高等代数考研

——高频真题分类精解300例

◎ 陈现平　张彬　编

ADVANCED ALGEBRA

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

高等代数考研——高频真题分类精解300例

陈现平　张　彬　编

机 械 工 业 出 版 社

高等代数是数学专业考研的必考课程，本书是作者在积累了多年为数学专业本科生进行高等代数考研辅导的经验的基础上编写而成的。全书共9章，包括行列式、线性方程组、矩阵、多项式、二次型、线性空间、线性变换、λ-矩阵、欧氏空间等内容。

书中对很多高校近年的高等代数考研高频真题进行了分类解析，使得读者能够举一反三，熟悉考试中经常出现的题型，并且掌握每种题型的解法。同时对很多真题给出了多种解法，有利于开阔学生的视野与解题思路。

本书具有真题丰富、分类精解、解法多样的特点，非常适合作为研究生入学考试复习用书，也适合用作高等代数教学参考书。

图书在版编目（CIP）数据

高等代数考研：高频真题分类精解 300 例 / 陈现平，张彬编．— 北京：机械工业出版社，2018.8

ISBN 978-7-111-59906-7

Ⅰ．①高… Ⅱ．①陈… ②张… Ⅲ．①高等代数 – 研究生 – 入学考试 – 题解 Ⅳ．① O15-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2018）第 094066 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037）

策划编辑：汤 嘉 责任编辑：汤 嘉 张金奎

责任校对：王 延 封面设计：张 静

责任印制：李 昂

北京宝昌彩色印刷有限公司印刷

2018 年 7 月第 1 版第 1 次印刷

184mm × 260mm · 20.5 印张 · 397 千字

标准书号：ISBN 978-7-111-59906-7

定价：49.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务	网络服务
服务咨询热线：010-88379833	机工官网：www.cmpbook.com
读者购书热线：010-88379649	机工官博：weibo.com/cmp1952
	教育服务网：www.cmpedu.com
封面无防伪标均为盗版	金书网：www.golden-book.com

前　　言

高等代数是数学专业学生的一门重要的专业基础课，也是各高校数学类专业研究生入学考试必考的科目之一。

本书的两位编者多年来一直从事高等代数教学与高等代数考研辅导工作，为了使学生深入理解高等代数的内容，掌握处理问题的方法与技巧，提高分析问题与解决问题的能力，我们精选了国内 100 多所高校多年的研究生入学考试高等代数试题，并对题目进行了分类整理与解答研究，总结了高等代数解题的基本方法，在此基础上编写了本书。

本书有以下特点：

一、题量大，大约有 900 道题目，并且绝大部分都是各高校往年的考研真题。

二、题目按照类型或者方法归类，按照先易后难的顺序排列，同一类的题目只选解典型例题, 起到抛砖引玉的作用, 使得学生易于理解，并且容易举一反三，提高解题能力。

三、很多题目给出了多种解法，有助于学生对题目有更深入的理解，开阔解题思路。

四、提供问题解答网站 http://www.52gd.org(高等代数资源网), 可免费提供问题解答。

特别感谢王利广老师对本书的出版给予了大力支持和帮助，同时感谢机械工业出版社各位编辑的工作。由于编者水平有限，不妥之处在所难免，恳请读者指出、批评、赐教，如有任何问题，可以发邮件至：chxp123456789@163.com 或 zhangb2015@mail.qfnu.edu.cn。

编者

目　　录

第 1 章　行列式

1.1　行列式的计算方法

对于数字行列式的计算, 可以先观察规律, 若无规律, 一般是先选定某一行 (列), 再利用行列式的性质, 将其中的元素尽可能地化为 0, 然后按这一行 (列) 展开, 如此继续下去, 即可得结果.

对于以字母为元素的行列式计算, 首先弄清行列式中元素的结构, 找出规律, 再充分利用行列式的性质, 化为三角形行列式或利用降阶法找出递推公式.

计算行列式有如下口诀: **认清元素, 分析结构, 先看特殊, 再想一般, 熟用性质, 必要展开.**

1.1.1　降阶法

降阶法就是利用行列式的性质、Laplace 定理、行列式降阶定理降低行列式的阶数, 然后计算.

例 1.1.1　计算 n 阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} \lambda & a & a & \cdots & a \\ b & \alpha & \beta & \cdots & \beta \\ b & \beta & \alpha & \cdots & \beta \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & \beta & \beta & \cdots & \alpha \end{vmatrix}$.

解　(法 1) 将 D_n 的最后一行乘以 -1 加到第 i 行 $(i = 2, 3, \cdots, n-1)$, 得

$$D_n = \begin{vmatrix} \lambda & a & a & \cdots & a & a \\ 0 & \alpha-\beta & 0 & \cdots & 0 & \beta-\alpha \\ 0 & 0 & \alpha-\beta & \cdots & 0 & \beta-\alpha \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha-\beta & \beta-\alpha \\ b & \beta & \beta & \cdots & \beta & \alpha \end{vmatrix},$$

再将第 i 列 $(i=2,3,\cdots,n-1)$ 全加到第 n 列，得

$$D_n=\begin{vmatrix}\lambda & a & a & \cdots & a & (n-1)a\\ 0 & \alpha-\beta & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha-\beta & 0\\ b & \beta & \beta & \cdots & \beta & \alpha+(n-2)\beta\end{vmatrix},$$

再按第一列展开得

$$D_n=(\alpha-\beta)^{n-2}[\lambda\alpha+(n-2)\lambda\beta-(n-1)ab].$$

(法 2) 将 D_n 按照第一列拆成两个行列式的和，得

$$D_n=\begin{vmatrix}a+(\lambda-a) & a+0 & a+0 & \cdots & a+0\\ b & \alpha & \beta & \cdots & \beta\\ b & \beta & \alpha & \cdots & \beta\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ b & \beta & \beta & \cdots & \alpha\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a & a & a & \cdots & a\\ b & \alpha & \beta & \cdots & \beta\\ b & \beta & \alpha & \cdots & \beta\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ b & \beta & \beta & \cdots & \alpha\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\lambda-a & 0 & 0 & \cdots & 0\\ b & \alpha & \beta & \cdots & \beta\\ b & \beta & \alpha & \cdots & \beta\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ b & \beta & \beta & \cdots & \alpha\end{vmatrix}$$

$$=a\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ b & \alpha & \beta & \cdots & \beta\\ b & \beta & \alpha & \cdots & \beta\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ b & \beta & \beta & \cdots & \alpha\end{vmatrix}+(\lambda-a)\begin{vmatrix}\alpha & \beta & \cdots & \beta\\ \beta & \alpha & \cdots & \beta\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \beta & \beta & \cdots & \alpha\end{vmatrix}$$

$$=a\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ b-\beta & \alpha-\beta & 0 & \cdots & 0\\ b-\beta & 0 & \alpha-\beta & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ b-\beta & 0 & 0 & \cdots & \alpha-\beta\end{vmatrix}+(\lambda-a)[\alpha+(n-2)\beta](\alpha-\beta)^{n-2}.$$

当 $\alpha\neq\beta$ 时，第 $2,3,\cdots,n$ 列乘以 $-\dfrac{b-\beta}{\alpha-\beta}$，则

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ b-\beta & \alpha-\beta & 0 & \cdots & 0\\ b-\beta & 0 & \alpha-\beta & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ b-\beta & 0 & 0 & \cdots & \alpha-\beta\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1-\frac{(n-1)(b-\beta)}{\alpha-\beta} & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & \alpha-\beta & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \alpha-\beta & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha-\beta\end{vmatrix}$$

$$=(\alpha-\beta)^{n-1}-(n-1)(b-\beta)(\alpha-\beta)^{n-2}.$$

于是

$$\begin{aligned}D_n&=a[(\alpha-\beta)^{n-1}-(n-1)(b-\beta)(\alpha-\beta)^{n-2}]+(\lambda-a)[\alpha+(n-2)\beta](\alpha-\beta)^{n-2}\\ &=(\alpha-\beta)^{n-2}[\lambda\alpha+(n-2)\lambda\beta-(n-1)ab].\end{aligned}$$

当 $\alpha=\beta$ 时, 由原行列式知 $D_n=0$, 上面的结果也成立. 因此,

$$D_n=(\alpha-\beta)^{n-2}[\lambda\alpha+(n-2)\lambda\beta-(n-1)ab].$$

例 1.1.2 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}.$$

解 (法 1) 将 D_n 按第一列展开可得递推关系式

$$D_n=xD_{n-1}+a_n,$$

由此可得

$$\begin{aligned} D_n&=xD_{n-1}+a_n \\ &=x(xD_{n-2}+a_{n-1})+a_n \\ &=x^2D_{n-2}+a_{n-1}x+a_n \\ &=\cdots \\ &=x^{n-1}D_1+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n. \end{aligned}$$

由于 $D_1=x+a_1$, 故

$$D_n=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n.$$

(法 2) 从最后一列开始, 每一列乘以 x 加到前一列可得

$$D_n=\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & b_2 & x+a_1 \end{vmatrix},$$

其中

$$b_2=x^2+a_1x+a_2,\cdots,b_{n-1}=x^{n-1}+a_1x^{n-2}+a_2x^{n-3}+\cdots+a_{n-1},$$

$$b_n=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n.$$

再按第一列展开可得

$$D_n=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n.$$

(法 3) 将 D_n 按最后一行展开可得

$$D_n = a_n + a_{n-1}x + \cdots + a_2x^{n-2} + a_1x^{n-1} + x^n.$$

(法 4) 当 $x=0$ 时,$D_n = a_n$. 当 $x \neq 0$ 时, 令

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ \vdots \\ a_2 \end{pmatrix}, d = a_1 + x.$$

则 $|\boldsymbol{A}| = x^{n-1} \neq 0$, 且

$$D_n = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} & d \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}|(d - \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n.$$

例 1.1.3　(重庆工学院,2009) 设 $f(x)$ 是一个整系数多项式, 且

$$f(x) = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ 3 & 3^2 & 3^3 & \cdots & 3^{n-1} & 3^n + x \end{vmatrix},$$

其中 $n \geqslant 2$. 证明:$f(x)$ 在有理数域上不可约.

1.1.2　加边法

加边法 (也称为升阶法) 是指在原行列式的基础上增加多行多列, 通常增加一行一列, 但新的行列式更易计算.

例 1.1.4　计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} x_1 & y & \cdots & y \\ y & x_2 & \cdots & y \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y & y & \cdots & x_n \end{vmatrix},$$

其中 $x_i - y \neq 0, i = 1, 2, \cdots, n$.

解

$$D=\begin{vmatrix}1&y&y&\cdots&y\\0&x_1&y&\cdots&y\\0&y&x_2&\cdots&y\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&y&y&\cdots&x_n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&y&y&\cdots&y\\-1&x_1-y&0&\cdots&0\\-1&0&x_2-y&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\-1&0&0&\cdots&x_n-y\end{vmatrix}$$

$$=(x_1-y)\cdots(x_n-y)\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{y}{x_i-y}\right).$$

例 1.1.5 计算行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\a_1^2&a_2^2&a_3^2&\cdots&a_n^2\\a_1^3&a_2^3&a_3^3&\cdots&a_n^3\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a_1^n&a_2^n&a_3^n&\cdots&a_n^n\end{vmatrix}.$$

解 在 D_n 中加上一行一列, 得

$$D=\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1&1\\a_1&a_2&a_3&\cdots&a_n&x\\a_1^2&a_2^2&a_3^2&\cdots&a_n^2&x^2\\a_1^3&a_2^3&a_3^3&\cdots&a_n^3&x^3\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\a_1^n&a_2^n&a_3^n&\cdots&a_n^n&x^n\end{vmatrix}=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)\prod_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n}(a_i-a_j),$$

将 D 按最后一列展开

$$D=1A_{1(n+1)}+x(-1)^{2+(n+1)}D_n+x^2A_{3(n+1)}+\cdots+x^nA_{(n+1)(n+1)},$$

比较上两式中 x 的系数可得

$$D_n=(a_2a_3\cdots a_n+a_1a_3\cdots a_n+\cdots+a_1a_2\cdots a_{n-1})\prod_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n}(a_i-a_j).$$

1.1.3 递推法

递推法是将 n 阶行列式 D_n 用 D_{n-1} 或更低阶的行列式表示出来, 然后求出 D_n.

例 1.1.6 (江苏大学,2004; 西南师范大学,2004) 计算行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}x&a&a&\cdots&a\\-a&x&a&\cdots&a\\-a&-a&x&\cdots&a\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\-a&-a&-a&\cdots&x\end{vmatrix}.$$

解　将 D_n 按第一列拆成两个行列式的和, 得

$$D_n = \begin{vmatrix} x-a+a & 0+a & 0+a & \cdots & 0+a \\ -a & x & a & \cdots & a \\ -a & -a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a & -a & -a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x-a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a & x & a & \cdots & a \\ -a & -a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a & -a & -a & \cdots & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & a & a & \cdots & a \\ -a & x & a & \cdots & a \\ -a & -a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a & -a & -a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$= (x-a)D_{n-1} + a(x+a)^{n-1}.$$

由于 a 与 $-a$ 的地位是对称的, 可得

$$D_n = (x+a)D_{n-1} - a(x-a)^{n-1}.$$

当 $a \neq 0$ 时, 由上两式可得 $D_n = \frac{1}{2}[(x+a)^n + (x-a)^n]$, 当 $a=0$ 时,$D_n = x^n$. 因此, 不论 a 为何值, 都有

$$D_n = \frac{1}{2}[(x+a)^n + (x-a)^n].$$

例 1.1.7　计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & & \\ 1 & \alpha+\beta & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \alpha\beta \\ & & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}.$$

解　将 D_n 按第一列展开得

$$D_n = (\alpha+\beta)D_{n-1} - \alpha\beta D_{n-2}.$$

于是

$$D_n - \alpha D_{n-1} = \beta(D_{n-1} - \alpha D_{n-2}),$$

若令 $Z_n = D_n - \alpha D_{n-1}$, 则

$$Z_n = \beta Z_{n-1},$$

由此有

$$Z_n = \beta Z_{n-1} = \beta(\beta Z_{n-2}) = \beta^2 Z_{n-2} = \cdots = \beta^{n-2} Z_2,$$

由于 $Z_2 = D_2 - \alpha D_1 = (\alpha+\beta)^2 - \alpha\beta - \alpha(\alpha+\beta) = \beta^2$, 故 $Z_n = \beta^n$, 从而

$$D_n = \alpha D_{n-1} + \beta^n.$$

注意到 α 与 β 的对称性, 可得

$$D_n=\beta D_{n-1}+\alpha^n.$$

(1) 若 $\alpha\neq\beta$, 可得

$$D_n=\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}.$$

(2) 若 $\alpha=\beta$, 则

$$\begin{aligned}D_n&=\alpha D_{n-1}+\alpha^n=\alpha(\alpha D_{n-2}+\alpha^{n-1})+\alpha^n\\&=\alpha^2D_{n-2}+2\alpha^n=\cdots=\alpha^{n-1}D_1+(n-1)\alpha^n\\&=(n+1)\alpha^n.\end{aligned}$$

故

$$D_n=\begin{cases}\dfrac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}, & \alpha\neq\beta,\\(n+1)\alpha^n, & \alpha=\beta.\end{cases}$$

例 1.1.8 (河北大学,2014) 计算 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix}2a & a^2 & & \\ 1 & 2a & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & a^2\\ & & 1 & 2a\end{vmatrix}.$$

例 1.1.9 (湖北大学,2006) 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}2 & 1 & & \\ 1 & 2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1\\ & & 1 & 2\end{vmatrix}.$$

1.1.4 利用已知行列式

利用范德蒙德行列式等的结论计算.

例 1.1.10 (湖北大学,2000) 设

$$V=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 1 & 2 & \cdots & 19 & 20\\ 1 & 2^2 & \cdots & 19^2 & 20^2\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 1 & 2^{19} & \cdots & 19^{19} & 20^{19}\end{vmatrix},$$

(1) 求 V 写成阶乘形式的值;(2)V 的值的末尾有多少个零.

解　(1) 易知

$$\begin{aligned} V &= [(2-1)(3-1)\cdots(20-1)][(3-2)(4-2)\cdots(20-2)]\cdots[(20-19)] \\ &= (19!)(18!)(17!)\cdots(2!). \end{aligned}$$

(2) 由于 $(19!)(18!)(17!)\cdots(2!)$ 中有 15 个 5,5 个 15,10 个 10, 从而 V 的值的末尾有 $5+15+10=30$ 个零.

例 1.1.11　(福州大学,2006; 河北工业大学,2006; 北京交通大学,2007) 已知行列式

$$P(x)=\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \cdots & x^{n-1} \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \cdots & a_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix},$$

其中 $a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}$ 为互不相同的数. 证明:$P(x)$ 是一个 $n-1$ 次多项式, 并求其最高次项的系数和 $P(x)$ 的根.

例 1.1.12　(聊城大学,2015) 设 $a_i\neq 0(i=1,2,\cdots,n+1)$. 计算 $n+1$ 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_1^n & a_1^{n-1}b_1 & \cdots & a_1b_1^{n-1} & b_1^n \\ a_2^n & a_2^{n-1}b_2 & \cdots & a_2b_2^{n-1} & b_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n+1}^n & a_{n+1}^{n-1}b_{n+1} & \cdots & a_{n+1}b_{n+1}^{n-1} & b_{n+1}^n \end{vmatrix}.$$

解　将 D 的每一行除以 $a_i^n(1,2,\cdots,n)$, 然后即可应用范德蒙德行列式计算.

1.1.5　数学归纳法

例 1.1.13　计算行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} x^2+1 & x & & \\ x & x^2+1 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & x \\ & & x & x^2+1 \end{vmatrix}.$$

解　(法 1) 由于 $D_1=1+x^2, D_2=1+x^2+x^4$, 猜想

$$D_n=1+x^2+\cdots+x^{2n}.$$

下面用数学归纳法证明.

当 $n=1,2$ 时, 结论成立.

假设结论对阶数小于 n 的行列式成立. 下证对阶数为 n 的行列式结论也成立.

将 D_n 按第一列展开, 有

$$\begin{aligned} D_n &= (x^2+1)D_{n-1} - x^2 D_{n-2} = x^2(D_{n-1} - D_{n-2}) + D_{n-1} \\ &= x^2 x^{2(n-1)} + [1 + x^2 + \cdots + x^{2(n-1)}] \\ &= 1 + x^2 + \cdots + x^{2n}. \end{aligned}$$

所以结论成立.

(法 2) 若 $x=0$, 则 $D_n = 1$. 若 $x \neq 0$, 每一行除以 x, 则有

$$D_n = x^n \begin{vmatrix} x+\frac{1}{x} & 1 & & \\ 1 & x+\frac{1}{x} & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & 1 & x+\frac{1}{x} \end{vmatrix},$$

利用例1.1.7计算结果即可.

1.2 行列式的计算公式

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{F}^{n\times n}, k \in \mathbb{F}$, 则

(1) 一般情况下,$|\boldsymbol{A} \pm \boldsymbol{B}| \neq |\boldsymbol{A}| \pm |\boldsymbol{B}|$;

(2)$|k\boldsymbol{A}| = k^n|\boldsymbol{A}|$;

(3)$|\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|; |\boldsymbol{A}^k| = |\boldsymbol{A}|^k$;

(4)$|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}| = |\boldsymbol{A}|$;

(5)$\boldsymbol{A}$ 可逆的充要条件是 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$;

(6) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则 $|\boldsymbol{A}^{-1}| = |\boldsymbol{A}|^{-1}$;

(7)$|\boldsymbol{A}^*| = |\boldsymbol{A}|^{n-1}$;

(8) 初等矩阵的行列式: $|P(i,j)| = -1, |P(i(c))| = c, |P(i,j(k))| = 1$;

(9) 分块矩阵的行列式

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{D} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|;$$

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_{n\times n} \\ \boldsymbol{B}_{m\times m} & \boldsymbol{0} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{C} & \boldsymbol{A}_{n\times n} \\ \boldsymbol{B}_{m\times m} & \boldsymbol{0} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_{n\times n} \\ \boldsymbol{B}_{m\times m} & \boldsymbol{D} \end{vmatrix} = (-1)^{mn}|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|;$$

例 1.2.1 设 $\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}$ 为 $m+n$ 阶方阵, 其中 $\boldsymbol{A}$ 为 m 阶可逆方阵, 证明:

$$\det\boldsymbol{M} = \det\boldsymbol{A}\det(\boldsymbol{D} - \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}).$$

证 由于

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_m & \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{E}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{D} - \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} \end{pmatrix},$$