An Order Elliptic Differential Equations with Boundary Value Problem and Its Application in the Thin Shell Theory

俄罗斯数学精品译丛

“十二五”国家重点图书

一阶椭圆型微分方程组与边值问题及其在薄壳理论上的应用

[苏] 维库阿 著　《一阶椭圆型微分方程组与边值问题及其在薄壳理论上的应用》翻译组 译

哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

俄罗斯数学精品译丛

“十二五”国家重点图书

一阶椭圆型微分方程组与边值问题及其在薄壳理论上的应用

An Order Elliptic Differential Equations with Boundary Value Problem and Its Application in the Thin Shell Theory

[苏] 维库阿 著

《一阶椭圆型微分方程组与边值问题及其在薄壳理论上的应用》翻译组 译

HITP

哈爾濱工業大學出版社

HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书共有十章，主要包括引言，C_2类函数，方程组(1.1)的正则解和完全正则解及其一些性质，与二阶微分方程的联系，积分恒等式，正则解的一般表达式，广义柯西积分公式，正则解的一致逼近和级数展开，边值问题，在弹性薄壳理论上的应用，解析系数的方程组等内容.

本书适合大学师生及数学爱好者参考使用.

图书在版编目(CIP)数据

一阶椭圆型微分方程组与边值问题及其在薄壳理论上的应用/(苏)维库阿著;《一阶椭圆型微分方程组与边值问题及其在薄壳理论上的应用》翻译组译. —哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2018.1

ISBN 978 - 7 - 5603 - 6700 - 2

Ⅰ.①一… Ⅱ.①维… ②一… Ⅲ.①微分方程 - 数值计算 - 研究 Ⅳ.①O241.8

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 148314 号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　张永芹　穆　青
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451 - 86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨圣铂印刷有限公司
开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张 13　字数 246 千字
版　　次　2018 年 1 月第 1 版　2018 年 1 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978 - 7 - 5603 - 6700 - 2
定　　价　68.00

◎

目录

第1章 引言

本文是要研究方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{\partial v}{\partial y}=au+bv+f\\[2mm]\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial x}=cu+dv+g\end{cases}\tag{$*$}$$

解的性质,主要是阐明解的函数构造并研究边值问题. 本文将证明,单复变解析函数的一系列重要性质可推广到型为

$$U=u+\mathrm{i}v$$

的函数类,其中 u,v 满足方程组($*$). 许多实际问题都化为式($*$)型的方程组. 本文将指出它在弹性薄壳理论上的应用. 预先看一下引言和第8章§1可以对本文的内容有一个比较完整的了解.

1. 本文研究的是形式为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{\partial v}{\partial y}=a(x,y)u+b(x,y)v+f(x,y)\\[2mm]\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial x}=c(x,y)u+d(x,y)v+g(x,y)\end{cases}\tag{1.1}$$

的微分方程组,其中 a,b,c,d,f 和 g 是变量 x,y 的已知函数. a, b,c,d 称为方程组(1.1)的系数,f 和 g 称为自由项.

本文主要研究的是:

(1)方程组(1.1)的解的一般性质;

(2)形式为

$$\alpha u + \beta v = \gamma \tag{1.2}$$

的边值问题,其中 α,β,γ 是给定在区域边界上的实函数,而且 α 和 β 不同时为0.

我们已经建立了方程组(1.1)的解和单复变解析函数之间结构上和性质上的紧密联系,还发现了单复变解析函数的许多性质对方程组(1.1)的解亦成立. 应该指出,在马·阿·拉夫伦捷夫(M. A. Лаврентьев)关于拟保角变换的研究工作([7],[8])中就曾建立了由方程组(1.1)的某一类解所实现的平面域之间的映射和通常的保角变换有许多共同之处(再参看[9]).

对边值问题(1.2),我们获得了在一定意义下的完善的结果. 我们建立等价于这一问题的积分方程并指出它们的可解性的简单判别法. 我们的研究指出了,对于方程组(1.1)的边值问题(1.2),所有的备择定理(альтернативные теоремы)——它们对单复变解析函数类中的同样问题是成立的——仍然成立.

一般应该说,在方程组(1.1)的基础上建立了函数理论,它和基于柯西-黎曼方程组而建立起来的通常的复变函数论之间有许多共同之处.

应当指出,对满足方程组(1.1)的函数类的研究有重要的实际意义,因为连续介质力学的许多问题都归结为这类方程组. 下面我们要指出这方程组对弹性薄壳理论问题的应用.

以前其他作者([10],[11])曾研究过和更特殊形式的方程组相联系的函数理论. 如贝尔斯(L. Bers)([10])研究了满足方程组(参看[12])①

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \sigma(x,y)\dfrac{\partial w}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\sigma(x,y)\dfrac{\partial w}{\partial x} \end{cases} \tag{1.3}$$

的函数性质. 这个方程组在气体动力学和弹性力学中会遇到,它是方程组(1.1)的特殊情形. 因为若考虑函数

$$v = \sigma w$$

则方程组(1.3)变为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial v}{\partial y} = -\dfrac{1}{\sigma}\dfrac{\partial \sigma}{\partial y}v \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{1}{\sigma}\dfrac{\partial \sigma}{\partial x}v \end{cases}$$

---

① 在著作[10]的第二部分,作者把自己的某些结果推广到更一般的方程组上去. 然而,这些重要的结果是在形式的和人为的结构帮助之下获得的(参考[33]和[34]).

2. 若把方程组(1.1)写成复数形式,则以后会表明,方程组(1.1)的研究将在很大程度上被减轻了. 为此目的,我们把方程组(1.1)的第二式乘以 i 并加到第一式上,再利用符号

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right) \tag{1.4}$$

于是得一复变量的方程

$$\frac{\partial U}{\partial \bar{z}} = AU + B\overline{U} + F \tag{1.5}$$

其中

$$\begin{aligned} U &= u + \mathrm{i}v \\ \overline{U} &= u - \mathrm{i}v \end{aligned} \tag{1.6}$$

$$A = \frac{1}{4}(a + d + \mathrm{i}c + \mathrm{i}b)$$

$$B = \frac{1}{4}(a - d + \mathrm{i}c + \mathrm{i}b)$$

$$F = \frac{1}{2}(f + \mathrm{i}g) \tag{1.7}$$

不难看出,若 U 是式(1.5)的解,则它的实部和虚部将满足方程组(1.1).

3. 通常在考察方程组(1.1)时,认为系数和自由项在某一域上是连续的,并要求 u,v 及其偏微商$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y}$在这域上连续. 然而,正如我们在以后要看到的单是系数的连续性不足以保证 u,v 对 x,y 的偏微商的连续性. 为了包括任意的连续系数的情形,我们应给出方程组(1.1)解的定义,这一定义不预先假定 u,v 的偏微商的连续性. 方程组(1.1)解的概念的这种推广的可能性由它可表示式(1.5)的复数形式所指出,因为它只要求 U 和$\frac{\partial U}{\partial \bar{z}}$的连续性. 但若$\frac{\partial U}{\partial x}$和$\frac{\partial U}{\partial y}$不是分别地都存在,则从上面按公式(1.4)对运算$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$所作的定义,$\frac{\partial U}{\partial \bar{z}}$的存在不是那么明显的. 因此,我们应给出运算$\frac{\partial U}{\partial \bar{z}}$的另一种定义,它不预先假定偏微商$\frac{\partial U}{\partial x}$和$\frac{\partial U}{\partial y}$的存在. 运算$\frac{\partial U}{\partial \bar{z}}$的这种定义首先是篷佩尤(D. Pompeiu)([13])在 1921 年提出的. 下面我们利用这一定义,并研究使运算$\frac{\partial U}{\partial \bar{z}}$是连续的一类函数的某些基本性质.

$C_{\bar{z}}$类函数

第2章

§1 运算$\dfrac{\partial U}{\partial \bar{z}}$的新定义

设

$$U(z)=u+\mathrm{i}v$$

是在域 T_0 上点

$$z=x+\mathrm{i}y$$

的连续函数,它在 T_0 的内部有对 x,y 的一阶连续偏微商. 则对任一以简单而可求长的闭曲线 L 为周界,并且整个包含在 T_0 内部的区域 T,奥斯特罗格拉德斯基公式

$$\iint_T \frac{\partial U}{\partial \bar{z}}\mathrm{d}T=\frac{1}{2\mathrm{i}}\int_L U(t)\,\mathrm{d}t \tag{2.1}$$

成立. 此外,我们所定义的$\dfrac{\partial U}{\partial \bar{z}}$暂且还是$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial U}{\partial x}+\mathrm{i}\dfrac{\partial U}{\partial y}\right)$. 现在命曲线 L 的长度减小,用任何方式收缩于一点

$$z=x+\mathrm{i}y$$

则从式(2.1)得

$$\frac{\partial U}{\partial \bar{z}}=\lim_{L\to z}\frac{1}{2\mathrm{i}\mid T\mid}\int_L U(t)\,\mathrm{d}t \tag{2.2}$$

其中$|T|$表示区域 T 的面积,而 $L\to z$ 表示曲线 L 长度减小,并用任意方式收缩于一点 z.

等式(2.2)是在 U 对 x,y 有连续偏微商的假设下得出的. 但可以发生这样的情况:这等式的右边可对于不具有对 x 和 y 的偏微商的连续函数存在(这样的函数的例子将在下面给出).

与前面一样,假定函数 U 在区域 T_0 上连续,如果当任意的包含点 z 在其内部的可求长的闭曲线 L 以任何方法收缩到 z 时①,等式(2.2)的右端存在同一极限,则我们以等式(2.2)来定义在点 $z\in T_0$ 处的$\frac{\partial U}{\partial \bar{z}}$.

若$\frac{\partial U}{\partial \bar{z}}$在 T_0 的每一点都存在且在 T_0 上连续,则称 U 是 $C_{\bar{z}}(T_0)$类的函数,这事实我们将记作

$$U\in C_{\bar{z}}(T_0)$$

或简单地记作

$$U\in C_{\bar{z}}$$

显然每一个在区域 T 上具有对 x,y 的一阶连续偏微商的函数 U 属于 $C_{\bar{z}}(T)$类. 在此情况下,$\frac{\partial U}{\partial \bar{z}}$可按公式(1.4)计算.

下面我们将会看到 $C_{\bar{z}}$类比 C^1 类广②,而比 C 类狭

$$C(T)\supset C_{\bar{z}}(T)\supset C^1(T)$$

而且 $C_{\bar{z}}(T)$是 $C(T)$的一个真部分,$C^1(T)$是 $C_{\bar{z}}(T)$的一个真部分.

现在由公式

$$\frac{\partial U}{\partial z}=\frac{\partial \overline{U}}{\partial \bar{z}} \tag{2.3}$$

定义运算$\frac{\partial U}{\partial z}$,式中上面的“-”表示取共轭的意思. 从关系式(2.2)即得

$$\frac{\partial U}{\partial z}=-\lim_{L\to z}\frac{1}{2\mathrm{i}\mid T\mid}\int_L U(t)\,\mathrm{d}\bar{t} \tag{2.4}$$

若$\frac{\partial U}{\partial z}$在 T 上存在且连续,则称 U 属于 $C_{\bar{z}}(T)$类. 显然

$$U\in C_z(T)$$

当且仅当

$$\overline{U}\in C_{\bar{z}}(T)$$

因此,今后只需研究函数类 $C_{\bar{z}}(T)$的性质.

不难看出,若 U_1 和 U_2 是 $C_{\bar{z}}$类函数,则函数 $c_1U_1+c_2U_2$ 也属于 $C_{\bar{z}}$类,式中 c_1 和 c_2 是任意复数.

---

① 可以证明,当曲线 L 收缩至 L 外的点 z 时,得到同样的极限(参看[14]).

② 符号 C^k 或 $C^k(T)$表示在 T 上连续且对 x,y 有直到 k 阶在内的连续偏微商的函数类;$C^0(T)=C(T)$是所有在 T 上连续的函数类.

§2 $C_{\bar{z}}$类函数的一般积分表达式

显然,区域 T 上的每一个全纯函数 $f(z)$ 将是 $C_{\bar{z}}$类的函数. 根据柯西定理,对此函数有

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \quad (\text{在 } T \text{ 上处处}) \tag{2.5}$$

容易证明它的逆命题:

若函数

$$f(z) \in C_{\bar{z}}(T)$$

并在 T 上满足方程(2.5),则 $f(z)$ 是 T 上的全纯函数.

$C_{\bar{z}}$类函数的一个十分重要的例子是

$$U(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_T \frac{f(\xi,\eta)}{t-z}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \quad (t = \xi + \mathrm{i}\eta) \tag{2.6}$$

其中 $f(x,y)$ 是 T 上可积而且连续的函数. 容易证明 U 在平面

$$z = x + \mathrm{i}y$$

上处处连续,在 $T+L$ 外部全纯,并在无穷远处为零. 现在证明

$$U \in C_{\bar{z}}(T)$$

我们可写成

$$U(z) = U_1(z) + U_2(z) \tag{2.7}$$

其中

$$\begin{cases} U_1(z) = -\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\iint_{T_1} \dfrac{f(\xi,\eta)}{t-z}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \\ U_2(z) = -\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\iint_{T_2} \dfrac{f(\xi,\eta)}{t-z}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \end{cases} \tag{2.8}$$

T_1 是 T 的任一子域,它以简单的可求长的闭环路 L_1 为边界,而

$$T_2 = T - T_1$$

不难看出,U_1 和 U_2 在全平面上连续且在无穷远处为零,而且 U_1 在 T_1+L_1 外全纯,而 U_2 在 L_1 内全纯. 因此,由柯西定理得

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\mathrm{i}\mid T_1\mid}\int_{L_1} U(z)\,\mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{2\mathrm{i}\mid T_1\mid}\int_{L_1} U_1(z)\,\mathrm{d}z + \frac{1}{2\mathrm{i}\mid T_1\mid}\int_{L_1} U_2(z)\,\mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{2\mathrm{i}\mid T_1\mid} - \int_{L\infty} U_1(z)\,\mathrm{d}z \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\mathrm{i}\pi |T_1|} \iint_{T_1} f(\xi,\eta)\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \int_{L\infty} \frac{\mathrm{d}z}{z-t}$$

$$= \frac{1}{|T_1|} \iint_{T_1} f(\xi,\eta)\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \tag{2.9}$$

其中 $L\infty$ 为半径充分大的圆. 在式(2.9)中取极限

$$L_1 \to z$$

由于 $f(x,y)$ 的连续性得

$$\lim_{L_1\to z} \frac{1}{2\mathrm{i}|T_1|} \int_{L_1} U(z)\,\mathrm{d}z = f(x,y)$$

即

$$\frac{\partial U}{\partial \bar{z}} = f(x,y) \tag{2.10}$$

这样,就证明了形如式(2.6)的每一函数都属于类 $C_{\bar{z}}(T)$. 这一结论对于区域 T 是无穷的情况亦成立,只要求积分(2.6)在 T 内一致收敛(参看[16]).

不难看出

$$U(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_T \frac{f(\xi,\eta)\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta}{t-z}$$

$$= \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{2}{\pi} \iint_T f(\xi,\eta) \log|t-z|\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\right] \tag{2.11}$$

这里$\frac{\partial}{\partial z}$表示算子$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)$.

众所周知,形如式(2.6)的函数并不总具有对 x,y 的偏微商. 若积分区域 T 包含原点,则对应于

$$f(x,y) = \frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\varphi}}{\log \frac{1}{r}} \quad (r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = z) \tag{2.12}$$

的式(2.6)的函数就是一个例子. 这样的函数在点 $z=0$ 没有对 x,y 的偏导数. 为了证明这一点,只需取

$$|z| < R < 1$$

作为区域 T,则由简单的计算就得(参看第4章§7)

$$U(x,y) = -\frac{1}{\pi} \iint_T \frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\varphi}\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi}{(\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} - z)\log\frac{1}{\rho}}$$

$$= -2z\log\log\frac{1}{r} + 2z\log\log\frac{1}{R} \tag{2.12a}$$

由此得出

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial U}{\partial x} = -2\log\log\dfrac{1}{r} - 2\dfrac{e^{i\varphi}\cos\varphi}{\log r} + 2\log\log\dfrac{1}{R} \\
\dfrac{\partial U}{\partial y} = -2i\log\log\dfrac{1}{r} - 2\dfrac{e^{i\varphi}\sin\varphi}{\log r} + 2i\log\log\dfrac{1}{R}
\end{cases}
\tag{2.12б}
$$

从这可清楚地看到$\dfrac{\partial U}{\partial x}$和$\dfrac{\partial U}{\partial y}$在坐标原点处都不存在(变成无穷大). 除此以外,容易求出

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial U}{\partial \bar{z}} = -\dfrac{e^{2i\varphi}}{\log r} \\
\dfrac{\partial U}{\partial z} = -2\log\log\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{\log r} + 2\log\log\dfrac{1}{R}
\end{cases}
\tag{2.12в}
$$

由此可知$\dfrac{\partial U}{\partial \bar{z}}$在 T 内处处存在且连续,而$\dfrac{\partial U}{\partial z}$在点 $z=0$ 变成无穷大.

所举的例子表明:

(1) $C_{\bar{z}}$类比 C^1 广;

(2) 一般说来,$C_{\bar{z}}$类的函数不属于 C_z.

现在来证明下述定理:

定理 若:

(1) T 是一区域,它的边界 L 是由有限个无公共点的简单的可求长的闭环路组成;

(2) $U \in C_{\bar{z}}(T)$,且在 $T+L$ 上连续;

(3) $\dfrac{\partial U}{\partial z}$在 T 上可积.

则

$$
U(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{U(t)}{t-z}dt - \frac{1}{\pi}\iint_T \frac{\partial U}{\partial \bar{t}}\frac{d\xi d\eta}{t-z} \quad (z \in T) \tag{2.13}
$$

而且右边部分的二重积分一般说来应了解为非奇异的.

证明[①] 以 U_1 表示式(2.13)的右边部分

$$
U_1(z) = \Phi(z) + U_0(z) \tag{2.14}
$$

其中

$$
\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{U(t)}{t-z}dt \tag{2.15}
$$

---

① 若认为

$$
U \in C^1(T+L)
$$

则公式(2.13)的证明无大困难(例如,参看[13],[17]).

$$U_0(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_T \frac{\partial U}{\partial \bar{t}} \frac{d\xi d\eta}{t - z} \tag{2.15a}$$

我们应该证明

$$U_1 = U$$

因为 $\Phi(z)$ 在 T 内全纯，而 U_0 是式(2.6)型的函数$\left(\text{其中} f = \frac{\partial U}{\partial \bar{z}}\right)$，所以有

$$\frac{\partial U_1}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial U}{\partial \bar{z}}$$

这就是说

$$U_1 \in C_{\bar{z}}(T)$$

和

$$U - U_1 = \Phi_0(z)$$

是 T 内的全纯函数. 设 L_n 是一多角形区域 T_n 的边界，L_n 和 T_n 都在 T 内. 当 $z \in T_n$ 时，利用柯西公式及式(2.14)有

$$\begin{aligned}\Phi_0(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{L_n} \frac{U(t) - U_1(t)}{t - z} dt \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{L_n} \frac{U(t)}{t - z} dt - \frac{1}{2\pi i}\int_{L_n} \frac{U_1(t)}{t - z} dt \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{L_n} \frac{U(t)}{t - z} dt - \Phi(z) - \frac{1}{2\pi i}\int_{L_n} \frac{U_0(t)}{t - z} dt\end{aligned} \tag{2.16}$$

把 U_0 写成下列形式

$$U_0(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_{T_n} \frac{\partial U}{\partial \bar{t}} \frac{d\xi d\eta}{t - z} - \frac{1}{\pi}\iint_{T-T_n} \frac{\partial U}{\partial \bar{t}} \frac{d\xi d\eta}{t - z} = U' + U''$$

显然 U' 和 U'' 在 z 平面上处处连续，U' 在 $T_n + L_n$ 处全纯且在无穷远处为零，而 U'' 在 T_n 内全纯. 所以根据柯西定理与柯西公式就有

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{L_n} \frac{U_0(t)\,dt}{t - z} &= \frac{1}{2\pi i}\int_{L_n} \frac{U'(t)\,dt}{t - z} + \frac{1}{2\pi i}\int_{L_n} \frac{U''(t)\,dt}{t - z} \\ &= U''(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_{T-T_n} \frac{\partial U}{\partial \bar{t}} \frac{d\xi d\eta}{t - z} \quad (z \in T_n)\end{aligned}$$

代入式(2.16)，得

$$\Phi_0(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_n} \frac{U(t)\,dt}{t - z} - \Phi(z) + \frac{1}{\pi}\iint_{T-T_n} \frac{\partial U}{\partial \bar{t}} \frac{d\xi d\eta}{t - z} \tag{2.17}$$

现选取一个多角形区域序列

$$T_1, T_2, \cdots$$

使：

(1) $T_1 \subset T_2 \subset \cdots$;

(2) 当 $n \to \infty$ 时，$T_n \to T$;

(3)

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_n} \frac{U(t)}{t - z} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{L} \frac{U(t)}{t - z} dt \tag{2.18}$$

其中 z 是 T 内的一定点. 因为 $U(z)$ 在 $T+L$ 上连续，所以以上的作法是永远可以办到的(例如参看[15]，122 ~ 125 页). 因为根据假定$\frac{\partial U}{\partial \bar{z}}$在 T 上是可积函数，所以对这样选取的序列

$$T_1, T_2, \cdots$$

当 $n \to \infty$ 时，式(2.17)右边的二重积分趋向于零. 再根据关系式(2.18)和(2.15)可知，当 $n \to \infty$ 时，式(2.17)右边的线积分趋向于 $\Phi(z)$. 因此

$$\Phi_0(z) = 0$$

即

$$U_1 = U$$

定理证毕.

§3 奥斯特罗格拉德斯基公式

把式(2.13)写成

$$U(z) = \Phi(z) + U_0(z) \tag{2.19}$$

其中 Φ 和 U_0 由式(2.15)与(2.15a)给定，因为根据假设 U 在 $T+L$ 上连续，而 U_0 在全平面上连续，所以，显见 $\Phi(z)$ 亦在 $T+L$ 上连续. 除此之外，$\Phi(z)$ 在 T 内全纯，而 U_0 在 $T+L$ 外全纯. 所以由柯西公式得

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2i} \int_L U(z) dz &= \frac{1}{2i} \int_L \Phi(z) dz + \frac{1}{2i} \int_L U_0(z) dz \\
&= \frac{1}{2i} \int_{L\infty} U_0(z) dz \\
&= \int_{L\infty} \frac{dz}{z - t} \frac{1}{2i\pi} \iint_T \frac{\partial U}{\partial \bar{t}} d\xi d\eta \\
&= \iint_T \frac{\partial U}{\partial \bar{t}} d\xi d\eta
\end{aligned}$$

其中 $L\infty$ 表示半径足够大的圆.

这样，我们就得到了公式

$$\frac{1}{2\mathrm{i}}\int_L U(z)\,\mathrm{d}z = \iint_T \frac{\partial U}{\partial \bar{t}}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \tag{2.20}$$

它对于任意的属于 $C_{\bar{z}}(T)$ 类，且在 $T+L$ 上连续，其微商 $\dfrac{\partial U}{\partial \bar{z}}$ 在 T 上可积的函数 U 成立. 在著作[14]中给出了式(2.20)的另一证明.

§4 $C_{\bar{z}}$ 类函数连续性的特征

我们将证明下述命题：

定理 若

$$U(z) \in C_{\bar{z}}(T)$$

则在任一闭区域 $D \subset T$ 上有不等式

$$|U(z_1) - U(z_2)| < M|z_1 - z_2||\log \alpha|z_1 - z_2|| \tag{2.21}$$

成立，其中 z_1, z_2 是 D 中的任意两点，而 M, α 是与 z_1, z_2 无关的正常数.

证明 我们可使 D 包含在一具有逐段光滑边界 L_0 的区域 T_0 内，且

$$D \subset T_0 + L_0 \subset T$$

由式(2.13)得

$$U(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{L_0}\frac{U(t)}{t-z}\mathrm{d}t - \frac{1}{\pi}\iint_{T_0}\frac{\partial U}{\partial \bar{t}}\frac{\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta}{t-z} \quad (z \in D) \tag{2.22}$$

由此等式得

$$|U(z_1) - U(z_2)| < |z_1 - z_2| \left\{\frac{1}{2\pi}\int_{L_0}\frac{|U(t)|\cdot|\mathrm{d}t|}{|t-z_1|\cdot|t-z_2|} + \frac{1}{\pi}\iint_{T_0}\left|\frac{\partial U}{\partial \bar{t}}\right|\frac{\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta}{|t-z_1|\cdot|t-z_2|}\right\} \tag{2.23}$$

容易得出下列估计式

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{L_0}\frac{|U(t)|\cdot|\mathrm{d}t|}{|t-z_1|\cdot|t-z_2|} < M_1 \\ \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\iint_{T_0}\left|\frac{\partial U}{\partial \bar{t}}\right|\frac{\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta}{|t-z_1|\cdot|t-z_2|} < M_2|\log \alpha_0|z_1 - z_2|| \end{cases} \tag{2.24}$$

其中 z_1, z_2 是 D 中的任意两点，而 M_1, M_2 和 α_0 是与这些点的选取无关的正常数，一般说来，它们仅依赖于 U 和 D. 由估计式(2.24)和(2.23)就得出不等式(2.21).

不等式(2.21)证明了：连续函数类 $C(T)$ 比 $C_{\bar{z}}(T)$ 大得多，因为后者甚至不包含具有小于1的指数赫尔德意义下的连续函数.