# 概率论与数理统计

金大永　周永芳　苏国忠　主编

科学出版社

# 概率论与数理统计

主　编　金大永　周永芳　苏国忠
副主编　李艳玲　白　云　袁莉萍

科 学 出 版 社
北　京

## 内 容 简 介

本书是针对高等学校理工科及经济管理类各专业“概率论与数理统计”课程编写的教材. 主要内容包括：概率论的基本概念、随机变量及其概率分布、二维随机向量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律和中心极限定理、数理统计的基本概念、参数估计、假设检验. 每节穿插练习题，每章附有习题，书末附有练习题和习题答案，常用概率分布表.

本书结合教学实际，选材适当，便于教师教学和学生自学，可作为高等学校工科、理科（非数学专业）及经济管理类各专业的教材和研究生入学考试的参考书，也可供工程技术人员、科技工作者参考.

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计／金大永，周永芳，苏国忠主编. —北京：科学出版社，2017.8

ISBN 978-7-03-053750-8

Ⅰ. ①概… Ⅱ. ①金… ②周… ③苏… Ⅲ. ①概率论-高等学校-教材 ②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ. ①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 138757 号

责任编辑：任俊红 李淑丽 ／责任校对：郭瑞芝

责任印制：徐晓晨 ／封面设计：华路天然工作室

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

北京市密东印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2017 年 8 月第 一 版 开本：787 × 1092 1/16

2018 年 7 月第二次印刷 印张：18 1/4

字数：430 000

**定价：45.00 元**

（如有印装质量问题，我社负责调换）

# 前　言

概率论与数理统计是高等学校理工科各专业的一门重要的数学基础课，为后继课程和未来工作实践提供必要的随机数学基础，在培养学生运用概率统计独特的思维方式分析和解决问题的能力方面具有重要的作用。随着教学改革的深入，数学教学向着加强基础、拓宽应用的方向推进，该课程已经被列为高等学校理工科及管理类绝大多数专业的必修课，是工学、经济学硕士研究生入学考试的必考科目。编写本书，是希望更好的适应教学改革的发展，为概率论与数理统计课程提供合适的教学用书。

本书分概率论和数理统计两部分。前五章为概率论部分，后三章是数理统计部分，概率论是数理统计的基础。本书内容包括该课程教学基本要求规定的全部内容，并可满足硕士研究生入学考试“数学一”考试的基本要求。书中每节内容中包括若干练习题，可以作为基础训练之用；每章均附有若干习题，用于提高巩固；书末附有练习题和习题答案，以备参考。在附录部分简要介绍 MATLAB 在概率论与数理统计中的应用。

本书结合工科数学教学实际，在选材上注意理论与实际的统一，结合概率论与数理统计的基本理论，适当介绍了在社会人文科学、医学、经济管理、化工等领域中的一些应用实例，可以拓宽学生视野、激发学生兴趣。在叙述上力求论述严谨，条理清楚，便于阅读。作为教材使用，概率论需约 32 学时，数理统计需约 16 学时。

本书第一、二章由周永芳编写，第三章由金大永编写，第四章由袁莉萍编写，第五章由李艳玲编写，第六章由白云编写，第七、八章由苏国忠编写。

在此，感谢参考文献中所列举著作的诸位作者，本书从中吸取了很多优秀的思想，丰富了本书的内容。本书的出版倾注了科学出版社各位编辑的大量心血，作者对此致以深深的谢意。

由于水平所限，书中难免有错、漏及欠妥之处，作者热忱地希望使用本书的教师和同学指正，以便再版时修订。

编　者

2017 年 3 月

# 目　录

# 第一章 概率论的基本概念

自然界和社会上发生的现象是多种多样的，从发生的必然性上区分，可以分为两类现象，即确定性现象和不确定性现象．

(1) 确定性现象：当一定条件实现时，该结果一定出现，而当一定条件不满足时，该结果一定不出现的现象．例如，向上抛的石子必然下落；在一个标准大气压下，纯水加热到 100℃沸腾；两个同性电荷相斥，异性电荷相吸；三角形两边之和大于第三边等．

(2) 不确定性现象：当一定条件实现时，该结果可能出现，也可能不出现，而事先不能确切预测结果的现象．例如，抛一枚质地均匀的硬币，硬币落地时的结果可能是正面朝上，也可能是反面朝上；射击时的命中环数；抛一颗骰子，最后出现的点数；一条高速公路上一天出现的交通事故次数等．

对于不确定性现象，虽然在个别试验中其结果呈现出不确定性，但通过大量重复试验，试验的结果呈现出一定的规律性．例如，在抛一枚硬币时，我们无法预知落地时是正面朝上还是反面朝上，但大量重复抛硬币这一试验，就会发现正面朝上的次数大致占二分之一；又如射击时，如果射击次数不多，靶上弹着点似乎是随意分布的，没有什么规律，但在多次射击时，弹着点的分布就开始呈现规律性：它大致关于某个中心对称，靠近中心的弹着点密，远离中心的弹着点稀，且弹着点落入靶上任意一个区域的概率是基本稳定的，射击的次数越多，这种规律性就越明显．这种在大量重复试验中不确定性现象所呈现出的规律性称为**统计规律性**，而在大量重复试验中呈现出统计规律性的现象称为**随机现象**．

概率论(Probability Theory)与数理统计(Mathematical Statistics)是研究随机现象统计规律性的一门数学学科．

## §1.1 随 机 事 件

### 1.1.1 随机试验和样本空间

为了研究随机现象的内在规律性，必须反复对随机现象进行观察、测量，每一次观察、测量称为一次试验，满足以下三个特点的试验称为**随机试验**(random trial)．

(1) 试验可以在相同的条件下重复进行；

(2) 在试验之前能明确知道所有的可能结果；

(3) 每次试验必出现全部可能结果中的一个且仅出现一个，但某一次试验究竟出现

哪一个结果在试验之前不能预知.

随机试验记作 $E$，本书以后所提到的试验均指随机试验.

试验 $E$ 的每一个可能出现的结果称为一个**样本点**(sample point)，记作 $\omega$. 试验 $E$ 的所有可能结果的集合,即全体样本点组成的集合称为 $E$ 的**样本空间**(sample space)，记作 $\Omega$.

**【例 1.1.1】** 设 $E_1$：抛一枚硬币一次，观察正、反面出现的情况. $E_1$ 的样本点有两个，即“出现正面”和“出现反面”，令 $\omega$ 表示“出现正面”，$\bar{\omega}$ 表示“出现反面”，则 $E_1$ 的样本空间为

$$\Omega = \{\omega, \bar{\omega}\}.$$

**【例 1.1.2】** 设 $E_2$：抛一枚硬币 2 次，观察正、反面出现的情况. $E_2$ 的样本点有四个，设 $\omega$ 表示出现正面，$\bar{\omega}$ 表示出现反面，则 $E_2$ 的样本空间为

$$\Omega = \left\{\omega\omega, \omega\bar{\omega}, \bar{\omega}\omega, \bar{\omega}\bar{\omega}\right\}.$$

其中，$\omega\bar{\omega}$ 表示“第一次是正面而第二次是反面”，另外三个样本点依此类推.

**【例 1.1.3】** 设 $E_3$：抛一颗骰子，观察其点数. $E_2$ 的样本点有六个，即点数分别是 $1,2,3,4,5,6$，则 $E_3$ 的样本空间为

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}.$$

**【例 1.1.4】** 设 $E_4$：观察在 $[0,t]$ 时间内进入某商店顾客的人数，样本点是非负整数，则 $E_4$ 的样本空间为

$$\Omega = \{0,1,2,\cdots\}.$$

**【例 1.1.5】** 设 $E_5$：观测某个灯泡的使用寿命，以 $t$ (小时)记其寿命. 样本点是非负实数，则 $E_5$ 的样本空间为

$$\Omega = \left\{t \middle| 0 \leqslant t < +\infty\right\}.$$

**【例 1.1.6】** 设 $E_6$：记录某个地区一昼夜的最低气温 $x$ 和最高气温 $y$. 若这一地区的气温不会小于 $T_0$，也不会大于 $T_1$，则 $E_6$ 的样本空间为

$$\Omega = \left\{(x,y) \middle| T_0 \leqslant x < y \leqslant T_1\right\}.$$

样本空间 $\Omega$ 中样本点的数目可以是有限个，如 $E_1, E_2, E_3$，也可以是无限多个，如 $E_4, E_5, E_6$. 而 $E_4$ 中的样本点的个数和自然数可以建立一一对应的关系，称它的样本点个数是可列无限多个. $E_5, E_6$ 中的样本点的个数不能与自然数建立一一对应的关系，或者说其数目比可列个还“多”，称它的样本点个数是不可数无限个.

**练习 1.1** 在例 1.1.5 中，设我们关心的是灯泡是否为合格品，并规定灯泡的寿命在 1000 小时以上为合格品(记为“1”)，否则为不合格品(记为“0”)，写出这个试验的样本空间，并与 $E_5$ 的样本空间比较看是否相同?

**练习 1.2** 从包含有两件正品 $a_1, a_2$ 和一件次品 $b$ 的 3 件产品中，依次取出两件，写出这个试验的样本空间. 若将题目中的“依次”改为“同时”，是否为同一试验?写出后一试验的样本空间.

**练习 1.3** 将 $a,b$ 两个球随机地放入到 3 个盒子中，试写出这一试验的样本空间.

### 1.1.2　随机事件

在实际中，对于随机试验，我们经常关心满足某种条件的那些样本点构成的样本空间的子集合．例如，在 $E_5$ 中，若灯泡的生产厂家规定灯泡的寿命在 1000 小时以上为合格品，则对每个灯泡，我们会关心它的寿命是否在 1000 小时以上，满足这一条件的样本点的集合是

$$A=\left\{t\middle|1000<t<+\infty\right\},$$

$A$ 是样本空间 $\Omega=\left\{t\middle|0\leqslant t<+\infty\right\}$ 的一个子集合，称为试验 $E_5$ 的一个随机事件．

一般地，我们称试验 $E$ 的样本空间 $\Omega$ 的子集为 $E$ 的**随机事件**(random event)，简称事件，用英文大写字母 $A,B\cdots$ 表示．

在一次试验中，若试验结果 $\omega\in A$，则称在此次试验中事件 $A$ 发生；否则，若试验结果 $\omega\notin A$，则称在此次试验中事件 $A$ 没有发生．

有三个特殊的事件：

(1) **基本事件**: 仅含有一个样本点的事件；

(2) **不可能事件 $\phi$**：$\phi$ 可看作样本空间的子集，故 $\phi$ 是随机事件．任意一次试验结果 $\omega\notin\phi$，故在每次试验中，事件 $\phi$ 都不发生；

(3) **必然事件 $\Omega$**：$\Omega$ 也可看作样本空间的子集，故 $\Omega$ 是随机事件．任意一次试验结果 $\omega\in\Omega$，故在每次试验中，事件 $\Omega$ 都发生．

必然事件和不可能事件是随机事件的两个极端情形，代表了随机现象和确定性现象之间的过渡．

**【例 1.1.1 续】**　在 $E_1$ 中，设事件 $A$ 为"正面朝上"，事件 $B$ 为"反面朝上"，则

$$A=\{\omega\},\quad B=\{\bar{\omega}\},$$

而且事件 $A$ 和 $B$ 均是 $E_1$ 的基本事件．

**【例 1.1.2 续】**　在 $E_2$ 中，设事件 $A$ 为"至少有一次正面朝上"，事件 $B$ 为"第二次反面朝上"，事件 $C$ 为"有三次正面朝上"，则

$$A=\left\{\omega\omega,\omega\bar{\omega},\bar{\omega}\omega,\right\},\quad B=\left\{\omega\bar{\omega},\bar{\omega}\bar{\omega}\right\},\quad C=\phi,$$

其中，$C$ 是 $E_2$ 的不可能事件．

**【例 1.1.3 续】**　在 $E_3$ 中，设事件 $A$ 为"点数是奇数"，事件 $B$ 为"点数是偶数"，事件 $C$ 为"点数是 3 的倍数"，事件 $D$ 为"点数不超过 6"，则

$$A=\{1,3,5\},B=\{2,4,6\},\quad C=\{3,6\},\quad D=\Omega,$$

其中，$D$ 是 $E_3$ 的必然事件．

**【例 1.1.4 续】**　在 $E_4$ 中，设事件 $A$ 为"进入商店的人数不超过 4 人"，事件 $B$ 为"无人进入商店"，则

$$A=\{0,1,2,3,4\},\quad B=\{0\}.$$

**【例 1.1.5 续】**　在 $E_5$ 中，设事件 $A$ 为"灯泡的使用寿命不少于 1000 小时"，则

$$A=\left\{t\middle|1000\leqslant t<+\infty\right\}.$$

**【例 1.1.6 续】** 在 $E_6$ 中，设事件 $A$ 为“最低气温不低于 5℃”，事件 $B$ 为“气温差不超过 15℃”，则

$$A=\{(x,y)|T_0\leqslant 5℃\leqslant x<y\leqslant T_1\},$$

$$B=\{(x,y)|y-x\leqslant 15℃,\ T_0\leqslant x<y\leqslant T_1\}.$$

### 1.1.3 事件的关系与运算

样本点、样本空间与随机事件的关系等同于集合论中元素、集合与子集合的关系，可以用集合论中子集的关系和运算来定义随机事件的关系和运算.

在下面的叙述中，$\Omega$ 是随机试验 $E$ 的样本空间，$\omega$ 表示其样本点，而 $A$，$B$，$A_k$，$B_k$ ($k=1,2,\cdots$)均表示 $E$ 的事件. 用文氏(Venn)图来介绍时，图中的矩形区域表示样本空间 $\Omega$，$\omega$ 即为该矩形区域中的一点，图中的两个圆分别表示事件 $A$ 和 $B$.

#### 1.1.3.1 事件的关系

(1) 事件的包含关系

若 $A\subset B$，则称事件 $B$ **包含**事件 $A$，其含义是：在一次试验中，若事件 $A$ 发生，则事件 $B$ 一定发生，因为 $A$ 发生，则试验中出现的样本点 $\omega\in A$，而 $A\subset B$，故 $\omega\in B$，从而 $B$ 必定发生(图 1.1).

事件的包含关系具有传递性：若 $A\subset B$ 且 $B\subset C$，则 $A\subset C$.

为方便起见，规定 $\phi\subset A\subset\Omega$.

(2) 事件的相等

若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称事件 $A$ 与事件 $B$ **相等**，记作 $A=B$，它表示事件 $A$ 与事件 $B$ 是同一事件.

(3) 事件的互不相容(事件的互斥)

若在一次试验中，事件 $A$ 与事件 $B$ 不能同时发生，则称事件 $A$ 与事件 $B$ **互不相容**(或**互斥**)(图 1.2).

显然，对一随机试验而言，基本事件是两两互不相容的.

(4) 事件的对立

“事件 $A$ 不发生”称为事件 $A$ 的**对立事件**，记作 $\overline{A}$(图 1.3).

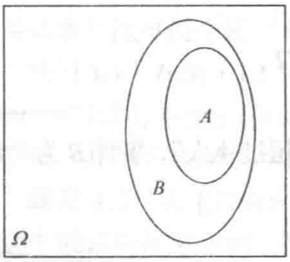

图 1.1

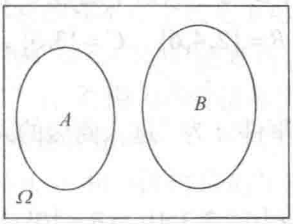

图 1.2

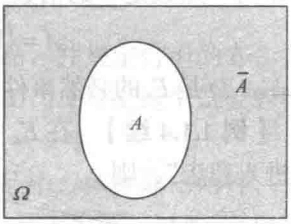

图 1.3

显然，$A$ 也是 $\overline{A}$ 的对立事件，有 $\overline{\overline{A}}=A$，即 $A$ 与 $\overline{A}$ 互为对立事件. 在每次试验中，两个相互对立的事件 $A$ 和 $\overline{A}$ 必有一个发生，但不可能同时发生. 对立事件是互斥事件的特例，对立事件一定是互斥事件，但互斥事件不一定是对立事件.

1.1.3.2 事件的运算

(1) 两个事件的交

"事件 $A$ 与事件 $B$ 同时发生"作为一个事件，称为事件 $A$ 与事件 $B$ 的**交**，记为 $A\cap B$ (或 $AB$ )(图 1.4).

显然，事件 $A$ 与事件 $B$ 互不相容(或互斥)，即 $AB=\phi$ .

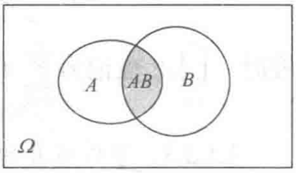

图 1.4

(2) 事件的并

"事件 $A$ 或事件 $B$ 发生" (即"事件 $A$ 和事件 $B$ 中至少有一个发生")作为一个事件，称为事件 $A$ 与事件 $B$ 的**并**，记为 $A\cup B$ (图 1.5).

特别当事件 $A$ 与事件 $B$ 互不相容，即 $AB=\phi$ 时，$A\cup B$ 也记为 $A+B$ ，称为 $A$ 与 $B$ 的**和**.

显然，$A+\overline{A}=\Omega$.

(3) 事件的差

"事件 $A$ 发生而事件 $B$ 不发生"作为一个事件称为事件 $A$ 与 $B$ 的**差**，记为 $A-B$ (图 1.6).

显然有

$$\overline{A}=\Omega-A, \tag{1.1}$$

$$A-B=A-AB=A\overline{B}=(A\cup B)-B. \tag{1.2}$$

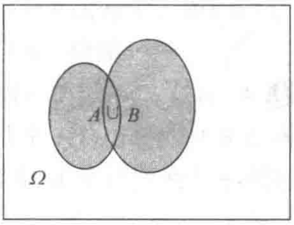

图 1.5

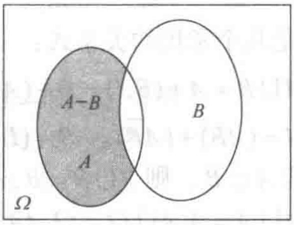

图 1.6

(4) 事件的交与并的推广

事件的交推广到有限个或可列无限个事件的情形，有

$$\bigcap_{k=1}^{n}A_k=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n ,$$

$$\bigcap_{k=1}^{\infty}A_k=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_k\cap\cdots .$$

且 $\bigcap\limits_{k=1}^{n}A_k$ 表示"$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生"这一事件，$\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}A_k$ 表示"$A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 同时发生"

这一事件.

类似地，事件的并也可推广到有限个或可列无限个事件的情形，有

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n,\quad \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k \cup \cdots.$$

且 $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ 表示 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中至少有一个发生” 这一事件，$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ 表示“$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 中至少有一个发生” 这一事件.

当 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互不相容时，$\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ 也记为 $\sum_{k=1}^{n} A_k$；当 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 两两互不相容时，$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ 也记为 $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$.

1.1.3.3 事件运算的法则

事件的运算满足以下运算律：

(1) 交换律：$A \cap B = B \cap A$，$A \cup B = B \cup A$； (1.3)

(2) 结合律：$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$，$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$； (1.4)

(3) 分配律：$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$，$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$； (1.5)

(4) 对偶律(德 · 摩根律)：$\overline{A \cup B} = \overline{A}\,\overline{B}$，$\overline{AB} = \overline{A} \cup \overline{B}$； (1.6)

对偶律可推广到有限个或可列无限个事件的情形，即

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i},\quad \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{A_i};\quad \overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i},\quad \overline{\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}.$$

下面是几个常用的关系式：

(1) $A \cup B = A + (B\overline{A}) = B + (A\overline{B}) = (A\overline{B}) + (\overline{A}B) + (AB)$；

(2) $A = (AB) + (A\overline{B})$，$B = (BA) + (B\overline{A})$；

(3) 若 $A \subset B$，则 $A \cup B = B, AB = A$；

(4) $A \cup A = A, A \cup \Omega = \Omega, AA = A, A\Omega = A, \phi A = \varnothing$.

**【例 1.1.7】** 在例 1.1.3 续中有 $\overline{A} = B, \overline{B} = A$，即 $A$ 与 $B$ 互为对立事件；$AB = \phi$，$A \cup B = \Omega$，故 $A + B = \phi$；$AC = \{3\}$，$A \cup C = \{1,3,5,6\}$，$BC = \{6\}$，$B \cup C = \{2,4,3,6\}$.

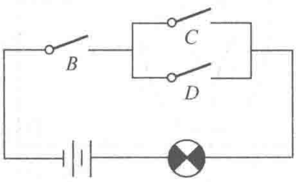

图 1.7

**【例 1.1.8】** 在如图 1.7 所示的电路中，以 $A$ 表示“信号灯亮”这一事件，以 $B,C,D$ 分别表示事件：“继电器 $B,C,D$ 闭合”，则易知 $BC \subset A, BD \subset A$，且 $A = (BC) \cup (BD)$，$\overline{A}B = \phi$.

**【例 1.1.9】** 设 $A,B,C$ 是三个随机事件，用 $A,B,C$ 表示下列各事件：

(1) $A,B,C$ 都发生；

(2) $A$ 发生而 $B,C$ 都不发生；

(3) $A,B,C$ 中恰有一个发生；

(4) $A,B,C$ 中至少有一个发生；

(5) $A,B,C$ 中不多于一个发生；

(6) $A,B,C$ 中不多于两个发生；

(7) $A,B,C$ 都不发生.

**解**　(1) $ABC$；

(2) $A\overline{B}\,\overline{C}$ 或 $A-B-C$ 或 $A-(B\cup C)$；

(3) $A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C$；

(4) $A\cup B\cup C$ 或 $A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C+AB\overline{C}+\overline{A}BC+A\overline{B}C+ABC$；

(5) $A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C+\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$；

(6) $\overline{ABC}$ 或 $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}+A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C+AB\overline{C}+\overline{A}BC+A\overline{B}C$；

(7) $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$ 或 $\overline{A\cup B\cup C}$.

**【例 1.1.10】**　化简 $(A\cup B)\,(A\cup\overline{B})$.

**解**　
$$\begin{aligned}(A\cup B)\,(A\cup\overline{B})&=[(A\cup B)A]\cup[(A\cup B)\overline{B}]\\&=[A\cup(BA)]\cup[(A\overline{B})\cup(B\overline{B})]\\&=A\cup[(BA)\cup(A\overline{B})]\cup B\overline{B}=A\cup A\cup\phi=A.\end{aligned}$$

**练习 1.4**　掷两颗骰子，记录它们的点数. 设 $A$：两颗骰子的点数相等；$B$：两颗骰子的点数和不大于 6. 写出样本空间及 $A$ 与 $B$ 分别包含的样本点.

**练习 1.5**　一射手向同一目标射击 3 次，设 $A_i$ 表示第 $i$ 次命中，$i=1,2,3$，$B_k$ 表示在 3 次射击中有 $k$ 次命中，$k=0,1,2,3$. 试用 $A_i$ 表示 $B_k$.

**练习 1.6**　化简

(1) $(A-B)\cup A$；　(2) $(A-B)\cup B$；　(3) $(A-B)A$；　(4) $(A-B)B$.

**练习 1.7**　(1)当事件 $A,B,C$ 满足什么条件时有 $A\cup B\cup C=A$？

(2) 事件 $A,B,C$ 两两互不相容与 $ABC=\phi$ 是不是一回事?

## §1.2　概率的定义和性质

### 1.2.1　随机事件的频率

对于一个随机事件来说，它在一次试验中可能发生，也可能不发生. 我们常常需要知道一些事件发生的可能性究竟有多大. 例如，人们需要知道每一个英文字母的使用率，以便合理安排计算机键盘上字母所在的位置；又比如，我们需要知道河流在某一地段洪水达到某一高度这一事件发生可能性的大小，以便确定在这一地段建造水坝的高度等. 概

率是用来衡量随机事件发生可能性大小的数，它的直观背景是频率，为了给出概率的定义，我们首先给出频率的定义和性质.

**定义 1.1**　$A$ 是随机试验 $E$ 的随机事件，将 $E$ 重复 $n$ 次，在这 $n$ 次试验中 $A$ 发生的次数是 $N_n(A)$，则称 $\dfrac{N_n(A)}{n}$ 为在这 $n$ 次试验中 $A$ 发生的**频率**(frequency)，记作 $f_n(A)$，即

$$f_n(A)=\frac{N_n(A)}{n}.$$

事件的频率有如下的性质：

**定理 1.1**　对任何事件 $A$，有

(1) $0 \leqslant f_n(A) \leqslant 1$；　(1.7)

(2) $f_n(\Omega)=1$；　(1.8)

(3) $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 是 $k$ 个两两互不相容的事件，则

$$f_n\left(\sum_{i=1}^{k}A_i\right)=\sum_{i=1}^{k}f_n(A_i). \tag{1.9}$$

这三条性质分别称为频率的非负性，规范性和有限可加性.

对于不大的 $n$，随机事件 $A$ 发生的频率可能随 $n$ 的不同变化较大，而且即使是同样的 $n$，这批试验算出的频率和那批试验算出的频率也可能大不相同. 但对于大量重复试验，随机试验的结果具有明显的统计规律性.

**【例 1.2.1】**　自某批产品中抽取 $n$ 件产品，检验得正品数 $N_n(A)$ 及抽得正品的频率 $f_n(A)$ 的数据如表 1.1 所示.

**表 1.1**

| $n$ | 10 | 50 | 100 | 150 | 600 | 1200 | 1800 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $N_n(A)$ | 7 | 46 | 81 | 131 | 516 | 1026 | 1534 |
| $f_n(A)$ | 0.700 | 0.902 | 0.810 | 0.873 | 0.860 | 0.855 | 0.852 |

此例中，可以看到当 $n$ 较大时，$f_n(A)$ 在 0.85 附近摆动，随着 $n$ 增大，稳定于 0.85 .

**【例 1.2.2】**　表 1.2 是我国(不包括香港和澳门特别行政区及台湾省)1950～2000 年的人口统计资料.

**表 1.2**

| 年份 | | 1950 | 1960 | 1970 | 1980 | 1990 | 2000 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 总数/万人 | 全部 | 55 196 | 66 207 | 82 992 | 98 705 | 114 333 | 126 583 |
| | 男 | 28 669 | 34 283 | 42 686 | 50 785 | 58 904 | 65 355 |
| | 女 | 26 527 | 31 924 | 40 306 | 47 920 | 55 429 | 61 228 |
| 比重 | 男 | 0.519 4 | 0.517 8 | 0.514 3 | 0.514 5 | 0.515 2 | 0.516 3 |
| | 女 | 0.480 6 | 0.482 2 | 0.485 7 | 0.485 5 | 0.484 8 | 0.483 7 |

表中的数据是国家统计局公布的我国每年年底的人口数，有关资料是根据抽样调查的结果推算的．这些数据表明，我国历年男性人口的比重稳定在 51.5%附近，女性人口的比重稳定在 48.5%附近．世界上不同国家、不同时期的统计资料表明，人口的性别比例也表现出类似的稳定性．

大量的试验证实，当重复试验的次数 $n$ 逐渐增大时，频率呈现出稳定性，这种稳定性表明一个随机事件发生的可能性确实可由一个数值来表示，如果频率稳定于一个较大的数值，表明相应事件发生的可能性较大，如果频率稳定于一个较小的数值，表明相应事件发生的可能性较小．

当试验次数 $n$ 很大时，任意事件 $A$ 的频率 $f_n(A)$ 总是稳定于一个固定的数值 $p$ ，$p$ 称为事件 $A$ 的概率，表示事件 $A$ 发生可能性的大小．

### 1.2.2　概率的定义

在给出概率的概念之前，我们首先给出事件域的定义．

**定义 1.2**　$\Omega$ 是随机试验 $E$ 的样本空间，$\mathcal{F}$ 是 $\Omega$ 的某些子集构成的集合，若 $\mathcal{F}$ 满足以下三个条件：

(1) $\Omega\in\mathcal{F}$;

(2) 若 $A\in\mathcal{F}$ ，则 $\overline{A}\in\mathcal{F}$;

(3) 若 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots\in\mathcal{F}$，则 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i\in\mathcal{F}$，

则称 $\mathcal{F}$ 为随机试验 $E$ 的一个**事件域**．

**【例 1.2.3】**　若 $\mathcal{F}$ 是 $\Omega$ 的全体子集组成的集合，则 $\mathcal{F}$ 是一个事件域．

**定义 1.3**　$\mathcal{F}$ 是随机试验 $E$ 的一个事件域，定义在 $\mathcal{F}$ 上的实值函数 $P(A)$，$A\in\mathcal{F}$，若满足以下三个条件：

(1) (非负性公理)　$$0\leqslant P(A)\leqslant 1\,; \tag{1.10}$$

(2) (规范性公理)　$$P(\Omega)=1\,; \tag{1.11}$$

(3) (可列可加性公理)若 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 是一个两两互不相容的事件列，则

$$P(\sum_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i), \tag{1.12}$$

则称 $P(A)$ 为事件 $A$ 的一个**概率测度**(probability measure)，简称为事件 $A$ 的**概率**，三元组 $(\Omega$ ，$\mathcal{F}$，$P(A))$ 称为随机试验 $E$ 的一个**概率空间**(probability space)．

### 1.2.3　概率的性质

设 $(\Omega$ ，$\mathcal{F}$，$P(A))$ 为概率空间，则有以下性质：

**定理 1.2**　不可能事件的概率是 0，即

$$P(\phi)=0\,. \tag{1.13}$$

**证明**　$\phi,\phi,\phi,\cdots$ 是一个两两互不相容的事件列，有 $\phi=\phi+\phi+\cdots$，由可列可加性公

理得 $P(\phi)=P(\phi)+P(\phi)+\cdots$，又由 $P(\phi)\geqslant 0$，得 $P(\phi)=0$.

**定理 1.3** (有限可加性)　$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 $n$ 个两两互不相容的事件,则

$$P(\sum_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i). \tag{1.14}$$

**证明**　设 $A_{n+1}=A_{n+2}=\cdots=\phi$，则 $A_1,A_2,\cdots,A_n,A_{n+1},\cdots$ 是可列个两两互不相容的事件，且 $\sum_{i=1}^{n}A_i=\sum_{i=1}^{\infty}A_i$，由可列可加性得

$$\begin{aligned}P(\sum_{i=1}^{n}A_i)&=P(\sum_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)\\&=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)+\sum_{i=n+1}^{\infty}P(A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i).\end{aligned}$$

根据有限可加性，可推知下面的“加法定理”“单调性”和“对立事件的概率”.

**定理 1.4** (加法定理)　$A,B$ 是任意两个事件，则

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB). \tag{1.15}$$

**证明**　$A\cup B=A+(B\overline{A})$, 根据有限可加性得

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B\overline{A}), \tag{1.16}$$

另一方面，$B=(BA)+(B\overline{A})$，得 $P(B)=P(BA)+P(B\overline{A})$，即 $P(B\overline{A})=P(B)-P(AB)$，将此式代入(1.16)式中，有 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

**推论**　对任意三个事件 $A,B,C$ ,有

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC). \tag{1.17}$$

**证明**

$$\begin{aligned}P(A\cup B\cup C)&=P[(A\cup B)\cup C]=P(A\cup B)+P(C)-P[(A\cup B)C]\\&=P(A\cup B)+P(C)-P[(AC)\cup(BC)]\\&=P(A)+P(B)-P(AB)+P(C)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)\\&=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC).\end{aligned}$$

一般地，对任意 $n$ 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，可以证得

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n).$$

**定理 1.5**(单调性)　若 $B\subset A$,则 $P(B)\leqslant P(A)$，且

$$P(A-B)=P(A)-P(B). \tag{1.18}$$

**证明**　由 $B\subset A$ 得 $A=B+(A-B)$，根据有限可加性得 $P(A)=P(B)+P(A-B)$，从而

$$P(A-B)=P(A)-P(B),$$

且由 $P(A-B)=P(A)-P(B)\geqslant 0$，得 $P(B)\leqslant P(A)$.

**推论**　$A,B$ 是任意两个事件，则

$$P(A-B)=P(A\overline{B})=P(A)-P(AB). \tag{1.19}$$