 $\int \frac{1}{g(y)}\mathrm{d}y$，$\int f(x)\mathrm{d}x$ 应分别理解为 $\frac{1}{g(y)}$，$f(x)$ 的某个原函数，C 为任意常数，才能保证通解中所含任意常数只有一个.

因此，可分离变量的微分方程的解法就是分离出变量，然后两边积分.

【例 7.4】 求方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{x}{y}$ 的通解.

解 分离变量得 $$y\mathrm{d}y=-x\mathrm{d}x,$$

两边积分 $$\int y\mathrm{d}y = \int -x\mathrm{d}x,$$

得 $$\frac{1}{2}y^2=-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}C \quad (C\text{ 是任意常数}),$$

故方程得通解为 $x^2+y^2=C$.

【例 7.5】 求方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{y}{x}$ 的通解.

解 分离变量得 $$\frac{\mathrm{d}y}{y}=-\frac{1}{x}\mathrm{d}x,$$

两边积分 $$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int -\frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

得 $$\ln|y|=-\ln|x|+C_1$$

所以 $$y=\pm \mathrm{e}^{C_1}\frac{1}{x}$$

当 C_1 为任意常数时，$\pm \mathrm{e}^{C_1}$ 为任意非零常数，又因为 $y=0$ 也是微分方程的解，但已包含在通解中，所以微分方程的通解为 $y=\frac{C}{x}$ （C 为任意常数）.

【例 7.6】 求方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2xy^2$ 的通解.

解 分离变量得 $$\frac{\mathrm{d}y}{y^2}=2x\mathrm{d}x \quad (y\neq 0)$$

两边积分 $$\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2} = \int 2x\mathrm{d}x$$

得 $$-\frac{1}{y}=x^2+C.$$

故方程的通解为 $$y=-\frac{1}{x^2+C}.$$

注 $y=0$ 也是微分方程的解，但不是特解. 这说明了微分方程的通解并不是微分方程的全部解.

【例 7.7】 求微分方程 $xy\mathrm{d}y+\mathrm{d}x=y^2\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y$ 满足条件 $y|_{x=0}=2$ 的特解.

解 分离变量得 $$\frac{y}{y^2-1}\mathrm{d}y=\frac{1}{x-1}\mathrm{d}x,$$

两边积分得 $$\int \frac{y}{y^2-1}\mathrm{d}y = \int \frac{1}{x-1}\mathrm{d}x,$$

即 $$\frac{1}{2}\ln|y^2-1|=\ln|x-1|+C_1,$$

$$|y^2-1|=(x-1)^2e^{2C_1},$$

所以
$$y^2-1=\pm e^{2C_1}(x-1)^2,$$

记$\pm e^{2C_1}=C\neq 0$，得方程的通解 $y^2-1=C(x-1)^2$.

可以验证 $y=\pm 1$ 也是原方程的解，所以原方程的通解为

$$y^2-1=C(x-1)^2 \quad (C\text{ 为任意常数}).$$

代入初始条件 $y|_{x=0}=2$得 $C=3$，所以，所求特解为 $y^2-1=3(x-1)^2$.

注　以后为了方便起见，在求解时遇到对数不再添加绝对值，也不对常数作细致的讨论.

【例 7.8】　设降落伞从跳伞塔下落后，所受空气阻力与速度成正比，并设降落伞离开跳伞塔顶时($t=0$)速度为零，求降落伞下落速度与时间的函数关系.

解　设伞下落速度为 $v(t)$，在下落时，同时受到重力 P 与阻力 R 的作用，重力大小为 mg，方向与 v 一致；阻力大小为 kv(k 为比例系数)，方向与 v 相反，从而伞所受外力为(见图 7－1)

$$F=mg-kv.$$

据牛顿第二运动定律 $F=ma$，得到函数 $v(t)$应满足微分方程

$$\begin{cases} m\dfrac{dv}{dt}=mg-kv, \\ v|_{t=0}=0 \end{cases}$$

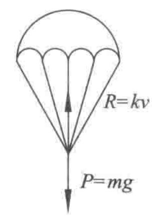


图 7－1

该方程是可分离变量的，分离变量得

$$\frac{dv}{mg-kv}=\frac{dt}{m},$$

两边积分有
$$\int\frac{dv}{mg-kv}=\int\frac{dt}{m},$$

即
$$-\frac{1}{k}\ln(mg-kv)=\frac{t}{m}+C_1,$$

所以
$$mg-kv=e^{-kC_1}e^{-\frac{kt}{m}}.$$

可得
$$v=\frac{mg}{k}+Ce^{-\frac{kt}{m}}\text{，其中 } C=-\frac{1}{k}e^{-kC_1}.$$

由初始条件$v|_{t=0}=0$，有 $C=-\dfrac{mg}{k}$，

故所求的函数为　$v=\dfrac{mg}{k}(1-e^{-\frac{kt}{m}})$.

【例 7.9】　求微分方程$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{x-y}+1$ 的通解.

解　该方程不直接表现为可分离变量的微分方程.

作变换 $u=x-y$，则
$$\frac{du}{dx}=1-\frac{dy}{dx},$$

原方程变为
$$u\,du=-dx,$$

两边积分
$$\int u\,du=\int -dx,$$

得
$$\frac{1}{2}u^2=-x+C_1,$$

回代得原方程的通解　$(x-y)^2=-2x+C$.

从上例可知，原方程不是可分离变量的方程，但采用变量代换后，变为可分离变量的方程，事实上，变量代换是解微分方程的一个常用方法.

7.1.4 利用 Mathematica 解微分方程

Mathematica 能求线性与非线性的常微分方程(组)的精确解，求解的类型大致覆盖了人工求解的范围，功能很强. 但是，计算机不如人灵活(例如在隐函数和隐方程的处理方面)，输出的结果与人工计算的结果可能在形式上不同.

利用 Mathematica 求解微分方程，命令语法格式及其意义：

DSolve[微分方程，y，x]

用来求解非独立变量 x 的函数 y 的一个微分方程 .

求特解的语句如下：

DSolve[{微分方程，初始条件}，未知函数，自变量]

注意：

(1) 未知函数总带有自变量，例如 $y[x]$，不能只键入 y；

(2) 方程中的等号，需连续键入两个等号表示；

(3) 导数符号用键盘上的撇号，连续两撇表示二阶导数；

(4) 在使用命令时，一般把初始条件作为一个方程来看待；

(5) 输出结果总是尽量用显式解表出，有时反而会使表达式变得复杂；

(6) 在没有给定方程的初值条件下，我们所得到的解包括 $C[1]$，$C[2]$是待定系数.

【例 7.10】 求微分方程$\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}=0$ 的通解.

解 In[1]:=DSolve[$y'[x]-\frac{y[x]}{x}==0, y[x], x$]

Out[1] =$\{\{y[x]\to xC[1]\}\}$.

【例 7.11】 求微分方程 $y'-y=e^{-x}$的通解.

解 In[1]:= DSolve[$y'[x]-y[x]==e^{-x}, y[x], x$]

Out[1]=$\{\{y[x]\to -\frac{e^{-x}}{2}+e^{x}C[1]\}\}$.

【例 7.12】 求微分方程 $y''-3y'+2y=3xe^{2x}$ 的通解，并求满足初始条件 $y|_{x=1}=e^2$，$y'|_{x=0}=2$的特解.

解 In[1]:=DSolve[$y''[x]-3y'[x]+2y[x]==3xe^{2x}, y[x], x$]

Out[1]=$\{\{y[x]\to \frac{3}{2}e^{2x}(2-2x+x^2)+e^{x}C[1]+e^{2x}C[2]\}\}$

In[2]:=DSolve[$\{y''[x]-3y'[x]+2y[x]==3xe^{2x}, y[1]==e^2, y'[0]==2\}$,
$y[x], x$]

Out[2]=$\{\{y[x]\to \frac{1}{2}e^{2x}(5-6x+3x^2)\}\}$.

习题 7.1

1. 指出下列微分方程的阶数(其中 y 为未知量)：

(1) $x\,dx+y^3\,dy=0$；　　(2) $\frac{dy}{dx}=2xy$；

(3) $4\mathrm{d}y=\dfrac{9x}{9-x^2}\mathrm{d}x$；　　(4) $y''-9y'=3x^2+1$；

(5) $xy''-2y'=8x^2+\cos x$；　　(6) $y'y''-x^2y=1$.

2. 验证下两题各函数是否为所给微分方程的通解，若是求出相应的特解.

(1) $3y-xy'=0, y=Cx^3$　$\left(y(1)=\dfrac{1}{3}\right)$；

(2) $y''+y=\mathrm{e}^x, y=C_1\sin x+C_2\cos x+\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^x$　$\left(y(0)=2, y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}\right)$.

3. 用分离变量法求解下列微分方程：

(1) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-2x(y-2)$；　　(2) $y'+y=0$；

(3) $(1+x^2)\mathrm{d}y+(1+y^2)\mathrm{d}x=0$；　　(4) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y}{\sqrt{1-x^2}}$；

(5) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=(1+x+x^2)y$；　　(6) $(\mathrm{e}^{x+y}-\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^{x+y}+\mathrm{e}^y)\mathrm{d}y=0$.

4. 写出由下列条件确定的曲线所满足的微分方程：

(1) 曲线在点 (x,y) 处的切线斜率等于该点横坐标的 2 倍.

(2) 曲线在点 $P(x,y)$ 处的法线与 x 轴的交点为 Q，且线段 PQ 被 y 轴平分.

7.2 齐次微分方程

7.2.1 齐次微分方程的概念

在实际问题中我们常见如下微分方程：

(1) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\sqrt{1-\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}$；

(2) $xy'=\sqrt{xy}+y(x>0)$；

(3) $\dfrac{y}{x}\mathrm{d}x-\tan\dfrac{y}{x}\mathrm{d}y=0$；

(4) $(xy-y^2)\mathrm{d}x-(x^2-2xy)\mathrm{d}y=0$ 等.

这些方程都具有 $y'+g\left(\dfrac{y}{x}\right)=0$ 的特点.

定义 7.5　如果一阶微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y)$ 中的 $f(x,y)$ 可写成 $\dfrac{y}{x}$ 的函数，即

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

称此方程为齐次微分方程.

如 $(xy-y^2)\mathrm{d}x-(x^2-2xy)\mathrm{d}y=0$ 可变形为如下齐次**微分方程**

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{xy-y^2}{x^2-2xy}=\frac{\dfrac{y}{x}-\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}{1-2\left(\dfrac{y}{x}\right)}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

注　要判断方程 $y'=f(x,y)$ 是否为齐次微分方程，只需用 tx, ty 分别替换 $f(x,y)$ 中的

x,y,如果 $f(tx,ty)=f(x,y)$,则该方程就是齐次微分方程.

【例 7.13】 判断方程 $xy'=\sqrt{xy}+y(x>0)$ 是否为齐次微分方程.

解 用 tx,ty 分别替换 $xy'=\sqrt{xy}+y$ 中的 x,y 得

$$txy'=\sqrt{txty}+ty,$$

即 $xy'=\sqrt{xy}+y$ 与原方程相同,

所以方程 $xy'=\sqrt{xy}+y(x>0)$ 是齐次微分方程.

7.2.2 齐次微分方程的解法

齐次微分方程的一般形式为 $\frac{dy}{dx}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$.

引入变量替换 $u=\frac{y}{x}$,有

$$y=ux,\quad \frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx},$$

将它们代入齐次方程得
$$u+x\frac{du}{dx}=\varphi(u),$$

移项
$$x\frac{du}{dx}=\varphi(u)-u,$$

分离变量得
$$\frac{du}{\varphi(u)-u}=\frac{dx}{x},$$

两边积分得
$$\int\frac{du}{\varphi(u)-u}=\int\frac{dx}{x}.$$

求出积分后,再用 $\frac{y}{x}$ 代替 u,即得所给齐次方程的通解.

【例 7.14】 求解方程

$$y^2+x^2\frac{dy}{dx}=xy\frac{dy}{dx}.$$

解 方程可化为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{xy-x^2}=\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2}{\frac{y}{x}-1},$$

该方程为齐次方程. 令 $\frac{y}{x}=u$,则有 $\frac{dy}{dx}=x\frac{du}{dx}+u$,代入上述方程,方程化为

$$x\frac{du}{dx}+u=\frac{u^2}{u-1},$$

即
$$x\frac{du}{dx}=\frac{u}{u-1}.$$

分离变量得
$$\left(1-\frac{1}{u}\right)du=\frac{dx}{x},$$

两边积分得
$$u-\ln u=\ln x+\ln\frac{1}{C},$$

即
$$\ln u+\ln x=u+\ln C,$$