

普通高等教育“十三五”规划教材

工程力学 (II)

(第2版)

主 编 王海容

副主编 胡玮军 危洪清



中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

普通高等教育“十三五”规划教材

工程力学 (II)

(第2版)

主 编 王海容

副主编 胡玮军 危洪清



中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

· 北京 ·

内 容 提 要

《工程力学》是根据教育部制定的普通高等学校“理论力学”和“材料力学”教学基本要求编写的,分为(I)(II)两册,其中:(I)为理论力学部分,包括静力学、运动学、动力学的全部必修基本内容和部分选修内容共12章;(II)为材料力学部分全部必修基本内容和部分选修内容,包括杆件的轴向拉压、扭转、剪切、弯曲、组合变形、压杆稳定、动载荷、能量方法等共10章。本书内容严谨,结构紧凑,表述简洁,与后续弹性力学、流体力学、机械原理等课程建立了自然的联系。书末附有附录和习题答案。

本书可作为高等院校土木、交通、水利、地矿、材料、能源、动力和机械类专业本科生教材或教学参考书,也可供相关工程技术人员参考使用。

图书在版编目(CIP)数据

工程力学. II / 王海容主编. -- 2版. -- 北京 :
中国水利水电出版社, 2018.7
普通高等教育“十三五”规划教材
ISBN 978-7-5170-6591-3

I. ①工… II. ①王… III. ①工程力学—高等学校—
教材 IV. ①TB12

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第147556号

书 名	普通高等教育“十三五”规划教材 工程力学(II)(第2版)
作 者	GONGCHENG LIXUE(II) 主 编 王海容 副主编 胡玮军 危洪清
出版发行	中国水利水电出版社 (北京市海淀区玉渊潭南路1号D座 100038) 网址: www.waterpub.com.cn E-mail: sales@waterpub.com.cn 电话: (010) 68367658 (营销中心)
经 售	北京科水图书销售中心(零售) 电话: (010) 88383994、63202643、68545874 全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排 版	中国水利水电出版社微机排版中心
印 刷	北京瑞斯通印务发展有限公司
规 格	184mm×260mm 16开本 16.25印张 385千字
版 次	2011年8月第1版第1次印刷 2018年7月第2版 2018年7月第1次印刷
印 数	0001—3000册
定 价	39.00元

凡购买我社图书,如有缺页、倒页、脱页的,本社营销中心负责调换

版权所有·侵权必究

前言

《工程力学》根据教育部高等教育司组织制定的普通高等学校“理论力学”和“材料力学”教学基本要求，针对应用型人才培养目标，在满足教学基本要求的基础上，以实用为主、够用为度的原则对传统经典教材内容进行整合，在内容的叙述、逻辑关系的展开、应用问题等方面加以改编，其问题的提出、概念的引入、例题和习题的选取尽可能“源于工程、适于工程、用于工程”。

《工程力学（Ⅱ）》为材料力学部分，主要任务是研究构件在外力作用下的变形规律和材料的力学性能，从而建立构件满足强度、刚度和稳定性要求所需的条件，为安全、经济地设计构件提供必要的理论基础和科学的计算方法。内容包括杆件的轴向拉压、扭转、剪切、弯曲、组合变形、压杆稳定、动载荷、能量方法等，共有10章内容并附有附录和习题答案。本书在第1版内容的基础上做了较大幅度的修改，修订工作由胡玮军、危洪清完成，其中胡玮军修订了第1章、第2章、第4章、第5章、第6章、第7章、第9章、第10章和附录部分，危洪清修订了第3章和第8章。主要修订工作如下：

(1) 对本套书内容的语言叙述部分进行了调整，对原来某些叙述过于简单，读者反映不易理解的部分和某些论述不太清晰的部分进行了重新编排，力求更加浅显、明确和严谨，以利于读者阅读理解。

(2) 对书中的一些例题进行了调整，在例题中增加了分析部分，介绍其工程背景和分析思路，加强对读者力学建模能力的培养。

(3) 删减了个别不太合适的习题，增加了习题总体数量，使读者能有更大的选择余地。

(4) 在第1章绪论中增加了“1.4 变形与应变”一节。

(5) 在第2章中增加了“2.2.3 斜截面上的应力”一小节。

(6) 对原书中9.2节和9.3节进行了大幅修改，对动载荷问题进行了分类说明。

本书可作为高等院校土木、交通、水利、地矿、材料、能源、动力和机械类专业本科生教材或教学参考书。也可供有关工程技术人员参考使用。

在本书的编写过程中得到了邵阳学院机械与能源工程系领导、老师们的大力支持，在此深表感谢！

由于编者水平有限，书中难免存在疏漏和不妥之处，恳请读者批评指正。

编 者

2018 年 4 月

目 录

前言

第 1 章 绪论	1
1.1 材料力学的任务	1
1.2 变形固体的基本假设	2
1.3 内力和应力	3
1.4 变形与应变	4
1.5 杆件变形的基本形式	4
第 2 章 轴向拉伸、压缩和剪切	6
2.1 概述	6
2.2 轴向拉伸或压缩时内力和应力	6
2.3 材料的力学性能	10
2.4 许用应力、轴向拉（压）杆的强度计算	17
2.5 轴向拉伸和压缩的变形	21
2.6 拉伸和压缩的超静定问题	24
2.7 应力集中	31
2.8 剪切和挤压的实用计算	32
习题	38
第 3 章 扭转	44
3.1 概述	44
3.2 轴扭转时的内力	45
3.3 纯剪切	46
3.4 圆轴扭转时的应力和变形	48
3.5 圆轴扭转时的强度和刚度计算	52
3.6 圆柱形密圈螺旋弹簧的应力和变形	55
3.7 非圆截面等直杆的纯扭转	59
习题	60
第 4 章 弯曲应力	64
4.1 概述	64

4.2 梁的剪力与弯矩·剪力图和弯矩图	65
4.3 梁横截面上的正应力	75
4.4 弯曲切应力	79
4.5 平面弯曲梁的强度计算	83
4.6 提高弯曲强度的措施	87
习题	90
第5章 弯曲变形	98
5.1 梁的位移·挠度与转角	98
5.2 挠曲线近似微分方程·积分法求弯曲变形	99
5.3 叠加法求梁的变形	103
5.4 梁弯曲时的刚度条件	107
5.5 简单静不定梁的解法	108
5.6 提高弯曲刚度的措施	110
习题	110
第6章 应力状态分析	114
6.1 概述	114
6.2 平面应力状态分析的解析法	117
6.3 平面应力状态分析的图解法	121
6.4 三向应力状态	126
6.5 广义胡克定律	128
6.6 复杂应力状态下的应变能比能	132
6.7 材料的失效和强度理论	134
习题	139
第7章 组合变形	142
7.1 概述	142
7.2 斜弯曲	143
7.3 拉伸(压缩)与弯曲的组合	147
7.4 弯曲与扭转组合变形	151
习题	156
第8章 压杆稳定	160
8.1 压杆稳定的概念	160
8.2 压杆的临界压力和临界应力	162
8.3 压杆稳定性计算	168
8.4 提高压杆稳定性的措施	170
习题	172

第 9 章 动载荷	175
9.1 概述	175
9.2 动静法的应用	175
9.3 杆件受冲击时应力和变形的计算	179
9.4 交变应力及构件的疲劳强度计算	185
习题	195
第 10 章 能量方法	199
10.1 概述	199
10.2 应变能的计算公式及其特征	199
10.3 应变能的普遍表达式	205
10.4 功的互等定理和位移互等定理	206
10.5 卡氏定理	207
10.6 虚功原理及单位载荷法	211
习题	216
附录 A 平面图形的几何性质	220
A.1 形心和静矩	220
A.2 惯性矩、惯性积、极惯性矩、惯性半径	222
A.3 平行移轴定理·组合图形的惯性矩与惯性积	224
A.4 转轴公式、主惯性矩	225
习题	228
附录 B 型钢表 (GB/T 706—2008)	231
习题答案	243
参考文献	252

第 1 章 绪 论

1.1 材料力学的任务

工程中各种机械设备和产品或建筑物都是由很多部件（零件）组成的，这些部件（零件）称为构件。在工作中，各构件都将受到各种外力的作用，这些外力称为载荷，如吊车梁承受吊车和起吊重物的重力、车床主轴将受到齿轮的啮合力和切削力的作用。构件在载荷的作用下将产生变形，为保证整个结构或设备的安全、正常工作，要求每个构件均能正常工作，为此必须要求构件在承受载荷时具有足够的承载能力。在材料力学中，主要通过以下三个方面来衡量构件的承载能力。

（1）构件在载荷作用下具有足够的抵抗破坏的能力，即构件必须具有足够的强度。例如：机床主轴如果因载荷过大而发生断裂，则整个机床就无法正常工作；承受内压的压力容器不能因压力过大而发生爆炸等。

（2）构件在载荷作用下具有足够的抵抗变形的能力，即构件必须具有足够的刚度。例如，车床主轴虽然没有断裂，但若产生过大的变形，也将影响到零件的加工精度。

（3）构件在载荷作用下保持原有稳定平衡状态的能力，即构件必须具有足够的稳定性。例如，房屋中承受压力的细长柱，当压力超过一定限度后就可能发生明显的弯曲变形，甚至导致房屋倒塌。

在结构设计中，一方面往往要求构件必须满足强度、刚度及稳定性要求，另一方面要尽量降低成本和减轻结构的自重。前者往往要求使用更多的材料，而后者则要求减少材料用量，两者之间存在着矛盾。材料力学的任务就是合理地解决这种矛盾，在保证满足承载能力要求的前提下，又能合理地降低成本，提高经济效益。材料力学就是研究构件在外力作用下变形与破坏的规律，为构件选择恰当的材料，确定最合理的截面形状与尺寸，提供理论依据、计算方法和试验技术。

构件的强度、刚度和稳定性问题均与构件所用的材料的力学性能（主要是指在外力作用下材料的变形与所受外力之间的关系，以及材料抵抗变形和破坏的能力）有关，这些力学性能均需通过材料试验来测定。此外，有些单靠现有理论难以解决的问题，也需借助试验来解决。因此，试验研究和试验技术在材料力学中具有重要的作用。

工程中的构件，根据其几何特征可分为杆件、板、壳、块体和薄壁杆件等。工程结构中很多构件，其纵向（长度方向）尺寸远大于横向（垂直于长度方向）尺寸，常称为杆件（图 1.1）。杆有两个主要的几何因素，即轴线和横截面。所谓轴



图 1.1

线是指杆件各横截面形心的连线；所谓横截面就是杆件上与轴线正交的各截面。如果杆的轴线为直线，则称为直杆；若直杆的各横截面形状及面积均相等，称其为等直杆；若杆的轴线为曲线，通常称为曲杆；横截面大小不等的杆称为变截面杆。梁、柱和传动轴等都可抽象为直杆。杆件无论是几何构成还是承受的外力都比较简单，材料力学作为变形体力学的基础，主要研究等截面的直杆和直梁。

1.2 变形固体的基本假设

构件材料的物质结构和性质是多种多样的，但通常都是固体，并且在载荷的作用下都会发生变形——形状和尺寸的变化。因此，这些材料统称为变形固体。材料力学的研究对象是变形固体。对变形固体制成的构件，为了简化计算常根据所研究问题的性质，略去一些次要因素，将它们抽象为理想化的材料，从而使所研究的问题简化。材料力学中对变形固体做了如下几个假设。

1.2.1 连续均匀性假设

认为变形固体在其整个几何体内毫无空隙地充满了物质，并且整个几何体内材料的结构和性质相同。事实上，组成固体的粒子之间并不连续，但它们之间所存在的空隙与构件的尺寸相比极其微小，可以忽略不计。根据这一假设，可从变形固体中取任何微小部分来研究材料的性质，然后将结果延拓于整个构件。物体内的一些物理量（如应力、变形和位移等）可用位置坐标的连续函数表示。

1.2.2 各向同性假设

认为变形固体在各个方向具有相同的力学性质。具备这种属性的材料称为各向同性材料。工程中的金属材料，每个晶粒在不同的方向有不同的性质。但构件中晶粒的数量极多，晶粒的尺寸及其间的间隙与构件尺寸相比均极其微小，且晶粒在构件内错综交叠地排列着，所以材料的力学性质是组成材料的所有晶粒的性质的统计平均量，在宏观上可以认为晶体结构的材料是各向同性的。至于均匀的非晶体材料，如塑料、玻璃等都可认为是各向同性的。根据这一假设，我们就可在材料的某一处研究某一方向的性质后，将其结果用于其他方向。

1.2.3 小变形假设

认为变形固体在外力作用下产生的变形与构件原有尺寸相比非常微小。根据这一假设，在计算中可以不考虑外力作用点处微小位移，在研究构件的平衡和运动以及内部受力和变形等问题时，均可按构件的原始尺寸、形状和位置进行计算。

工程中的材料，在载荷作用下发生变形，当载荷不超过一定的限度时，大部分的材料在载荷解除后均可恢复原状。在载荷超过一定限度后，载荷卸除后只能部分地复原而残留下一部分变形不能消失。卸载后能完全消失的变形称为弹性变形，不能消失而残留下来的变形称为塑性变形。只要载荷不超过一定限度，材料发生的变形就完全是弹性变形。工程中常要求构件在正常工作中只发生弹性变形，一旦发生塑性变形，则认为材料的强度失效。所以在材料力学中所研究的大部分问题，多局限于弹性变形范围。

综上所述，在材料力学中把实际材料看成是连续均匀的、各向同性的变形固体，并且

在大部分场合下局限在弹性变形范围和小变形条件下进行研究。

1.3 内力和应力

1.3.1 内力

对于研究的构件来讲,其他构件和物体作用其上的力均为外力。作用于构件上的外力企图改变构件的形状和大小,则在构件内部将产生附加内力以抵抗外力,阻止构件发生变形和破坏。这种附加内力与材料原本具有的内力(材料各部分相互作用的分子力乃至原子力)不同,是由于外力作用下物体内部各部分之间因相对位置改变而引起的附加相互作用力。这种在外力作用下由于变形而产生的构件相连两部分的相互作用力,在材料力学中称为内力。这种内力随外力增加而增大,当达到某一限度时物体就会发生破坏,所以它与构件的承载能力密切相关。

截面法是求解内力的基本方法,用截面法求内力,可以归纳为三个字——截、代、平。

截:欲求某一截面的内力,则沿该截面将构件假想地截开为两部分,并取其中任一部分为研究对象,弃去另一部分。

代:用作用于截面上的内力代替弃去部分对留下部分的作用。

平:在选取的研究对象上,列出力的平衡方程,确定未知的内力。

截面法求内力的具体求解方法将在后面章节中有详细的介绍。

1.3.2 应力

所谓应力指内力在截面上的密集程度,即内力集度。实际上上述内力是某截面上无穷个点上内力的合力,内力在截面上是连续分布的,但不一定是均匀分布的,因而有必要分析内力在截面上的分布情况,即分析截面上的应力。

在截面上围绕一点 M 取一个微小面积 ΔA (图 1.2),其上的内力为 ΔP ,则称 ΔP 与 ΔA 的比值为面积 ΔA 上的平均应力,即

$$p_m = \frac{\Delta P}{\Delta A} \quad (1.1)$$

当 ΔA 趋于零则得到点 M 的应力,即

$$p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta A} = \frac{dP}{dA} \quad (1.2)$$

式中 p ——截面上点 M 的全应力。

应力的量纲为 $L^{-1}MT^{-2}$,在国际单位制中,应力的单位是帕斯卡 (Pa), $1Pa=1N/m^2$,通常还有兆帕 (MPa), $1MPa=10^6Pa$;吉帕 (GPa), $1GPa=10^9Pa$ 。

由于力是矢量,因此截面上应力也是矢量。若将力 ΔP 分解为垂直于截面的分力 ΔN (法向分力) 和平行于截面的分力 ΔT (切向分力),则可得

$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta A}, \quad \tau = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta T}{\Delta A} \quad (1.3)$$

式中 σ ——点 M 的正应力;

τ ——点 M 的切应力,又称剪应力。

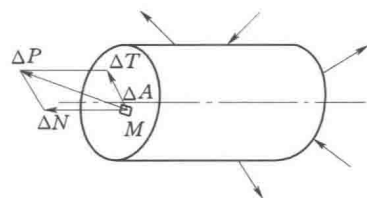


图 1.2

因通过一点 M ，可做出无穷多个截面，故描述给定点处的应力时，不仅要说明其大小，而且还要说明其所在的截面方位。

1.4 变形与应变

载荷作用在变形体上将引起各质点相互位置的变化，在假设变形体受到约束而不产生刚性位移时，这种质点之间的相互位移将使物体产生变形，包括尺寸的改变和形状的改变。

如图 1.3 所示，变形体在载荷作用下发生变形，线段 AB 变形后的位置为 $A'B'$ 。线

段 AB 原始长度为 Δx ，变形后长度为 $\Delta x + \Delta s$ ，则定义

$$\epsilon_m = \frac{\Delta s}{\Delta x} \quad (1.4)$$

为线段 AB 的平均正应变。当 Δs 逐渐缩小，趋近于零时， ϵ_m 的极限为

$$\epsilon = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta x} \quad (1.5)$$

ϵ 称为正应变（或线应变），简称为应变。正应变的量纲为一，其物理意义是构件上一点沿某一方向相对变形量的大小。

构件变形时通常不光有线段长度的改变，两正交线段的夹角也往往发生变化。如图 1.4 所示，变形前两垂直的线段 dx 和 dy ，变形后的位置如图 1.4 中虚线所示，则定义其夹角的改变量 γ 为切应变（或角应变），即

$$\gamma = \alpha + \beta \quad (1.6)$$

在小变形的前提下，切应变就是直角的两棱边夹角的改变量。切应变的量纲为一。

正应变 ϵ 和切应变 γ 是度量一点处变形程度的两个基本量。应力和应变都是“微观量”，与应力对应的“宏观量”是力，与应变对应的“宏观量”是变形。

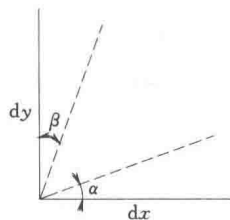


图 1.4

1.5 杆件变形的基本形式

杆件受力的情况各种各样，相应的变形也形式各异。然而变形的形式有以下四种。

(1) 轴向拉伸或轴向压缩。在一对作用线与直杆轴线重合的外力作用下，直杆的主要变形是长度的改变，这种变形形式称为轴向拉伸 [图 1.5 (a)] 或轴向压缩 [图 1.5 (b)]。简单桁架结构在载荷作用下，桁架中的杆件就发生轴向拉伸或轴向压缩，起吊重物的钢索、内燃机中的活塞杆等，也都属于这种变形。

(2) 剪切。在一对相距很近的大小相同、指向相反的横向外力作用下，直杆的主要变形是横截面沿外力作用方向发生的相对错动 [图 1.5 (c)]，这种变形称为剪切。机械中的连接件，如键、铆钉、螺栓等都产生剪切变形。

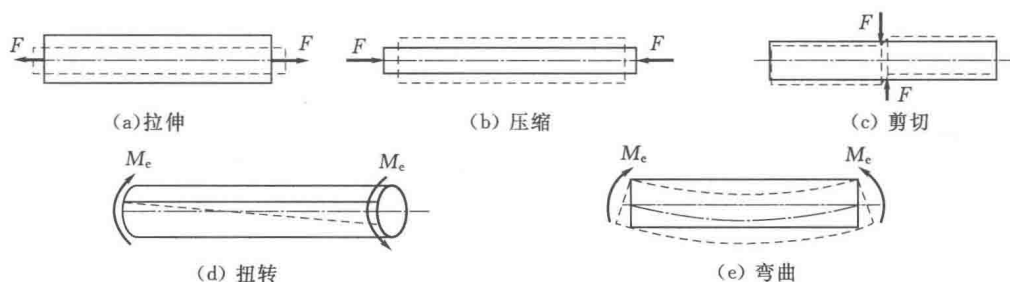


图 1.5

(3) 扭转。在一对转向相反、作用面垂直于直杆轴线的外力偶的作用下，直杆的相邻横截面将绕轴线发生相对转动，杆件表面纵向线将变成螺旋线，而轴线仍保持为直线 [如图 1.5 (d)]，这种变形称为扭转。机械中传动轴的主要变形就包括扭转。

(4) 弯曲。在一对转向相反、作用面在杆件的纵向平面（包含杆轴线在内的平面）内的外力偶作用下，直杆的相邻横截面将绕垂直于杆轴线的直线（中性轴）发生相对转动，变形后的杆件轴线将弯曲成曲线。这种变形形式称为纯弯曲 [图 1.5 (e)]。梁在横向力作用下也产生弯曲变形，但同时还发生剪切变形，称为横力弯曲。传动轴的变形往往是扭转和弯曲变形的组合。

工程中常用构件大多数为上述几种基本变形的组合，纯属一种基本变形形式的构件较为少见。但若以某种基本变形为主要变形形式，其他的变形属于次要变形，则可按该基本变形来计算。若其他几种变形均不能忽略，则属于组合变形问题。

第 2 章 轴向拉伸、压缩和剪切

2.1 概 述

在工程中经常见到承受拉伸或压缩的杆件，例如：紧固螺钉 [图 2.1 (a)]，当拧紧螺帽时，被压紧的工件对螺钉有反作用力，螺钉承受拉力，螺杆将在拉力作用下变长；千斤顶的螺杆 [图 2.1 (b)] 在顶起重物时承受压力，螺杆将被压缩而缩短。这种以轴向拉伸压缩为主要变形形式的杆称为拉压杆。

轴向拉伸或压缩变形的特点如下：

- (1) 外力。外力是大小相等、方向相反的一对力，外力作用线与杆件轴线是重合的。
- (2) 变形。产生沿轴线方向的伸长或缩短。
- (3) 力学模型。若把承受轴向拉伸或压缩的杆件的形状和受力情况进行简化，则可以简化为如图 2.2 所示。图 2.2 中用实线表示受力前的外形，虚线表示变形后的形状。

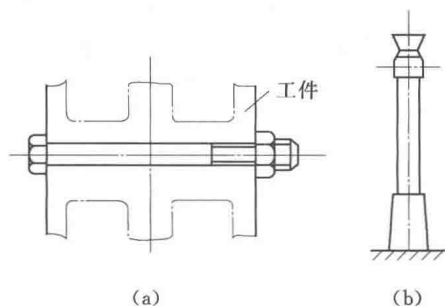


图 2.1

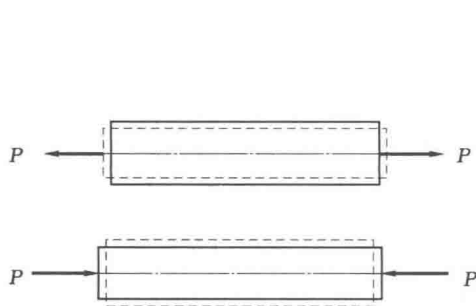


图 2.2

本章研究拉（压）杆的强度和刚度问题以及连接件的强度实用计算，并介绍材料的基本力学性质和材料力学的一些基本概念和分析方法。

2.2 轴向拉伸或压缩时内力和应力

2.2.1 轴力与轴力图

为了对拉（压）杆进行强度和变形计算，首先需要分析其内力。内力的计算方法采用截面法，计算过程以图 2.3 为例。

1) “截取”：为显示出拉杆横截面上的内力，假想将杆沿 $m-m$ 截面处切开，分为 I、II 两部分。

2) “代替”：假定保留 I 部分，则 II 部分对保留下来的 I 部分的作用用内力来代替，

设其合力为 N ，作用在截面的形心上，如图 2.3

(b) 所示。

3) “平衡”：由于直杆原来处于平衡状态，切开后各部分仍应维持平衡。根据保留部分的平衡关系由图 2.3 (b) 可得

$$N = P$$

当然也可保留 II 部分 [图 2.3 (c)]，这时用 N' 代表 I 部分对 II 部分的作用力，同样可得

$$N' = P$$

因为外力 P 的作用线与杆件的轴线重合，内力的合力 N 的作用线也必然与杆件的轴线重合，所以

N 称为轴力，并且规定当杆件受拉伸，即轴力 N (或 N') 方向背离截面时为正号，反之杆件受压缩，即 N 指向截面时为负号。

当沿杆件轴线作用的外力多于两个时，在杆件各部分的截面上轴力不尽相同。为了表示轴力随截面位置的变化，往往画出轴力沿杆件轴向方向变化的图形，即轴力图。

【例 2.1】试画出如图 2.4 (a) 所示直杆的轴力图。

分析：此杆在 A、B、C、D 点承受轴向外力，外力作用的截面称为控制截面，控制截面将杆分成几段，各段的内力不相同，要分别取各段为研究对象。

解：首先研究 AB 段，采用截面法计算内力，在 AB 段内任意取 1—1 截面，假想地

将直杆分成两段，保留左段，并画出左段的受力图 [图 2.4 (b)]，用 N_1 表示右段对左段的作用。设 N_1 为拉力 (一般情形下均假设内力为正)，由此段的平衡方程 $\sum F_x = 0$ ，得

$$N_1 - 2P = 0$$

所以 $N_1 = 2P$ (拉力)

N_1 得正号，说明原先假设拉力是正确的。

求 BC 段的内力，同理在段内任取截面 2—2，由截面左边一段 [图 2.4 (c)] 的平衡方程 $\sum F_x = 0$ 得

$$N_2 + 3P - 2P = 0$$

所以 $N_2 = -P$ (压力)

N_2 得负号，说明原先假设为拉力是不正确的，应为压力。

类似地，取 CD 段内截面 3—3 [图 2.4 (d)]，得

$$N_3 + P + 3P - 2P = 0$$

即 $N_3 = -2P$ (压力)

如果研究截面 3—3 右边一段，如图 2.4 (e)

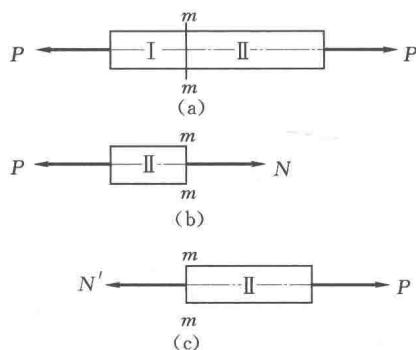


图 2.3

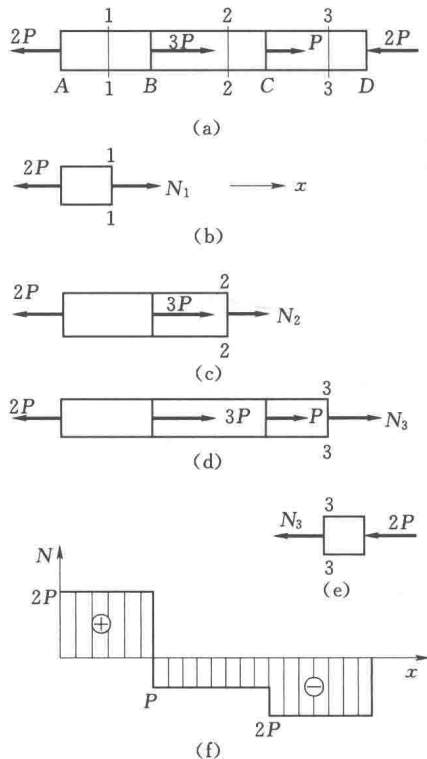


图 2.4

所示, 由平衡方程 $\sum F_x = 0$ 得

$$N_3 + 2P = 0$$

即

$$N_3 = -2P (\text{压力})$$

所得结果与前面相同。

然后以 x 轴表示截面的位置, 以垂直 x 轴的坐标表示对应截面的轴力, 即可按选定的比例尺画出轴力图 [图 2.4 (f)]。在轴力图中, 将拉力画在 x 轴的上侧, 压力画在 x 轴的下侧。这样, 轴力图不但可以非常直观地显示出杆件各段的轴力的大小, 而且还可以表示出各段内的变形是拉伸还是压缩。

2.2.2 横截面上的应力

应用截面法可以求得任意横截面上的内力, 但内力在横截面上的分布情况还未知。如果内力是非均匀分布, 则各点的内力集度 (应力) 是不一样的, 而构件的破坏往往是从危险应力 (最大应力) 点开始的, 因此, 知道内力数值而应力数值未知也不能确定构件的危险点。下面需要进一步分析横截面上的应力情况。

横截面上的应力是内力的分布集度, 应力在面积上的合力等于轴力, 两者之间的关系为

$$N = \int_A \sigma dA \quad (2.1)$$

式 (2.1) 其实是静力平衡方程, 由于内力在横截面上的分布情况未知, 无法从式 (2.1) 推导出应力的计算公式, 即该问题属于静不定问题, 必须寻求其他的办法。下面采用的方法是材料力学研究问题最基本的方法, 即解决静不定问题所需要的条件是: 必须确定静力方程 (平衡方程)、几何方程 (变形协调方程) 和物理方程 (本构方程), 综合利用这三种关系来求解问题。内力和应力往往是看不见的或不易测量的, 而变形是可见的或容易测量的, 因而经常通过观察 (或测量) 变形体的变形, 推理分析得到变形规律, 然后利用物体变形和力之间的关系, 来得出应力的分布规律, 从而推导出应力的计算公式。这种方法在后面的章节中多次采用。

首先通过试验观察直杆受力后的变形现象, 现取一个等直杆, 拉压变形前在其表面上

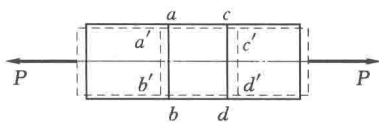


图 2.5

画垂直于杆轴的直线 ab 和 cd (图 2.5)。拉伸变形后, 发现 ab 和 cd 仍为直线, 且仍垂直于轴线, 只是分别平行地移动至 $a'b'$ 和 $c'd'$ 。于是, 我们可以作出如下假设: 直杆在轴向拉压时横截面仍保持为平面。根据这个“平面假设”可知, 杆件在它的任意两个横截面之

间的伸长变形是均匀的, 这样就得到了拉压杆变形的协调关系, 即各点的应变是相等的。又因材料是均匀连续的, 所以可以从变形的均匀性推出内力的分布也是均匀的, 即在横截面上各点处的正应力都相等, 这就是材料的物理关系。再考虑式 (2.1) 的平衡方程, 若杆的轴力为 N , 横截面面积为 A , 于是得

$$\sigma = \frac{N}{A} \quad (2.2)$$

正应力符号规定: 拉应力为正, 压应力为负。

【例 2.2】 图 2.6 (a) 为一变截面拉压杆件, 其受力情况如图 2.6 (a) 所示, 试计算各段的应力并确定最大应力所在的位置。

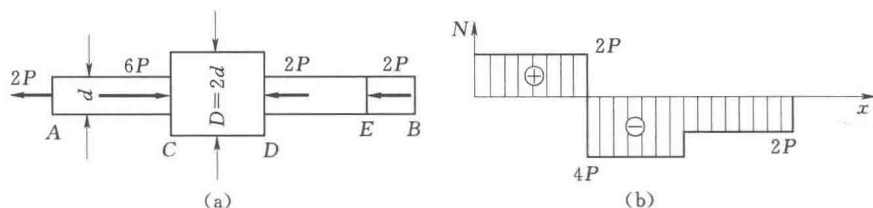


图 2.6

分析：该变截面杆受多个力的作用，力作用截面即为控制截面，将杆分成 AC、CD、DE、EB 四段，各段的内力和应力要分别计算。

解：运用截面法求各段内力，作轴力图 [图 2.6 (b)]。

AC 段： $N_1 = 2P$

CD 段： $N_2 = -4P$

DE 段： $N_3 = -2P$

EB 段： $N_4 = 0$

根据内力计算应力，则得

$$\text{AC 段: } \sigma_1 = \frac{N_1}{\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{8P}{\pi d^2}$$

$$\text{CD 段: } \sigma_2 = \frac{N_2}{\frac{\pi D^2}{4}} = \frac{-4P}{\pi d^2}$$

$$\text{DE 段: } \sigma_3 = \frac{N_3}{\frac{\pi d^2}{4}} = -\frac{8P}{\pi d^2}$$

$$\text{EB 段: } \sigma_4 = 0$$

$$\sigma_{\max} = \sigma_1 = |\sigma_3|$$

由计算可知，AC 段和 DE 段为最大应力所在截面。

2.2.3 斜截面上的应力

上面已经推导出了拉压杆横截面上的应力计算公式，下面将进一步讨论斜截面上的应力。

如图 2.7 (a) 所示为一个轴向拉伸的直杆，与杆轴线呈任意角度 α 的 $m-m$ 斜截面（称为 α 截面），在拉力 F 的作用下将产生移动，其变形后仍保持为直线，且与原直线位置平行，由此可以推断出斜截面上的应力应该是均匀分布的。采用截面法，假想用 $m-m$ 截面将杆截取为两部分，取左半部分为研究对象，其受力图如图 2.7 (b) 所示，由于轴力 N 在斜截面上均匀分布，故 α 截面上的应力为

$$p_\alpha = \frac{N}{A_\alpha} \quad (2.3)$$

式中 p_α —— α 截面上的全应力，方向与杆的轴线平行；

A_α —— α 截面的面积。

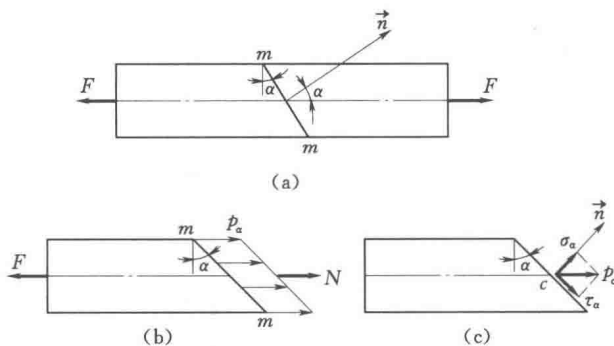


图 2.7