普通高等院校计算机类专业规划教材

离散数学

Discrete Mathematics

周淑云 主　编
姚志敏 魏文芬 周如旗 副主编

中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

普通高等院校计算机类专业规划教材

离散数学

周淑云　主　编
姚志敏　魏文芬　周如旗　副主编

中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

内 容 简 介

离散数学是现代数学的重要分支，是计算机科学理论的基础。

本书内容包括四部分：第一部分为数理逻辑，包括第 1 章命题逻辑、第 2 章谓词逻辑；第二部分为集合论，包括第 3 章集合、第 4 章二元关系和函数；第三部分为图论，包括第 5 章图简介、第 6 章特殊的图、第 7 章树；第四部分为代数系统，包括第 8 章代数系统简介、第 9 章几个典型的代数系统。

本书适合作为普通高等院校计算机类专业的教材，也可供计算机软件从业人员学习与参考。

图书在版编目(CIP)数据

离散数学/周淑云主编. —北京：中国铁道出版社，2018. 7
普通高等院校计算机类专业规划教材
ISBN 978-7-113-24610-5

Ⅰ. ①离… Ⅱ. ①周… Ⅲ. ①离散数学-高等学校-教材 Ⅳ. ①O158

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 138384 号

书　　名：离散数学
作　　者：周淑云　主编

策　　划：唐　旭　　　　**读者热线：**(010)63550836
责任编辑：唐　旭　徐盼欣
编辑助理：祝和谊
封面设计：郑春鹏
责任校对：张玉华
责任印制：郭向伟

出版发行：中国铁道出版社(100054，北京市西城区右安门西街 8 号)
网　　址：http://www.tdpress.com/51eds/
印　　刷：三河市宏盛印务有限公司
版　　次：2018 年 7 月第 1 版　2018 年 7 月第 1 次印刷
开　　本：787 mm×1 092 mm　1/16　印张：13　字数：305 千
书　　号：ISBN 978-7-113-24610-5
定　　价：36.00 元

前言

PREFACE

离散数学是现代数学的重要分支,是计算机科学理论的基础。为了保证本书的教学适用性,编者根据多年的教学实践和体会,在编写过程中力求凸显其构筑知识体系基础。

本书具有以下特点:

(1)简明扼要,深入浅出,语言准确,易于阅读。为了让学生理解和掌握离散数学的基本知识,书中涉及的基本概念和主要定理尽可能直观化、形象化,重视基本运算和基本能力的培养。

(2)例题、习题配置合理,难易适中,形式多样。每一章都配备了一定数量的习题,书后给出了大部分习题的参考答案,以便学生加深对基本概念的理解和对基本方法的掌握。

本书由周淑云任主编,姚志敏、魏文芬、周如旗任副主编。具体编写分工如下:周淑云编写第1~4章及习题;姚志敏、周如旗编写第5~7章,姚志敏绘制了第4~7章图、第9章部分图并编写了第5~7章习题;魏文芬、周淑云共同编写第8、9及习题。

廖金祥教授对本书做了认真细致的审阅,提出了许多宝贵的意见,在此表示衷心的感谢!

本书着重于基本概念和基本理论的论述和应用,适合作为普通高等院校计算机类专业教材,也可供计算机软件从业人员学习与参考。

由于编者水平有限,书中难免有不妥和疏漏之处,恳请专家、同行和读者批评指正。

编　　者

2018年4月

目　录
CONTENTS

绪言 ………………………………………………………… 1

第一部分　数 理 逻 辑

第 1 章　命题逻辑 ………………………………………… 4
1.1　命题与联结词 ………………………………………… 4
1.2　命题公式与类型 ……………………………………… 8
1.3　命题公式的等值式与蕴含式 ………………………… 10
1.4　对偶式与联结词全功能集 …………………………… 14
1.5　主范式 ………………………………………………… 16
1.6　命题逻辑的推理理论 ………………………………… 23
习题 1 …………………………………………………… 27

第 2 章　谓词逻辑 ………………………………………… 30
2.1　个体、谓词与量词 …………………………………… 30
2.2　谓词公式 ……………………………………………… 33
2.3　谓词逻辑的等值式与前束范式 ……………………… 37
2.4　谓词逻辑的推理理论 ………………………………… 40
习题 2 …………………………………………………… 43

第二部分　集　合　论

第 3 章　集合 ……………………………………………… 46
3.1　集合的基本概念 ……………………………………… 46
3.2　集合的基本运算 ……………………………………… 49
3.3　集合的运算性质 ……………………………………… 51
习题 3 …………………………………………………… 53

第 4 章　二元关系与函数 ………………………………… 56
4.1　笛卡儿积与二元关系 ………………………………… 56
4.2　关系的运算 …………………………………………… 60
4.3　关系的性质 …………………………………………… 65

4.4　关系的闭包运算 …… 70
4.5　等价关系和偏序关系 …… 73
4.6　函数的基本概念 …… 81
4.7　复合函数和反函数 …… 85
4.8　集合的基数 …… 88
习题 4 …… 93

第三部分　图　　论

第 5 章　图简介 …… 98
5.1　图的基本概念 …… 98
5.2　通路、回路和图的连通性 …… 104
5.3　图的矩阵表示 …… 107
5.4　最短路径、关键路径与着色 …… 110
习题 5 …… 115
第 6 章　特殊的图 …… 118
6.1　二部图 …… 118
6.2　欧拉图 …… 121
6.3　哈密顿图 …… 123
6.4　平面图 …… 125
习题 6 …… 131
第 7 章　树 …… 135
7.1　无向树及生成树 …… 135
7.2　根树及其应用 …… 138
习题 7 …… 144

第四部分　代 数 系 统

第 8 章　代数系统简介 …… 150
8.1　二元运算及其性质 …… 150
8.2　代数系统 …… 157
习题 8 …… 162
第 9 章　几个典型的代数系统 …… 163
9.1　半群与群 …… 163
9.2　环与域 …… 171
9.3　格与布尔代数 …… 173
习题 9 …… 183
习题参考答案 …… 185
参考文献 …… 201

绪　言

离散数学（Discrete Mathematical Structures）又称计算机数学，是现代数学的重要分支，是计算机专业课程中的核心基础课程之一．

离散数学以研究离散量的结构和相互之间的关系为主要目标，其研究对象一般为有限或可数个元素（如自然数、整数、真假值、有限个结点等），而离散性也是计算机科学的显著特点．

离散数学与计算机科学的其他课程有着密切的联系．它是数据结构、操作系统、编译原理、算法分析、逻辑设计、系统结构、容错技术、人工智能等课程的先导和基础课程．

离散数学各部分与计算机的关系如下：

（1）数理逻辑．计算机是数理逻辑和电子学相结合的产物．

（2）集合论．①集合：一种重要的数据结构；②关系：关系数据库的理论基础；③函数：所有计算机语言中不可缺少的一部分．

（3）图论．是数据结构、操作系统、编译原理、计算机网络原理的基础．

（4）代数系统．①计算机编码和纠错码理论；②数字逻辑设计基础；③计算机使用的各种运算．

第一部分

数理逻辑

逻辑学是研究人的思维形式及其规律的科学．由于研究的对象和方法各有侧重而又分为形式逻辑、辩证逻辑和数理逻辑．

数理逻辑是用数学方法来研究推理的形式结构和规律的学科，是研究推理中前提和结论之间的形式关系的科学．所谓推理，是由一个或几个判断推出一个新判断的思维形式．而数学方法是用一些数学符号来代表和描述思维形式的逻辑结构及其规律．因此，数理逻辑又称符号逻辑．

数理逻辑是由德国数学家莱布尼茨（G. W. Leibnitz）在 17 世纪中叶创立的．在这部分中将介绍命题逻辑和谓词逻辑．

第 1 章　命题逻辑

1.1　命题与联结词

命题逻辑以命题为基本单位，研究由前提条件推出结论的有效性．

1.1.1　命题的基本概念

在数理逻辑中，把能判断真假的陈述句称为**命题**．

命题的概念包含了以下三个要素：

（1）只有陈述句才有可能成为命题，而其他语句，如感叹句、祈使句、疑问句等都不是命题．

（2）有确定的真假．要么为真，要么为假，二者必居且只居其一．一个语句虽是陈述句，但不能判断真假则不是命题．

（3）虽然要求命题能判断真假，但不要求现在就能确定真假，将来可以确定真假的也是命题．

一个命题表达的判断结果称为**命题的真值**．命题的真值有“真”和“假”两种，分别用 1（或 True、T、真）和 0（或 False、F、假）来表示．真值为真的命题称为**真命题**，真值为假的命题称为**假命题**．任何命题的真值是唯一的．

【例 1.1】　判断以下语句是否为命题．若是命题，确定其真值．

（1）2 是素数．

（2）雪是黑色的．

（3）$2+4=6$.

（4）存在外星人．

（5）禁止吸烟！

（6）今天下午开会吗？

（7）多好的天气啊！

（8）北京是中国的首都．

（9）$x+y>5$.

(10)我正在说谎．

解　(1),(2),(3),(4),(8)都是命题,真值分别为1,0,1,真值待定,1.(5)是祈使句,不是命题．(6)是疑问句,不是命题．(7)是感叹句,不是命题．(9)不是命题,它没有确定的真假.(10)不是命题,它是悖论(由假推出真的陈述句).

例1.1中给出的五个命题都是简单的陈述句,不能分解成更简单的句子,称这样的命题为**简单命题**或**原子命题**．在命题逻辑中对这样的命题不再细分,因而其是数理逻辑中最基本的也是最小的研究单位．一般用小写英文字母或带下标的小写英文字母表示简单命题,称为命题符号化．

表示命题的小写英文字母或带下标的小写英文字母常称命题标识．真值确定的简单命题,称为**命题常项**或**命题常元**．真值变化的简单陈述句,称为**命题变项**或**命题变元**．命题变元是无确定的真值,真值是取值"1"或"0"的变量．

命题是能判断真假的陈述句．而命题变元其真值是不确定的,因而不是命题．

在自然语言中,可以通过"如果……,那么……""不但……,而且……"等联结词将简单的陈述句联结成复合语句,同样在命题逻辑的各种论述和推理当中,大多数命题也可以通过命题联结词将原子命题联结起来．

在命题逻辑中,由简单命题用联结词联结而成的命题,称为**复合命题**．命题符号化不仅对命题给以标识符,还要将自然语言中的联结词符号化．

1.1.2　命题联结词

常用的命题(或逻辑)联结词有五种:否定联结词、合取联结词、析取联结词、蕴涵联结词和等价联结词．

1. 否定联结词

定义1.1.1　设p为命题,复合命题"非p(或p的否定)"称为p的**否定式**,记作$\neg p$,读作"非p"或"p的否定".$\neg$为**否定联结词**.p为1当且仅当$\neg p$为0.

表　1.1

p	$\neg p$
0	1
1	0

p和$\neg p$的关系如表1.1所示．

否定联结词"$\neg$"也可以看作逻辑运算,它是一元运算．

【例1.2】　否定下列命题．

p:王强是一名大学生．

解　$\neg p$:王强不是一名大学生．

2. 合取联结词

定义1.1.2　设p和q均为命题,复合命题"p和q(p与q)"称为p与q的**合取式**,记作$p\wedge q$,读作"p与q"或"p合取q".$\wedge$为**合取联结词**.$p\wedge q$为1当且仅当p和q同时为1.

合取联结词"$\wedge$"的真值如表1.2所示．

合取联结词"$\wedge$"也可以看作逻辑运算,它是二元逻辑运算．

自然语言中的"既……又……""不但……而且……""虽然……但是……""一面……一面……"等联结词都可以符号化为$\wedge$. 另外,不要见到"与"或"和"就用合取联结词$\wedge$,如"小张和小王是同学"是简单命题,而非复合命题．

【例 1.3】 合取下列命题.

p:李平聪明.

q:李平用功.

解 $p\wedge q$:李平既聪明又用功.

3. 析取联结词

定义 1.1.3 设 p 和 q 均为命题,复合命题“p 或 q”称为 p 和 q 的**析取式**,记作 $p\vee q$,读作“p 或 q”或者“p 析取 q”. $\vee$ 为**析取联结词**. $p\vee q$ 为 0 当且仅当 p 和 q 同时为 0.

析取联结词“$\vee$”的真值如表 1.3 所示.

表 1.2

p	q	$p\wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

表 1.3

p	q	$p\vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

析取联结词“$\vee$”也可以看作逻辑运算,它是二元逻辑运算.

“$\vee$”与汉语中的“或”相似,但又不相同. 汉语中的“或”具有二义性:有相容或(可同时为真)与排斥或(不可兼或:不能同时为真). 析取式 $p\vee q$ 表示相容或(即允许 p 和 q 同时为真)与不能同时为真的排斥或. 如“小张学过英语或法语”是相容或,“小王现在在宿舍或在图书馆”是不能同时为真的排斥或,均可符号化为 $p\vee q$,但是“选小王或小李中的一人当班长”符号化为 $(p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q)$.

【例 1.4】 判断下列两个命题中的“或”哪个是相容或哪个是排斥或.

(1)在电视上看这场杂技或在剧场里看这场杂技.

(2)灯泡有故障或开关有故障.

解 (1) 排斥或.

(2) 相容或.

4. 蕴涵联结词

定义 1.1.4 设 p 和 q 均为命题,复合命题“如果 p,那么 q”称为 p 与 q 的**蕴涵式**,记作:$p\to q$,读作“如果 p,那么 q”或“若 p,则 q”. $\to$为**蕴涵联结词**. $p\to q$ 为 0 当且仅当 p 为 1 且 q 为 0. p 称为蕴涵式 $p\to q$ 的**前件**,q 称为蕴涵式 $p\to q$ 的**后件**.

表 1.4

p	q	$p\to q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

蕴涵联结词“$\to$”的真值如表 1.4 所示.

蕴涵联结词“$\to$”也可以看作逻辑运算,它是二元逻辑运算.

自然语言中的“只要 p 就 q”“因为 p 所以 q”“p 仅当 q”“只有 q 才 p”“除非 q 才 p”“除非 q 否则非 p”等均可符号化为 $p\to q$.

另外,自然语言中“若 p,则 q”的 p 与 q 往往具有某种内在联系,而在数理逻辑中,p 与 q

可以无任何内在联系．

数学中“若 p,则 q”表示前件 p 为真,后件 q 为真的推理关系,而数理逻辑中的蕴涵式 $p\rightarrow q$,当前件 p 为 0 时, $p\rightarrow q$ 为 1.

【例 1.5】 写出下列命题的蕴涵式.

p:小王努力学习．

q:小王学习成绩优秀．

解 $p\rightarrow q$:如果小王努力学习,那么他的学习成绩就优秀．

5. 等价联结词

定义 1.1.5 设 p 和 q 均为命题,复合命题“p 当且仅当 q”称为 p 与 q 的**等价式**,记作: $p\leftrightarrow q$,读作“p 等价 q”或者“p 当且仅当 q”. $\leftrightarrow$ 为**等价联结词**. $p\leftrightarrow q$ 为 1 当且仅当 p、q 的真值相同．

表 1.5

p	q	$p\leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

等价联结词“$\leftrightarrow$”的真值如表 1.5 所示．

等价联结词“$\leftrightarrow$”也可以看作逻辑运算,它是二元逻辑运算．

等价联结词表示的是一个充分必要关系,与前面所述相同,也可以不必顾及其前因后果,而只根据联结词的定义来确定其真值．

【例 1.6】 写出下列命题的等价式.

p:$2+2=4$.

q:3 是奇数．

解 $p\leftrightarrow q$: $2+2=4$ 当且仅当 3 是奇数．真值为 1.

以上定义了五种最基本、最常用、最重要的联结词,将它们组成一个集合$\{\neg,\wedge,\vee,\rightarrow,\leftrightarrow\}$,称为联结词集．将这个集合中的一个联结词联结一个或两个简单命题组成的复合命题称为基本复合命题．其真值如表 1.6 所示．

表 1.6

p	q	$\neg p$	$p\wedge q$	$p\vee q$	$p\rightarrow q$	$p\leftrightarrow q$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

多次使用这些联结词可以组成更复杂的复合命题．求复杂复合命题的真值时,除按以上真值表外,还要规定联结词的优先顺序．将括号也算在内,联结词的优先顺序为:( ), $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$,对于同一级的联结词,先出现者先运算．

【例 1.7】 设 p:广州比长沙人口多． q:$2+3=5$. r:乌鸦是白色的．求下列复合命题的真值.

(1) $(q\vee r)\rightarrow(p\rightarrow\neg r)$.

(2) $(\neg p\vee r)\leftrightarrow(p\wedge\neg r)$.

解 由已知,p,q,r 的真值分别为 1,1,0,所以

(1) $(q \vee r) \to (p \to \neg r) \Leftrightarrow (1 \vee 0) \to (1 \to \neg 0) \Leftrightarrow 1 \to 1 \Leftrightarrow 1$.

(2) $(\neg p \vee r) \leftrightarrow (p \wedge \neg r) \Leftrightarrow (\neg 1 \vee 0) \leftrightarrow (1 \wedge \neg 0) \Leftrightarrow 0$.

有了命题联结词,就可以用这些联结词将各种复合命题符号化.命题符号化可按如下步骤进行:

(1)找出复合命题中的简单命题.

(2)用小写英文字母或带下标的小写英文字母表示这些简单命题.

(3)使用命题联结词将这些小写英文字母或带下标的小写英文字母联结起来.

【例 1.8】 将下列命题符号化.

如果我上街,我就去书店看看,除非我很累.

解 令 p:我上街.q:我去书店看看.r:我很累.则符号化为 $\neg r \to (p \to q)$."除非"相当于"如果不",因此也可以符号化为 $(\neg r \wedge p) \to q$. 稍后会看到这两个表示是等值的.

1.2 命题公式与类型

1.2.1 命题公式

把命题常量、命题变量按照一定的逻辑顺序用命题联结词连接起来就构成了命题演算的命题公式.当使用联结词集 $\{\neg, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$ 时,命题公式定义如下:

定义 1.2.1 按下列规则构成的符号串称为命题演算的**命题公式**,也称为**合式公式**,简称**公式**.

(1)单个命题变元或常元及 0,1 是命题公式.

(2)如果 A 是命题公式,那么 $\neg A$ 是命题公式.

(3)如果 A 和 B 是命题公式,那么 $(A \wedge B)$,$(A \vee B)$,$(A \to B)$ 和 $(A \leftrightarrow B)$ 是命题公式.

(4)当且仅当有限次地应用了(1),(2),(3)所得到的符号串是命题公式.

命题公式一般用大写英文字母 $A,B,C,\cdots$ 表示.

依照这个定义,下列符号串是合式公式:

$$\neg(p \vee q), \neg(p \wedge q), (p \to (p \vee \neg q)), ((p \to q) \wedge (q \to r)) \leftrightarrow (s \leftrightarrow t).$$

下列符号串不是合式公式:

$$(p \to q) \to (\wedge q), (p \to q, (p \wedge q) \to q).$$

定义 1.2.1 给出合式公式定义的方法称为归纳定义,它包括三部分:基础、归纳和界限.定义 1.2.1 中的(1)是基础,(2)和(3)是归纳,(4)是界限.下文中还将多次出现这种形式的定义.

为了方便起见,对命题公式约定如下:

(1)最外层括号可以省略.

(2)规定联结词的优先级别由高到低依次为 $\neg, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow$. 按此优先级别,如果去掉括号,不改变原公式运算次序,也可以省略括号.

一般地,命题公式中包含命题变元,因而无法计算其真值,所以不是命题.

命题公式本身不是命题,只有对公式中的命题变元进行真值指派后才是命题.

1.2.2　命题公式的赋值与真值表

定义 1.2.2　设 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 是出现在公式 A 中的全部命题变元，给 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 各指定一个真值，称为对公式 A 的一个**赋值或解释**．若指定的一组赋值使公式 A 的真值为 1，则称这组赋值为公式 A 的**成真赋值**；若赋值使 A 的真值为 0，则称这组赋值为公式 A 的**成假赋值**．

例如，给公式 $(p \vee q) \to r$ 赋值 011 是指 $p=0, q=1, r=1$，它是该公式的成真赋值；赋值 110 是指 $p=1, q=1, r=0$，它是该公式的成假赋值．

含有 $n(n \geqslant 1)$ 个命题变元的命题公式共有 2^n 个不同的赋值．

定义 1.2.3　在命题公式 A 中，对 A 的每一个赋值就确定了 A 的一个真值，把它们列成表，称该表为命题公式 A 的**真值表**．

【例 1.9】　构造命题公式 $\neg p \vee q$ 的真值表，并求成真赋值和成假赋值．

解　命题公式 $\neg p \vee q$ 的真值表如表 1.7 所示．

表　1.7

p	q	$\neg p$	$\neg p \vee q$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	0	1

由表 1.7 知 00，01，11 是该公式的成真赋值，10 是成假赋值．

【例 1.10】　构造命题公式 $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$ 的真值表，并求成真赋值和成假赋值．

解　命题公式 $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$ 的真值表如表 1.8 所示．

表　1.8

p	q	$p \wedge q$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$	$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	0	1

由表 1.8 知 00，11 是成真赋值，01，10 是成假赋值．

【例 1.11】　构造命题公式 $(p \wedge \neg p) \leftrightarrow (q \wedge \neg q)$ 的真值表，并求成真赋值和成假赋值．

解　命题公式$(p \wedge \neg p) \leftrightarrow (q \wedge \neg q)$的真值表如表 1.9 所示．

表　1.9

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge \neg p$	$q \wedge \neg q$	$(p \wedge \neg p) \leftrightarrow (q \wedge \neg q)$
0	0	1	1	0	0	1
0	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	0	0	0	0	1

由表 1.9 知所有的赋值是成真赋值，无成假赋值．

【例 1.12】　构造命题公式 $\neg(p \to q) \wedge q$ 的真值表，并求成真赋值和成假赋值．

解　命题公式 $\neg(p \to q) \wedge q$ 的真值表如表 1.10 所示．

表 1.10

p	q	$p\to q$	$\neg(p\to q)$	$\neg(p\to q)\wedge q$
0	0	1	0	0
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
1	1	1	0	0

由表 1.10 知所有的赋值都是成假赋值,无成真赋值.

1.2.3　命题公式的类型

定义 1.2.4　设 A 是任一命题公式.

(1)若 A 在所有赋值下取值均为 1,则称公式 A 为**重言式或永真式**.

(2)若 A 在所有赋值下取值均为 0,则称公式 A 为**矛盾式或永假式**.

(3)若 A 不是矛盾式(即公式 A 至少存在一组成真赋值),则称公式 A 为**可满足式**.

由定义 1.2.4 可以看出,任何重言式都是可满足式,反之不然. A 为重言式当且仅当$\neg A$ 为矛盾式. A 为可满足式当且仅当 A 至少存在一个成真赋值.

显然,重言式真值表的最后一列全为 1,矛盾式真值表的最后一列全为 0,可满足式真值表的最后一列至少有一个为 1. 根据这个结论,可以借助于真值表判断一个公式是否为重言式、矛盾式或可满足式.

从以上例题可见,例 1.10 是可满足式,例 1.11 是重言式,例 1.12 是矛盾式.

1.3　命题公式的等值式与蕴含式

1.3.1　命题公式的等值式

定义 1.3.1　设 A 和 B 是两个命题公式,若对 A 和 B 的任一赋值,A 和 B 的真值都相同,即等价式 $A\leftrightarrow B$ 是重言式,则称 A 和 B 是**等值的或逻辑相等的**,记为 $A\Leftrightarrow B$.

注:(1)符号$\Leftrightarrow$不是命题联结词符,而是命题公式间的关系符号.

(2)$A\Leftrightarrow B$ 当且仅当 A 和 B 的真值都相同当且仅当 $A\leftrightarrow B$ 是重言式.

(3)A 是重言式当且仅当 $A\Leftrightarrow 1$;A 是矛盾式当且仅当 $A\Leftrightarrow 0$.

可以证明,命题公式等值有下面的三条性质:

(1)自反性,即对任意命题公式 A, $A\Leftrightarrow A$.

(2)对称性,即对任意命题公式 A 和 B,若 $A\Leftrightarrow B$,则 $B\Leftrightarrow A$.

(3)传递性,即对任意命题公式 A,B 和 C,若 $A\Leftrightarrow B$,$B\Leftrightarrow C$,则 $A\Leftrightarrow C$.

从而公式间的等值关系是等价关系.

根据定义 1.3.1,可以用真值表证明命题公式是等值的.

【例 1.13】　证明:$p\to(q\to p)\Leftrightarrow\neg p\to(p\to\neg q)$.

证明　构造$p\to(q\to p)$和$\neg p\to(p\to\neg q)$的真值表,如表1.11所示.$p\to(q\to p)$和$\neg p\to(p\to\neg q)$所在的列完全相同,它们具有相同的真值表,所以$p\to(q\to p)\Leftrightarrow\neg p\to(p\to\neg q)$.

表 1.11

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$q \to p$	$p \to (q \to p)$	$p \to \neg q$	$\neg p \to (p \to \neg q)$
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	0	1

利用真值表可以证明一些简单而又经常使用的等值式，称为**基本等值式**．下面是常用的基本等值式，A,B,C 表示任意的命题公式．

(1) **双重否定律**：$A \Leftrightarrow \neg\neg A$.

(2) **交换律**：$A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$，　$A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$.

(3) **结合律**：$(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$，

$(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$.

(4) **分配律**：$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$，

$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$.

(5) **德·摩根律**：$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$，

$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$.

(6) **幂等律**：$A \wedge A \Leftrightarrow A$,$A \vee A \Leftrightarrow A$.

(7) **吸收律**：$A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A$，$A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$.

(8) **零律**：$A \vee 1 \Leftrightarrow 1$,$A \wedge 0 \Leftrightarrow 0$.

(9) **同一律**：$A \vee 0 \Leftrightarrow A$，$A \wedge 1 \Leftrightarrow A$.

(10) **排中律**：$A \vee \neg A \Leftrightarrow 1$.

(11) **矛盾律**：$A \wedge \neg A \Leftrightarrow 0$.

(12) **蕴涵等值式**：$A \to B \Leftrightarrow \neg A \vee B$.

(13) **等价等值式**：$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \to B) \wedge (B \to A) \Leftrightarrow (\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)$

$\Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$.

(14) **假言易位**：$A \to B \Leftrightarrow \neg B \to \neg A$.

(15) **等价否定等值式**：$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow \neg A \leftrightarrow \neg B$.

(16) **归谬论**：$(A \to B) \wedge (A \to \neg B) \Leftrightarrow \neg A$.

以上 16 组等值式，都可以用真值表证明．下面仅验证德·摩根律．

【例 1.14】　证明德·摩根律 $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$.

证明　表 1.12 是 $\neg(A \vee B)$ 和 $\neg A \wedge \neg B$ 的真值表，从表中可以看出德·摩根律成立．

根据已知的等值式，推演出与给定公式等值的公式的过程叫做**等值演算**．在进行等值演算时，还要利用置换规则进行公式之间的演算．

如果 X 是命题公式 A 的一部分，X 本身也是命题公式，则称 X 为公式 A 的子公式．

例如，$A \Leftrightarrow q \to (p \vee (p \wedge q))$，$X \Leftrightarrow p \wedge q$，则 X 是 A 的子公式．

定理 1.3.1(置换规则)　设 X 是命题公式 A 的子公式，若 $X \Leftrightarrow Y$，如果将 A 中的 X 用 Y 来置换，得到的公式记为 B，则 B 与 A 是等值的，即 $A \Leftrightarrow B$.

满足此定理的置换叫做等值置换．