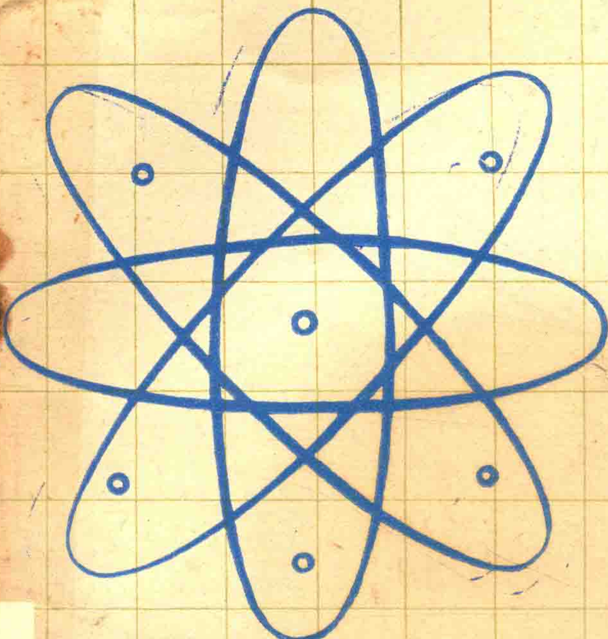
小学教师文库



比和比例及其教学

张中行　凌国伟

江苏人民出版社

XIAOXUEJIAOSHIWENKU

比和比例及其教学

张中行　凌国伟

江苏人民出版社

比和比例及其教学

张中行　凌国伟

江苏人民出版社出版

江苏省新华书店发行　　江阴人民印刷厂印刷

开本 787×1092 毫米　1/32　印张 2.5　字数 49,000

1981年5月第1版　　1981年5月第1次印刷

印数 1—39,000册

书号：7100·093　　定价：0.22元

责任编辑　何震邦

目　　录

一、比

§1 比 的 意 义

日常生活和工农业生产中，人们根据不同的情况和要求，经常使用不同的数学比较方法。

例如：一块钢板，长5米，宽3米，长比宽多几米？宽比长少几米？

这题是钢板长与宽的比较，可用减法，即$5-3=2$(米)。通过计算，知道长比宽多2米，宽比长少2米。如果这题改为：一块钢板，长5米，宽3米，长是宽的几倍？宽是长的几分之几？同上题比较，题目条件没有变化，但要求变了。它要求比较钢板的长和宽的倍数关系，所以需要采用同上题不同的数学比较方法。用除法来比较：$5\div3=1\frac{2}{3}$，$3\div5=\frac{3}{5}$。通过计算，知道长是宽的$1\frac{2}{3}$倍，宽是长的$\frac{3}{5}$。

长是宽的几倍，或者宽是长的几分之几（倍），有时也说成长和宽的比，或者宽和长的比是几比几。如上题，有时说成长和宽的比是5比3，或者宽和长的比是3比5。

又如，一辆汽车，3小时行驶120公里，要求这辆汽车行驶的速度。即，这辆汽车在3小时内平均每小时行多少公里。通过计算$120\div3=40$公里/时，知道这辆汽车在3小时

内平均速度是每小时40公里。

速度是单位时间内的位移，也可以说位移与时间的比就是速度。上题，汽车行驶的速度，其实就是汽车所行驶的路程和所用的时间的比，即120比3。

由上可知，**两个数相除，又可叫做两个数的比。**两个数的比，也可当作两个数相除，这就是比的意义。

5比3，可以记作　5：3

3比5，可以记作　3：5

120比3，可以记作　120：3

“：”是比号，读作“比”。比号前面的数叫做比的**前项**，比号后面的数，叫做比的**后项**。如

5	：	3		3	：	5
前项	比号	后项		前项	比号	后项

比的前项和后项是根据谁和谁比来确定的，不能任意对调。在$a \neq b$的情况下，$a:b$和$b:a$是完全不同的两个比。如，甲校有500个学生，乙校有600个学生，甲校和乙校学生人数的比是500：600，乙校和甲校学生人数的比是600：500。因此，在写出一个比时，要正确地确定比的前项和后项，决不能把它的前、后项写颠倒。

比是两个数的关系，表示前项除以后项（后项不能是零），或者说，它相当于一个前项作分子，后项作分母的分数，因此5：3也可以写作$\frac{5}{3}$，3：5也可以写作$\frac{3}{5}$。比的前项除以后项所得的商叫做比值（比率）。如

$$5:3=5\div3=\underset{\text{（比值）}}{1\frac{2}{3}}。$$

又如

$$\frac{1}{4}\text{吨}:125\text{公斤}=250\text{公斤}:125\text{公斤}=250\div125=\underset{\text{（比值）}}{2}。$$

一般地 $$\underset{\text{前项}}{a}\ \underset{\text{比号}}{:}\ \underset{\text{后项}}{b}=\underset{\text{（比值）}}{k}。\qquad (b\neq0)$$

教学比的意义前，可以提出一些“求一个数是另一个数的几倍或几分之几”等用除法计算的习题让学生口答，如6是3的几倍？3是6的几分之几？7是14的几分之几？14是7的几倍？8公斤是2公斤的几倍？2公斤是8公斤的几分之几？3米是15米的几分之几？15米是3米的几倍？使“比”的概念从教学一开始就和除法联系在一起，为学生理解比的意义作准备。

讲解比的意义时，除了教材上的例题外，还可以再补充一些简单的实例，如，一段布长6尺9寸，宽2尺3寸，长是宽的几倍？宽是长的几分之几？一个班级共有学生50人，其中少先队员有40人，少先队员是学生人数的几分之几？解放军行军，3小时走了21公里，平均每小时行多少公里？然后归纳出比的意义。

比可以是两个数的比，如3：5，也可以是具有相同性

质的用同一种计量单位度量的两个量(同类量)的比，如前钢板长和宽的比“5米：3米”就是同类量的比；也可以是具有不同性质的用不同的计量单位度量的两个量（不同类量）的比，如前面路程和时间的比“120公里：3小时”就是不同类量的比。

在同类量中，凡是求甲数量是乙数量的几倍或几分之几，不论这种倍数关系是整数还是分数，这个倍数大于1，还是小于1，都可以说是甲数量和乙数量的比。

两个同类量在单位相同的情况下，它们的大小将完全由它们的量数反映出来，因此，在这种情况下，能够把两个量的比转化为两个数的比。如果量的单位不同，可以相比，但是如果要转化成数的比，就必须统一这两个量的单位。如，

2小时15分：$2\frac{5}{8}$小时＝$2\frac{1}{4}$小时：$2\frac{5}{8}$小时＝$2\frac{1}{4}$：$2\frac{5}{8}$。

不同类的量，根据需要也可以相比，如汽车行驶的速度就是汽车所行驶的路程和所用时间的比。也就是说路程和时间这两个不同类量是可以相比的。但是这决不等于说任意两个不同类量都能相比。如4支铅笔和2条牛的比是毫无实际意义的，所以两个不同类量之比一定要考虑其是否具有实际意义。

关于比的意义，教师还应该注意：传统的小学数学教材，“比”理解为表示两个数或者两个同类量的倍数关系。强调了同类量才可相比。从上可知，这样对比的解释是狭义的。其实不同类量也是可以相比的。新教材给比下了恰切的定义：两个数相除，又叫做两个数的比。这显然比传统教材发展了。这样教学，既符合实际，又符合学生进一步学习数学、物理、化学等有关知识的要求。对学生的学习并不会带

来新的困难。所以教师要消除传统教材的影响，熟悉新教材，研究并掌握新的教法。

教学求比值时，应当让学生在明确比值意义的基础上熟练地掌握求比值的方法：（1）求两个数的比值时，就用比的前项除以比的后项，能除尽时，可直接写出得数，除不尽时可写成分数形式。（2）求两个同单位的同类量的比值，就是求这两个量的数的比值，求两个不同单位的同类量的比值时，要先化成同单位，再求出它的比值。（3）两个数或两个同类量的比值是一个不名数，两个不同类量比的结果是一个新量，它的单位则按引入新量的实际意义来确定。例如，距离（米）与时间（秒）的比值是速度(米/秒)；物体重量(克）与它的体积（立方厘米）的比值是比重（克/立方厘米）。

比和比值实质上是没有什么区别的，如$5:3=1\frac{2}{3}$，$5:3$和$1\frac{2}{3}$都是比。但是习惯上常把$5:3$叫做比，而把$1\frac{2}{3}$叫做比值。在小学阶段，为了使小学生易于接受，一般把含有前项(分子)，后项（分母）和比号（分数线）的比看作比，因此它可以写成$a:b$或$\frac{a}{b}$，一般不写成一个整数或小数。比值是比的前项除以后项所得的商，是一个数，这个数可以是整数、小数或分数。

§2 比的性质

根据比的意义，可以知道，比同除法比较，比的前项相当于被除数，后项相当于除数，比值相当于商；比同分数比较，比的前项相当于分子，后项相当于分母。比值相当于分数值。

比与分数、除法各部分之间的对应关系，可列成下表：

除　法	被除数	÷（除号）	除　数	商
分　数	分　子	——（分数线）	分　母	分数值
比	前　项	：（比号）	后　项	比　值

在除法里，若被除数与除数相等，则商为1；若被除数小于除数，则商小于1；若被除数大于除数，则商大于1。因此，就$a:b$来说，若$a=b$，则$a:b=1$；若$a<b$，则$a:b<1$；若$a>b$，则$a:b>1$。

在除法里，除数不能是零，所以比的后项也不能是零。至于球类比赛中经常出现的“1：0”、“3：0”等记录，仅是双方得分情况的表示形式，是不要求算比值的，它不属于本书中所提到的比，只是为了直观而借用了比的符号罢了，不能互相混淆。

我们知道，除法的基本性质，被除数和除数同时扩大或者同时缩小相同的倍数，商不变；分数的基本性质，分子和分母都乘以或者都除以相同的数（零除外），分数的大小不变。所以，根据比同除法和分数的关系，可以很容易得出比的基本性质：

比的前项和后项都乘以或者都除以相同的数（零除外）比值不变。用字母表示，即

$$a:b=am:bm,$$

$$a:b=\frac{a}{m}:\frac{b}{m}。\quad (m\neq 0)$$

利用比的性质，可以化简比，即把数字较大的比或把含

有分数或小数的比化成简单的整数比。如

（1） $135:45=(135\div45):(45\div45)=3:1$，

或 $135:45=\dfrac{135}{45}=\dfrac{3}{1}$；

（2） $\dfrac{1}{12}:\dfrac{1}{4}=\left(\dfrac{1}{12}\times12\right):\left(\dfrac{1}{4}\times12\right)=1:3$，

或 $\dfrac{1}{12}:\dfrac{1}{4}=\dfrac{\dfrac{1}{12}}{\dfrac{1}{4}}=\dfrac{4}{12}=\dfrac{1}{3}$；

（3） $0.6:1.26=60:126=10:21$，

或 $0.6:1.26=\dfrac{0.6}{1.26}=\dfrac{60}{126}=\dfrac{10}{21}$。

两个同类量的比，如果单位相同，可先转化为相应的量数的比，再按上述方法化简；如果单位不同，应先化成同单位，然后再按上述方法化简。如

0.7米：5厘米＝70厘米：5厘米＝$70:5=14:1$。

利用比的基本性质，还可以根据需要把比的前项化成是1的形式。如

$2:5=(2\div2):(5\div2)=1:2.5$。

根据 被除数＝除数×商，除数＝被除数÷商，还可以知道：**比的前项等于后项乘以它们的比值，比的后项等于前项除以它们的比值**。所以，如果已知比值和其中一项，可以确定另一项。

如，已知比的后项和比值，可以求出比的前项。

$$x : 1\frac{3}{7} = 3\frac{1}{2},$$

$$x = 1\frac{3}{7} \times 3\frac{1}{2},$$

$$x = 5。$$

又如，已知比的前项和比值，可以求出比的后项。

$$\frac{5}{6} : x = 2\frac{1}{2},$$

$$x = \frac{5}{6} \div 2\frac{1}{2},$$

$$x = \frac{1}{3}。$$

教学比的基本性质，可以在复习除法、分数基本性质后，根据上述比同除法、分数之间的关系表，启发学生自己得出，然后举例说明，如：$8 : 4 = 2$，若把它的前项和后项都扩大2倍，$8 : 4 = (8 \times 2) : (4 \times 2) = 16 : 8 = 2$；若都缩小2倍，$8 : 4 = (8 \div 2) : (4 \div 2) = 4 : 2 = 2$，比值不变。得出比的基本性质后，再可把比的基本性质同除法、分数的基本性质进一步对比，这样，学生易理解，易记忆。

化简比的教学，应该让学生明确，化简比的目的是更清楚地反映比的前、后项的数量关系，且便于计算。化简比的要求一般是要把比化成最简单的整数比，即比的前项和后项是互质数。化简比的理论依据是比的基本性质。

整数比的化简方法，是把比的前项和后项分别除以它们

的最大公约数；含有小数的比的化简方法，是把前项和后项的小数点向右移动相同的位数，使它们成整数比，如果前、后项不是互质数，再按整数比化简的方法进行化简；含有分数的比的化简方法，是把前项和后项同时乘以分母的最小公倍数，使它们成整数比，如果前、后项不是互质数，再按整数比化简的方法进行化简。根据比同分数的关系，上述化简比的方法，也可以统一成先把比写成分数形式，然后用约分或化简繁分数的方法进行化简。

化简比的方法应重点讲解化简整数比。因为含有小数的比和含有分数的比的化简，首先都要化成整数的比，然后再按整数比的化简方法进行化简。

另外，还应该注意，由于两个量的比通常是用经过化简了的整数比来表示的，所以如果已知甲量对乙量的比是$a:b$，原来甲的量数不一定是a，乙的量数也不一定是b，而往往是它们的m倍。例如，父亲45岁，儿子15岁，他们年龄的比是3：1，但不能说父亲是3岁，儿子是1岁。

求比值与化简比，学生容易混淆，教学时可通过实例对比。如

求比值　$8:10=8\div10=0.8\ \left(\frac{4}{5}\right)$，

化简比　$8:10=(8\div2):(10\div2)=4:5\ \left(\frac{4}{5}\right)$。

引导学生知道求比值的目的，是求出前项除以后项的结果，它是一种“运算”，它的结果是一个数（整数、小数或分数）。而化简比是把复杂的比化成最简整数比，它是一种“变形”，它的结果不能是一个整数或小数，仍是一个比。

开始教学时，为了把化简比与求比值区别开来，可以要求学生化简比时结果不写成分数形式，而要写成比的一般形式。

求比值和化简比除了要讲清它们之间的差别外，还应该指出它们之间的联系和互相利用的一面。

有时利用化简比可以较快地求出比值。如要求 $0.4:1.2$ 的比值，可先化简成 $0.4:1.2=4:12=1:3$，然后求出比值 $\frac{1}{3}$。

利用求比值来化简比有时亦较为简便。例如化简 $1\frac{2}{7}:\frac{3}{14}$ 可以这样进行：$1\frac{2}{7}:\frac{3}{14}=1\frac{2}{7}\div\frac{3}{14}=\frac{\overset{3}{\cancel{9}}}{\underset{1}{\cancel{7}}}\times\frac{\overset{2}{\cancel{14}}}{\underset{1}{\cancel{3}}}=\frac{6}{1}$，这比

$$1\frac{2}{7}:\frac{3}{14}=\frac{9}{7}:\frac{3}{14}=\left(\frac{9}{7}\times 14\right):\left(\frac{3}{14}\times 14\right)$$

$$=18:3$$

$$=(18\div 3):(3\div 3)=6:1,$$

或者 $$1\frac{2}{7}:\frac{3}{14}=\frac{1\frac{2}{7}}{\frac{3}{14}}=\frac{\frac{9}{7}}{\frac{3}{14}}$$

$$=\frac{126}{21}=\frac{6}{1},$$

均简便得多。

这一节讲完后，教师对分数、除法、比、比值等概念，还应该作进一步的比较，分析它们的共同点和不同点，使学生进一步了解这些概念的本质。**分数是一种数，分数线具有除号和括号的作用；除法是一种运算，是已知两个因数的积及其中一个因数，求另一个因数的方法，两数相除一般要算出它们的商，除号是表示两数相除的一种“运算符号”；而比是指两个数相除，是表示两个数之间的关系，不一定要算出它们的比值，比号是表示两个数或两个量相比的一种“关系符号”；比值是前项除以后项所得的商，因而也是一个数。**但是这几个概念都有着密切的联系。从形式上看，$\frac{a}{b}$既可以看作一个分数或比值，又可以看作是两个数相除或两个数的比。从内容上看，它们都含有两个数相除的意思。

§3 正比 反比 连比

如果**一个比的前项和后项分别是另一个比的后项和前项，那么这两个比互为反比**。如3∶5的反比是5∶3，反过来，5∶3的反比是3∶5，它们互为反比。对于反比来讲，原来的那个比就叫正比。反比也可以理解成原来的比的前、后两项的倒数之比，如对$a:b$来说，它的反比也可以理解成$\frac{1}{a}:\frac{1}{b}$，因为用ab去乘$\frac{1}{a}:\frac{1}{b}$即得$b:a$。正比和反比是各以对方为自己存在前提的，没有正比就无所谓反比，没有反比也无所谓正比(前项是0的比没有反比)。由于$a:b=\frac{a}{b}$，$b:a=\frac{b}{a}$，所以当两个比互为反比时，它们的比值就互

为倒数，如$4:2=2$而它的反比$2:4=\frac{1}{2}$。一个比同它的反比的乘积总等于1，如$(3:5)\times(5:3)=\frac{3}{5}\times\frac{5}{3}=1$。

学习正比、反比，一方面可以帮助学生进一步理解比的意义，避免弄错比的前项和后项；另一方面又为学习正比例、反比例打下基础。所以教师应该通过实例讲解，让学生理解正、反比的意义，还可以做一些有关这方面的练习。

如果第一个数与第二个数的比是$a:b$，第二个数与第三个数的比是$b:c$，第一个比的后项和第二个比的前项相同（都是b），那么这三个数的比也可以写成$a:b:c$，表示几个数连续相比。象这样$a:b:c$就叫做这三个数的连比。

一般而言，**由三个或三个以上的数组成的比，叫做连比**。如

一个长方体长是5厘米，宽是4厘米，高是3厘米，这个长方体长和宽的比为$5:4$，宽和高的比为$4:3$，（长和高的比是$5:3$），长、宽、高的连比是$5:4:3$。

连比中的各项都可以用同一个数去乘或除(零除外)，而它们的关系不变。即

$$a:b:c=(am):(bm):(cm),$$

或 $$a:b:c=\frac{a}{m}:\frac{b}{m}:\frac{c}{m}。\qquad m\neq 0$$

所以，如果连比中的各个数都不是互质数，可以用它们的最大公约数去除各个数，进行化简。如

$$15:10:5=\frac{15}{5}:\frac{10}{5}:\frac{5}{5}=3:2:1。$$

$$1:\frac{2}{3}:\frac{3}{4}=(1\times12):\left(\frac{2}{3}\times12\right):\left(\frac{3}{4}\times12\right)$$

$$=12:8:9。$$

如果第一个数和第二个数的比是4：3，第二个数和第三个数的比是2：5，由于第一个比的后项是3，第二个比的前项是2，它们不等，所以不能直接写成连比；要写成连比，就需要根据比的性质把第一个比的后项和第二个比的前项变成相同的数，这个相同的数一般要求是它们的最小公倍数（6）。根据比的基本性质，第一个比后项扩大2倍变成6，那么这个比的前项也要扩大2倍（4×2=8）比值才不变，第二个比的前项扩大3倍变成6，那么这个比的后项也要扩大3倍（5×3=15）比值才不变。这样就得

第一个数比第二个数　　8：6

第二个数比第三个数　　6：15

所以这三个数的连比是　8：6：15

求连比也可以用竖式

第一个数		第二个数		第三个数
4	：	3		（3）
（2）		2	：	5
4×2		3×2		3×5
8	：	6	：	15

在第一个比的后项“3”右边的空白处5的上面填上（3），在第二个比的前项“2”左边空白处4的下面填上（2），然后上下分别相乘，得出三个数的连比是8：6：15。这样做其实还是根据比的基本性质。如果得出的几个数中有