十三五

普通高等教育“十三五”规划教材

GAODENG SHUXUE

XUEXI ZHIDAO

高等数学

学习指导

主编 马勇 乌兰 杨丽英

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

普通高等教育“十三五”规划教材

高等数学学习指导

主　编　马　勇　乌　兰　杨丽英
编　委　马　勇　乌　兰　杨丽英
李彩艳　白云霞　宋　宽
郭静霞

北京邮电大学出版社
·北京·

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习指导/马勇，乌兰，杨丽英主编. -- 北京：北京邮电大学出版社，2016.8(2017.6 重印)
ISBN 978-7-5635-4836-1

Ⅰ.①高… Ⅱ.①马… ②乌… ③杨… Ⅲ.①高等数学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 171135 号

书　　名	高等数学学习指导
主　　编	马　勇　乌　兰　杨丽英
责任编辑	沙一飞
出版发行	北京邮电大学出版社
社　　址	北京市海淀区西土城路 10 号(100876)
电话传真	010-82333010　62282185(发行部)　010-82333009　62283578(传真)
网　　址	www.buptpress3.com
电子信箱	ctrd@buptpress.com
经　　销	各地新华书店
印　　刷	北京泽宇印刷有限公司
开　　本	787 mm×960 mm　1/16
印　　张	10
插　　页	15
字　　数	257 千字
版　　次	2016 年 8 月第 1 版　2017 年 6 月第 2 次印刷

ISBN 978-7-5635-4836-1　　　　定价：29.00 元

前　　言

本书依据临床、预防、口腔、麻醉、影像、法医、检验等专业所使用的《高等数学》教材编写，既可作为各专业学习指导、平时成绩使用，又可作为考查课程的形成性考核依据. 在编写和审核工作中，结合教学实际努力反映本学科的特点，设置学习要点、补充例题、章节自测、教材习题详解等环节，使本书内容适应本学科学习的需要.

本书第一章由内蒙古科技大学包头医学院宋宽编写，第二由内蒙古科技大学包头医学院乌兰编写，第三章由内蒙古科技大学包头医学院马勇编写，第四章由内蒙古科技大学包头医学院李彩艳编写，第五章由内蒙古农业大学杨丽英编写，第六章由内蒙古科技大学包头医学院白云霞编写，第七章由内蒙古科技大学包头医学院郭静霞编写.

编　者

2016 年 7 月

目　　录

学习指导

考核手册(8开插页)

学习指导

第一章　函数　极限　连续

学习要点

一、函数

(一)函数的定义

对于变量 x 在允许范围内的每一个确定的值,变量 y 按照某个确定的规则总有相应的值与之对应,则称 y 为 x 的**函数**,记为 $y=f(x)$.

常称 x 为**自变量**,y 称为函数,也称为**因变量**.

如果对于自变量的某一个值 x_0,函数有确定的对应值,则称函数在 x_0 处有定义;使函数有定义的自变量的取值范围称为函数的**定义域**;与自变量的值相对应的因变量的值称为**函数值**;函数值的全体称为函数的**值域**.

(二)函数常用的三种表述方法

解析法;图像法;表格法.

(三)函数解析法表示中常见的几个形式

(1)由一个解析式表示,如 $y=f(x)=x^2+2x+3$.

(2)分段函数.如果函数是由几个解析式表示的,则称为**分段函数**.如

$$y=f(x)=\begin{cases} x, & x\leqslant 0, \\ x+1, & 0<x<1, \\ x^2, & x\geqslant 1. \end{cases}$$

注意　这里的 $f(x)$ 不是三个函数,而是定义域为 $(-\infty,+\infty)$ 的一个函数,它是由三个解析式来表达.

(3)隐函数. 如果函数的对应规则是由方程 $F(x,y)=0$ 给出,则称 y 为 x 的**隐函数**.

例如,由方程 $x^2+2xy+2y^2-3x=0$ 确定的函数 $y=f(x)$为隐函数.

(4)参数方程表示的函数. 如果 x 与 y 的关系通过第三个变量联系起来,如

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases}$$

则称这种函数关系为**参数方程表示的函数**.

(四)复合函数

设变量 y 是变量 u 的函数 $y=f(u)$,变量 u 是变量 x 的函数 $u=g(x)$.

若对于 x 在某范围中的每一个确定的值,依据一个确定的规则总有 u 的值与之对应,而对于 u 的此确定值,y 按确定的规则有值与之对应,则称 y 为 x 的**复合函数**. 记为 $y=f(g(x))$,称 x 为**自变量**,y 称为函数,u 为**中间变量**.

(五)初等函数

1. 初等函数

由基本初等函数及常数经过有限次四则运算或有限次复合而成的,并能用一个式子表示的函数,称为**初等函数**.

2. 基本初等函数

(1)幂函数 $y=x^\mu(\mu\in\mathbf{R})$.

(2)指数函数 $y=a^x(a>0,a\neq1)$.

(3)对数函数 $y=\log_a x(a>0,a\neq1)$.

(4)三角函数 $y=\sin x,y=\cos x,y=\tan x,y=\cot x,y=\sec x,y=\csc x$.

(5)反三角函数 $y=\arcsin x,y=\arccos x,y=\arctan x,y=\operatorname{arccot} x$.

二、极限

(一)极限的概念与性质

1. 数列的极限

对于数列$\{x_n\}$,如果随着项数 n 的无限增大,数列中的项 x_n 在变化过程中将与某常数 A 无限接近,则称 A 为数列$\{x_n\}$的**极限**,记为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$.

用数学语言可以描述为:对于数列$\{x_n\}$及常数 A,若对于任意给定的 $\varepsilon>0$,总存在正整数 N,当 $n>N$ 时,恒有$|x_n-A|<\varepsilon$ 成立,则称 A 为数列$\{x_n\}$的**极限**.

如果$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=A$，则称数列$\{x_n\}$为收敛的；否则，称数列$\{x_n\}$为发散的.

2. 函数的极限

(1)当$x\to\infty$时，$y=f(x)$的极限.

如果x无限远离原点，$f(x)$与某常数A无限接近，则称当x趋于无穷时，$f(x)$以A为极限.

用数学语言可以描述为：对于函数$f(x)$及常数A，若对于任意给定的$\varepsilon>0$，总存在$N>0$，当$|x|>N$时，恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$成立，则称当x趋于无穷时，$f(x)$以A为极限，记为$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$.

(2)当$x\to x_0$时，$y=f(x)$的极限.

如果x无限接近点x_0，$f(x)$与某常数A无限接近，则称当x趋于点x_0时，$f(x)$以A为极限.

用数学语言可以描述为：对于函数$f(x)$及常数A，若对于任意给定的$\varepsilon>0$，总存在$\delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时，恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$成立，则称当x趋于点x_0时，$f(x)$以A为极限，记为$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$.

左极限：对于函数$f(x)$及常数A，若对于任意给定的$\varepsilon>0$，总存在$\delta>0$，当$-\delta<x-x_0<0$时，恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$成立，则称当$x\to x_0^-$时，$f(x)$的左极限为A，记为$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$.

右极限：对于函数$f(x)$及常数A，若对于任意给定的$\varepsilon>0$，总存在$\delta>0$，当$0<x-x_0<\delta$时，恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$成立，则称当$x\to x_0^+$时，$f(x)$的右极限为A，记为$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$.

(3)极限的性质.

性质 1　若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A>0$，则必定存在$x_0$的某个邻域，在该邻域内任何异于$x_0$的点$x$处，恒有$f(x)>0$.

同样地，若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A<0$，则必定存在$x_0$的某个邻域，在该邻域内任何异于$x_0$的点$x$处，恒有$f(x)<0$.

性质 2　若$f(x)\geqslant 0$，且$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，则必有$A\geqslant 0$.

同样地，若$f(x)\leqslant 0$，且$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，则必有$A\leqslant 0$.

性质 3　$f(x)$在点x_0处极限存在的充分必要条件是$f(x)$在点x_0处左、右极限都存在且相等，即

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=A.$$

(二)极限的四则运算

性质 1　若$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=A$，$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} g(x)=B$，则$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}[f(x)\pm g(x)]$必定存在，且

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}[f(x)\pm g(x)]=\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)\pm\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}g(x)=A\pm B.$$

性质 2　若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=A$，$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}g(x)=B$，则 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}[f(x)\cdot g(x)]$必定存在，且

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}[f(x)\cdot g(x)]=\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)\cdot\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}g(x)=AB.$$

性质 3　若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=A$，$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}g(x)=B$ 且 $B\neq0$，则 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\dfrac{f(x)}{g(x)}$必定存在，且

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)\div\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}g(x)=\frac{A}{B}.$$

(三)极限存在的准则与两个重要极限

准则Ⅰ(夹逼定理)　如果在 x_0 的某个邻域内(或 $|x|>M$ 时)，有

$$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$$

成立，且

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}g(x)=A,\quad \lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}h(x)=A,$$

那么 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)$存在，且等于 A.

准则Ⅱ　单调有界数列必有极限.

两个重要极限

(1)$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.　　　　(2)$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$ 或 $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$.

(四)无穷小量与无穷大量

1. 无穷小量与无穷大量

若在自变量 x 的某种变化趋向下，函数 $f(x)$以 0 为极限，则称在 x 的这种趋向下，$f(x)$为**无穷小量**，可记作 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=0$.

若在自变量 x 的某种变化趋向下，函数 $f(x)$的绝对值无限增大，它可以大于预先给定任意大的正数，则称在 x 的这种趋向下，$f(x)$为**无穷大量**，可记作 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=\infty$.

2. 无穷小量的性质

性质 1　有限个无穷小量之和仍为无穷小量.

性质 2　有界函数与无穷小量之积仍为无穷小量.

性质 3　有限个无穷小量之积仍为无穷小量.

性质 4 若 $f(x)$ 为无穷大量，则其倒数 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷小量；若 $f(x)$ 为无穷小量，且 $f(x)\neq 0$，则其倒数 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷大量.

性质 5 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 的充分必要条件是 $f(x)=A+\alpha$，其中 α 当 $x\to x_0$ 时为无穷小量（**极限基本定理**）.

（五）无穷小量的比较

定义 设 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\alpha=0$，$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\beta=0$.

（1）若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\frac{\alpha}{\beta}=0$，则称在 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时，α 较 β 为高阶无穷小量，常记为 $\alpha=o(\beta)$.

（2）若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\frac{\alpha}{\beta}=\infty$，则称在 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时，α 较 β 为低阶无穷小量.

（3）若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\frac{\alpha}{\beta}=k\neq 0$，则称在 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时，α 与 β 为同阶无穷小量.

特别地，当 $k=1$ 时，称在 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时，α 与 β 为等价无穷小量.

三、连续

（一）连续的概念

1. 函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续的定义

定义 1 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，且 $x_0+\Delta x$ 也属于点 x_0 的该邻域，若

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0,$$

则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处**连续**.

定义 2 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处**连续**.

2. 连续性的三要素

（1）函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 有定义；

（2）当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 有极限；

（3）极限值等于该点的函数值.

3. 左连续与右连续

若 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处**左连续**.

若 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处**右连续**.

4. 函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续的定义

如果函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内每一点都连续，则称函数 $y=f(x)$ 为 (a,b) 内的连续函数.

若函数 $y=f(x)$ 为 (a,b) 内的连续函数，且在 $x=a$ 处右连续，在 $x=b$ 处左连续，则称函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

5. 初等函数的连续性

(1)基本初等函数在其定义域内都是连续函数；

(2)四则运算不改变函数的连续性；

(3)复合过程不改变函数的连续性.

结论 初等函数在其定义域内都是连续函数.

(二)间断点及其分类

如果 $y=f(x)$ 在点 x_0 处不连续，则称点 x_0 为 $y=f(x)$ 的**间断点**.

通常将间断点分成两类，若点 x_0 为 $y=f(x)$ 的间断点：

当 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ 都存在时，称点 x_0 为 $y=f(x)$ 的**第一类间断点**.

当 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ 至少有一个不存在时，称点 x_0 为 $y=f(x)$ 的**第二类间断点**.

如果 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在，点 x_0 为间断点，此时称点 x_0 为 $y=f(x)$ 的**可去间断点**.

(三)闭区间上连续函数的性质

最大值最小值定理 设函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必能取得最大值与最小值.

介值定理 设函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$f(a) \neq f(b)$，则对于任意介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的 C，必定存在 $\xi \in (a,b)$，使得 $f(\xi)=C$.

零点定理 设函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$f(a) \cdot f(b) < 0$，则必定存在 $\xi \in (a,b)$，使得 $f(\xi)=0$.

补充例题

例 1 设 $f(x)=\begin{cases}\cos x, & x\leqslant 0,\\ \sqrt{x}, & x>0,\end{cases}$ 则 $f(0)=$________.

解 当 $x\leqslant 0$ 时,$f(x)=\cos x$,因此

$$f(0)=\cos 0=1.$$

例 2 设 $f(x)=\dfrac{x}{1+x}$,求 $f(f(x))$.

解 $f(f(x))=\dfrac{f(x)}{1+f(x)}=\dfrac{\dfrac{x}{1+x}}{1+\dfrac{x}{1+x}}=\dfrac{x}{1+2x}$.

例 3 设 $y=3^u,u=v^2,v=\tan x$,则 $y=f(x)=$________.

解 依次复合可得

$$y=3^u=3^{v^2}=3^{\tan^2 x}.$$

例 4 将 $y=e^{\sin(x^2+2x)}$ 分解为一系列简单函数.

解 若从外到内逐层分解,则可令

$$y=e^u,\quad u=\sin v,\quad v=x^2+2x.$$

例 5 求复合函数 $y=\sqrt{\lg\left(\dfrac{5x-x^2}{4}\right)}$ 的定义域.

解 从外到内逐层分解为一系列简单函数

$$y=\sqrt{u},\quad u=\lg v,\quad v=\frac{5x-x^2}{4}.$$

再考察各层次函数在满足前一层次条件下的定义域.

当 $u\geqslant 0$ 时,即 $u=\lg v\geqslant 0$,从而 $v\geqslant 1$,即$\dfrac{5x-x^2}{4}\geqslant 1$,进而有 $5x-x^2\geqslant 4$,可化为 $x^2-5x+4\leqslant 0$,解得 $1\leqslant x\leqslant 4$.

所以,所求函数定义域为$\{x\,|\,1\leqslant x\leqslant 4\}$,或用区间表示为$[1,4]$.

例 6 求$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{x^2-1}$.

解 由第一个重要极限及极限运算法则得

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{x-1}\cdot\frac{1}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{x-1}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}.$$

例 7 求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^3(mx)}{x^2}$($m$ 为常数).

解 由第一个重要极限及极限运算法则得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^3(mx)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin mx}{mx}\right)^3 m^3x=0.$$

例 8 利用第二个重要极限求下列极限:

(1)$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)^x$;　(2)$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{x}}$;　(3)$\lim\limits_{x\to 0}(1+mx)^{\frac{n}{x}}$(其中 m,n 为常数);

(4)$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\sqrt{x}}$;　(5)$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx+d}$(其中 a,b,d 为常数).

解 (1)$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-x}\right)^{(-x)\cdot(-1)}=e^{-1}$.

(2)**方法 1** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-x)^{\frac{1}{x}}}{(1+x)^{\frac{1}{x}}}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}}{\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}}=\frac{e^{-1}}{e}=e^{-2}$;

方法 2 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(1-\frac{2x}{1+x}\right)^{\frac{1+x}{-2x}}\right]^{-\frac{2}{1+x}}=e^{-\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{1+x}}=e^{-2}$.

(本解法中运用了复合函数的连续性,望正确理解)

(3)$\lim\limits_{x\to 0}(1+mx)^{\frac{n}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}[1+(mx)]^{\frac{1}{mx}\cdot mn}=e^{mn}$.

(4)本题的变换较有技巧性.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right]^{\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\sqrt{x}}\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\sqrt{x}}=e^{-1}\cdot e=1.$$

$$(5)\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx+d}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx}\cdot\left(1+\frac{a}{x}\right)^{d}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{a}{x}\right)^{\frac{x}{a}}\right]^{ab}\cdot\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{d}$$

$$=e^{ab}\cdot\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)\right]^{d}=e^{ab}\cdot 1=e^{ab}.$$

例 9 求$\lim\limits_{x\to 0}(x^2+x)\cos\frac{1}{x}$.

解 观察所给函数,当 $x\to 0$ 时,第一个因式(x^2+x)的极限为 0,但是当 $x\to 0$ 时,$\cos\frac{1}{x}$极限不存在,因此不能利用极限运算法则.将(x^2+x)认作是在给定过程 $x\to 0$ 中的无穷小

量，而 $\cos\dfrac{1}{x}$ 为有界变量，则由无穷小量的性质可知

$$\lim_{x\to 0}(x^2+x)\cos\frac{1}{x}=0.$$

同样可讨论出

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0.$$

（注意上述极限与第一个重要极限的区别）

例 10 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+1}{x^3+1}(3+\cos x)$.

解 由教材第一章例题 11 的结论可得当 $x\to\infty$ 时 $\dfrac{x^2+1}{x^3+1}$ 为无穷小量，而 $(3+\cos x)$ 为有界变量，则由无穷小量的性质可知

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^3+1}(3+\cos x)=0.$$

例 11 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{\sin x}$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{x}\ln(1+2x)}{\dfrac{\sin x}{x}}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+2x)^{\frac{1}{x}}}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}}$

$$=\ln\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=\ln e^2=2.$$

本例同时应用两个重要极限，又运用复合函数的连续性，颇具代表性.

例 12 若 $f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ a+2, & x=0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续，求 a 的值.

解 由于 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$，所以

$$f(0)=a+2=0,$$

故

$$a=-2.$$

例 13 设 $f(x)=\begin{cases}x+2, & x\leqslant 0,\\ x^2+a, & 0<x<1,\\ bx, & 1\leqslant x\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，求 a,b 的值.

解 本题需研究在分段点 $x=0$ 与 $x=1$ 处 $f(x)$ 的连续性，

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}(x+2)=2,$$

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x^2+a)=a,$$

只有 $2=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=a$ 时，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$才存在，故 $a=2$.

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}(x^2+2)=3,$$

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}bx=b,$$

只有 $3=\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=b$ 时，$\lim\limits_{x\to 1}f(x)$才存在，故 $b=3$.

例 14　求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\sin(1+x^2)}$.

解　所给函数为定义在$(-\infty,+\infty)$内的初等函数，故在 $x=0$ 处连续，因此

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{\sin(1+x^2)}=f(0)=\frac{\ln(1+0)}{\sin(1+0)}=0.$$

利用初等函数的连续性求函数极限是常见的方法，并且方法简便，应该学会使用.

第二章　导数和微分

学习要点

一、导数

(一)导数的概念及性质

1. 导数的概念

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的某一邻域内有定义，若自变量 x 在点 x_0 处的增量为 Δx（$x_0+\Delta x$ 仍在该邻域内），函数 $y=f(x)$ 相应地有增量

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0),$$

如果极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，则称此极限值为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的**导数**. 记作

$$y'\big|_{x=x_0},\quad \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}\quad 或\quad f'(x_0),$$

即

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

此时称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处**可导**；如果上述极限不存在，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处**不可导**.

2. 左导数与右导数

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 及左侧邻域内有定义，当极限