孟艳双　曲庆国◎著

应用型人才培养模式下数学建模活动的理论与实践研究

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

应用型人才培养模式下数学建模活动的理论与实践研究

孟艳双　曲庆国　著

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn
·北　京·

内 容 提 要

数学建模活动是用数学知识和方法解决实际问题，近年来随着现代科学技术的发展，它已经被广泛应用于众多学科与行业中。本书是在作者多年从事数学建模教学和科研工作的基础上写成的，着重介绍应用型人才培养模式下的数学建模活动，其中着重介绍所蕴含的思想及解决问题的基本方法，突出科学的思维方式，加强应用。同时，为提高学生应用数学知识解决实际问题的能力，书中列举了数学建模在解决实际问题中的典型应用实例。本书主要包括数学建模的内涵、特点，数学建模活动的意义及存在的问题，并进行教学策略研究和活动平台的构建研究。

本书内容全面、详略得当，例题丰富，可读性、应用性强，可供高等学校各专业的学生及对数学建模感兴趣的教师和科研人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

应用型人才培养模式下数学建模活动的理论与实践研究 / 孟艳双，曲庆国著. -- 北京 : 中国水利水电出版社，2018.5
ISBN 978-7-5170-6379-7

Ⅰ. ①应… Ⅱ. ①孟… ②曲… Ⅲ. ①数学模型—教学研究—高等学校 Ⅳ. ①O141.4

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第063802号

书　　名	应用型人才培养模式下数学建模活动的理论与实践研究 YINGYONGXING RENCAI PEIYANG MOSHI XIA SHUXUE JIANMO HUODONG DE LILUN YU SHIJIAN YANJIU
作　　者	孟艳双　曲庆国　著
出版发行	中国水利水电出版社 （北京市海淀区玉渊潭南路 1 号 D 座　100038） 网址：www.waterpub.com.cn E-mail：sales@waterpub.com.cn 电话：（010）68367658（营销中心）
经　　售	北京科水图书销售中心（零售） 电话：（010）88383994、63202643、68545874 全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排　　版	北京智博尚书文化传媒有限公司
印　　刷	三河市佳星印装有限公司
规　　格	170mm×240mm　16 开本　16.5 印张　280 千字
版　　次	2018 年 5 月第 1 版　2018 年 5 月第 1 次印刷
印　　数	0001—2000 册
定　　价	79.00 元

前　　言

数学建模是利用数学工具解决实际问题的主要手段，是联系数学与实际问题的桥梁。数学建模在应用型人才培养模式下的重要作用越来越受到普遍重视，并成为现代科学技术工作者必备的重要能力之一。

大学中开展数学建模活动的目的是提高学生解决实际问题的能力，完全符合应用型人才培养模式的培养目标。数学建模能力包括养成对实际问题积极思考的习惯，发现问题的敏锐性，熟练使用计算机的技能和培养集体合作的团队精神，理论联系实际解决问题，并用文字清楚表达自己的思想，提高撰写科研论文的能力，在应用型人才培养模式下所有这些对提高学生的综合素质都是很有帮助的。故此，我们在总结多年从事数学建模活动理论教学和实践研究的基础上完成了本书。为使读者全面地了解数学建模活动，本书注重数学建模知识和特点的全面详述，常用方法和典型实例的介绍，及进行教学策略实施和教学平台构建的研究。

在本书的写作过程中，参阅了大量国内外同类教材和文献，受到不少启发和教益，谨向有关作者表示诚挚的谢意！同时，山东交通学院教务处、理学院的有关领导及同仁对本书的编写给予了热情的支持和指导，在此一并致谢。

由于作者水平所限，加之时间仓促，书中难免有疏漏或者不妥之处，恳请专家及同行批评指正。

孟艳双　曲庆国

2018 年 1 月

目　录

第一章　数学建模活动的内涵与发展

人类伟大的导师马克思曾说过：“所有的科学，只有当数学运用其中时，才称得上是完美的。”著名数学家华罗庚也曾说过：“宇宙之大，粒子之微，火箭之速，化工之巧，地球之变，生物之谜，日用之繁，无处不用数学。”随着科学技术的发展，数学在工程技术、自然科学、经济、生物、医学、环境、地质、人口、交通等各个领域都有着更广泛的应用。尤其是计算机技术的迅速发展，数学建模的应用范围更是几乎覆盖了所有的学科分支，渗透到各项领域中，成为解决各领域实际问题的重要工具。社会对数学人才的需求除了需要数学家和专门从事数学研究的人才外，更急需的是善于运用数学知识及数学的思维方法来解决大量的实际问题，从而获取经济效益和社会效益的人才。所以以人才培养为主要任务的高校，其教育模式也不应仅仅是应试教育、专业教育，更应该是素质教育，重视培养学生自主意识、效率意识、竞争意识、创新意识和民主意识，即高校教育应重视培养大学生的创新能力、实践能力和创业精神，普遍提高大学生的综合素质。

数学建模是指通过对实际问题的抽象、简化、确定变量和参数，并应用某些规律建立起变量、参数间的确定的数学问题，求解该数学问题，解释、验证所得到的解，从而确定能否用于解决实际问题。从这个定义中可以看出，数学建模既是一种创造性活动，也是一种解决现实问题的量化手段。作为一种创造性活动，它要求建模者具备敏锐的洞察力、良好的想象力以及灵感和顿悟，较强的抽象思维和创新意识；作为一种量化手段，它需要建模者具备较强的知识应用能力和实践能力，因而开展大学生数学建模教学和实践不仅可以加强知识积累，更重要的是能提高大学生的科学素养和综合素质。

第一节　数学建模的内涵

一、原型

所谓原型是指人们关心、研究或者从事（工作、学习、生产，管理等）的现实世界的实际对象。既包括有形的对象，也包括无形的、思维中的对象。在学习、生产、科技等领域中通常使用系统、过程等词汇描述原型，如学习系统、教学系统、方法系统、生命系统、生态系统、机械系统、电力系统、社会经济系统等；又如学习过程、教学过程、生产销售过程、计划决策过程、钢铁冶炼过程、导弹飞行过程、化学反应过程、人口增长过程、污染扩散过程等，这些现实对象、研究对象等均为原型。

二、模型

模型是一种结构，是为某一特定目的，在分析研究实际问题的结构特征基础上构造的整个原型或其部分或其某一方面的替代物，是对原型信息的简化、提炼；是对原型的形象化或模拟与抽象；是对原型的某一（或某些）方面的简化与近似反映。建构“模型”是人们用以认识世界的重要手段之一。人们经常使用模型的思想来认识世界和改造世界。在现实生活中，人们总是自觉或不自觉地用各种各样的模型来描述一些事物或现象。地图、地球仪、玩具火车、建筑模型、昆虫标本、恐龙化石、照片等都可以看作模型，它们都从某一方面反映了原型的特征或属性。模型应具有三个基本特性：① 模型应是对客观事物有关属性的模拟或抽象。模型与原型在特性、结构或功能行为等方面具有某种相似关系。模型由那些与原型有关的部分或因素构成，在认识过程中是能够被当作客体原型的替代物以便于进行研究。② 模型必须具有所研究系统的基本特征或要素。一个较好的模型，应该在所关心的方面体现出真实对象的主要特征，否则就没有什么意义。③ 模型应包括决定其原因和效果的各个要素之间

的相互关系。依据模型，人们可以在模型内实际处理一个系统的所有要素，并观察它们的效果。模型表明这些有关部分或因素之间的关系，通过模型进行模拟实验，能够得到关于原型的一些信息。只有具备了这三个相互联系、相互制约的特性，模型才能作为认识的特殊手段发挥其作用。

由上述对模型特性的分析可以认为，原型和模型是一对具有密切联系的对偶体。模型来源于原型，但并不是对原型简单的模仿，由原型到模型要经过对原型的简化并加上一些人为的假设。因此，模型通常不是原型原封不动的复制品，或者说模型与原型之间不是一个同构对应，而只能是某一（或某些）方面的近似反映。它是人们为了认识和理解原型而对它所作的抽象、升华。通过对模型的分析、研究，加深对原型的理解和认识。原型有各个方面和各种层次的特征，而模型只要求反映与某种目的有关的那些方面和层次。模型是根据特定的目的，从现实对象中选一部分所关心的特征或属性进行描述，其他方面的特征或属性将不予以考虑（对于其他的一些特征或属性，实际原型与模型甚至可以相差很远）。为了不同的目的，一个原型可以有许多不同的模型。模型的基本特征是由构造模型的目的决定的。模型所反映的内容将因其使用的目的不同而不同。

三、数学模型

数学模型存在广义和狭义两种解释。按广义的解释，一切数学概念、数学理论体系、各种数学公式、各种方程式以及由公式构成的算法系统等都可称为数学模型。数、几何图形、函数、导数、积分、向量、集合、群、环、域、范畴、线性空间、拓扑空间、数学物理方程以及广义相对论、规范场等都是非常成功的数学模型。按照这种观点，整个数学就是一门关于数学模型的科学。这种解释太宽泛以至于数学模型在数学中失去了特定的意义。按狭义的解释，简单地说：数学模型就是系统的某种特征的本质的数学表达式（或是用数学术语对部分现实世界的描述），即用数学式子（如函数、图形、代数方程、微分方程、积分方程、差分方程等）来描述（表述、模拟）所研究的客观对象或系统在某一方面的存在规律。数学模型就是为了特定目的，针对或参照某种事物系

统的主要特征或主要关系，用形式化的数学语言，概括地或近似地表述出来的一种数学结构。只有那些反映特定问题或特定的具体事物系统的数学结构才是数学模型。这里的数学结构有两个方面的具体要求：① 这种结构是一种纯关系结构，即必须是经过数学抽象扬弃了一切与事物无本质联系的属性后的系统的结构；② 这种结构是用数学概念和数学符号来表述的，它借助于数学符号、公式、图表等刻画客观事物的本质属性与内在规律，是系统的某种特征本质的数学表达式。一般对数学模型作狭义的理解。

数学模型是通过抽象和简化，使用数学语言对客观事物的某些属性与内在特征的一个近似的刻画，是对现实对象的信息通过提炼、分析、归纳、升华的结果。通过数学上的演绎推理和分析求解，人们能够深化对所研究的实际问题的认识，数学模型是人们用以认识现实系统和解决实际问题的工具。数学模型应具有如下几个特性：① 抽象性。数学模型是为了实现某种目的，舍弃现实原型中的非本质属性，弱化次要因素，使本质要素形式化，从而对原型作出简化而进行本质性的刻画。因此数学模型比原型具有抽象性，这种抽象通常显示出概括性特征，使同一个数学模型可以运用于不同的实际情景。② 准确性和演绎性。数学模型是用数学语言表述的数学结构，因此克服了自然语言含糊不清、叙述过繁、容易产生歧义等不足，实际问题中的各种关系及问题结构得到了比较精确的表述。同时，数学语言的严密性、简捷性为运用数学知识与方法进行演绎推理提供了可能，而通过数学的演绎推理可使对实际问题解决的思维、层次与效率大大提高；③ 预测性。建立数学模型的目的是为了解决实际问题，数学模型的研究结果要能够经得起实际问题的检验，与实际结果相符或近似相符（不超过人们所期望的范围），或为实际问题的解决提供可行、有效的方案。具有这样预测性的数学模型才有生命力，否则，必将被舍弃或修正。数学模型不是原型的复制品。数学模型与原型之间同样不是一个同构对应，而是为一定的目的对原型所作的一种抽象模拟。它用数学式子、数学符号、程序、图表等刻画客观事物的本质属性与内在联系，是对现实世界的抽象、简化而又本质的描述。它源于现实，又高于现实。它或者能解释事物的各种性态，预测其将来的性态；或者能为控制某一事物的发展提供优化策略等，这些都是

为了最终达到解决实际问题的目的。

四、数学建模

数学对于科学技术和社会发展的重要性是众所周知、不言而喻的。用数学方法解决科技和生产等领域的实际问题，或将数学与其他学科相结合形成交叉学科，首要和关键的一步是建立研究对象的数学模型，并计算求解。也就是说，当需要从定量的角度分析和研究一个实际问题时，人们就要在深入调查研究、充分了解对象信息、做出简化假设、分析内在规律等工作的基础上，用数学的符号和语言，把它表述为数学形式，也就是数学模型。然后，对数学模型进行分析、计算，用得到的结果来解释实际问题，并接受实际的检验。这个建立数学模型并解决问题的全过程称为数学建模。

数学建模将问题解决分成“建模”“识模”“用模”三个阶段，如图 1-1 所示。“建模”阶段的思想就是实际问题的抽象与转化，从数学角度出发，对所需研究的问题作一个模拟，利用各种技巧、技能以及分析、综合等认知手段，舍去无关因素，保留本质因素，形成某种数学结构；“识模”阶段是充分利用数学思想方法对模型进行分析、验证、修正，并反馈到现实问题中；“用模”阶段重视知识的同化与迁移，将模型应用到更为广泛的实际问题中，进一步深化对问题和模型的认知和应用。

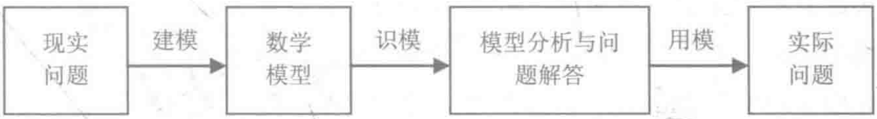

图 1-1　数学建模三个阶段

数学建模就是通过对现实问题的抽象、简化，确定变量和参数，并应用某些“规律”建立起变量、参数间的确定的数学问题；然后求解该数学问题，最后在现实问题中解释、验证所得到的解的创造过程。数学建模过程可用图 1-2 来表明。

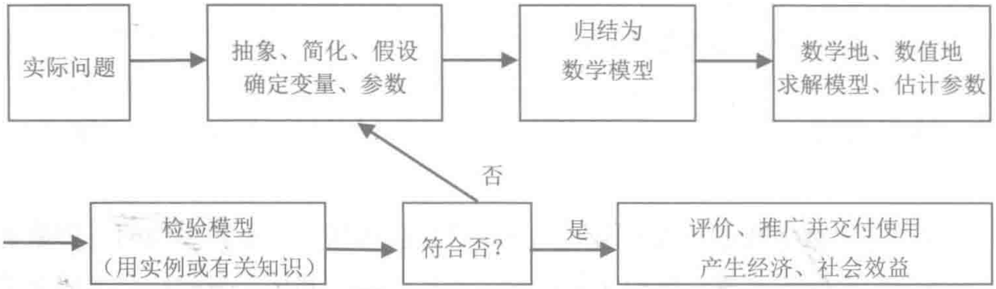

图 1-2　数学建模的基本过程流程

与纯数学不同，构建数学模型的过程不仅要进行演绎推理，而且要对复杂的现实进行总结、归纳和提炼。这是一个归纳总结与演绎推理相结合的过程。数学建模的关键是通过对现实问题的观察、归纳、假设，将其转化为一个数学问题。但这只是完成了数学建模的第一步，完整的数学建模过程还需求解数学问题并得到所求的解。还要看所获得的解能否解释实际问题，是否与实际经验或数据相吻合。若吻合，即结束数学建模过程；否则，还需修正假设并重新提出经修正的数学模型，直至满意为止。数学建模活动是一个多次循环反复验证的过程，是应用数学的语言和方法解决实际问题的过程，是一个创造性工作和培养创新能力的过程。

数学建模的过程就是把错综复杂的实际问题简化，通过研究实际对象的固有特征和内在规律，抓住问题的主要矛盾，建立起反映实际问题的数量关系，抽象为合理的数学结构，然后利用数学的理论和方法分析和解决问题的过程。从现实世界和数学领域的角度，数学建模的一般过程大致可分为现实问题数学化、模型求解、数学模型解答、现实问题解答验证四个阶段，这四个阶段实际上是完成从现实问题到数学模型，再从数学模型回到现实问题的不断循环、不断完善的过程，如图 1-3 所示。

数学化：指根据建模的目的和掌握的信息（如数据、信息），将实际问题抽象为数学问题，即将实际问题“翻译”成数学模型。

求解：指选择适当的数学方法求得数学模型的解答。

解释：指把数学语言表述的解答“翻译”回现实对象，给出实际问题的解答。

验证：指用现实对象的信息检验得到的解答，以确认结果的正确性。

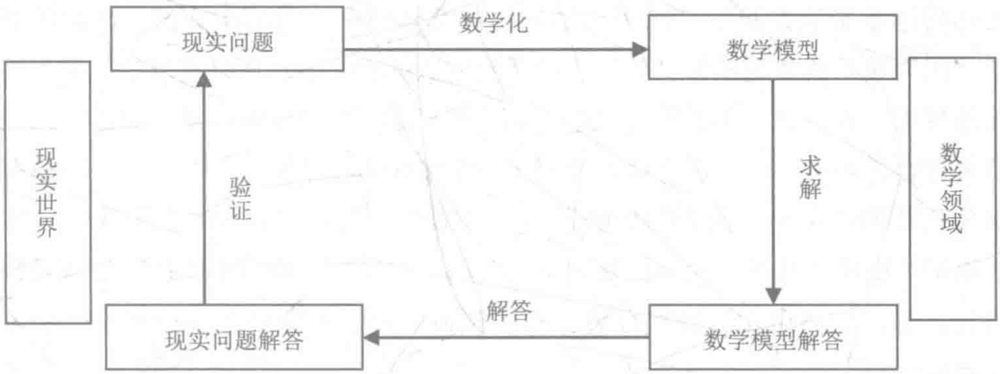

图 1-3 建立数学模型的一般过程

图 1-3 揭示了现实对象和数学模型的关系，数学模型是联系实际问题与数学知识之间的一个桥梁；数学模型是将现实对象的信息加以翻译、归纳的产物，它源于现实，又高于现实，因为它用精确的语言表述了对象的内在特性。数学模型经过求解、演绎，得出数学上的解答，再经过翻译回到现实对象，给出分析、预报、决策，控制的结果。最后，这些结果必须经受实际的检验，完成实践—理论—实践这一循环。如果检验结果正确或基本正确，就可以用来指导实际。否则应重复上述过程或者修正模型。

数学模型和数学建模是两个不同的概念，它们的侧重点不同，数学模型注重结果，数学建模注重过程。一个好的数学建模过程应能体现如下几个特点：① 对给的问题有个全面的思考，一个实际问题往往受多个因素的影响，所以要综合考虑各种因素，必要时可以适当地忽略个别因素；② 创造性地改造原有模型或自己创新的模型，一篇优秀的论文主要看它有无创新，是否在论文中有自己独到的见解，在正式比赛过程中，很难在短短的三天时间内自己创造一种新的方法，往往是在已有模型上进行创新改进；③ 擅长在简单和复杂、准确和普适等相反特征间取得调和，如果简单考虑问题，过程、结果自然比较明了，但体现不出问题的本质。相反，如果把所有因素都考虑在内，不分主次，最终把问题复杂化，做不出合理的结果，同样体现不出问题的本质。因此要挖掘问题的本质，在相反的极端之间加以权衡；④ 重视对数学模型结果的分析，针对具体问题要从实际意义出发，考虑结果的合理性，数学建模把数学和

实际问题紧密联系起来，应用数学来解决实际问题，再用实际问题来检验数学。因为数学模型是根据实际问题中所给的数据建立的，所以模型的结果和实际越接近，说明建立的模型越合理。⑤ 善于检验数学模型。建立的数学模型是否符合客观实际，是否合理，要通过多个实际问题来检验。一个完美的模型事先估计的结果不会因为初始数据或参数的细微变化而发生很大的变化，因此模型的敏感性和稳定性分析是非常重要的。在运筹学模型中，比如排队系统的设计等，应该用实际数据或者计算机模拟的办法来验证模型的有效性和可行性。

五、数学建模思想

在数学建模过程中体现出的一系列重要意识称为数学建模思想，本质上是要培养学生灵活运用数学知识解决实际问题的能力，是一种非常重要的思想，它主要包括创新意识、应用意识、实践意识、转化意识、简化意识、模型化意识等。

创新意识：就是在解决问题的过程中追求知识创新、方法创新、结果创新、应用创新，开拓新领域，解决新问题的意识。对于未曾遇到过的问题，要善于创新，敢于创新。创新需要扎实的基础、灵活的运用和推陈出新的理念。

应用意识：就是学以致用的意识，即将数学知识、数学方法应用于解决实际问题的意识。学习知识的目的是为了应用，有些时候还常常是综合运用。一位美国科学院院士认为“数学是一种关键的、普遍的、可以应用的技术”。

实践意识：就是理论联系实际的意识。数学建模是理论联系实际的桥梁，它使得数学知识在工程上、生活中得到实际应用。数学知识来源于对实际问题的研究与思考，数学理论上的结果正确与否需要实践检验。理论与实际脱节会造成“数学无用”的假象。

转化意识：也称“翻译”意识，即将实际问题转化为数学问题的意识和将模型结果返回到实际中分析解释实际问题的意识。特别强调的是将生活中的描述性语言“翻译”成数学语言、将现实问题转化为数学问题的意识。

简化意识：就是对复杂问题作简化处理的意识。简化是数学的核心思想，

是建立数学模型的关键。某些实际问题可能涉及诸多因素，需要“抓主要舍次要”，对复杂的问题作简化处理。数学建模过程中的简化假设体现的就是简化的意识。

模型化意识：就是将问题符号化、模型化的意识。将具体情况下的问题推广到一般情形，使之符号化、模型化，通过建立数学模型并求解，得出一般性的结论，更具有普遍性意义。

六、数学建模思想的教育功能

（1）创新精神的培养功能。数学建模思想的关键是把实际问题抽象为数学模型，这就要求学生具有一定的转化和创造能力，而且要有相当的观察、分析、类比等各种综合能力。它给学生提供了一个自我学习、独立思考、认真探索的实践过程；它给学生带来了灵活的思维方式，开拓学习的视野，鼓励学生深层次思考问题，为学生提供了一个发挥创造性才能的氛围和条件。因此，数学建模思想注重学生勇于突破传统的思维模式，自主探究问题的本质。让知识的学习过程变成一个有指导的再创造过程，从而促使学生的创新意识得以激发，创新思维得以锻炼，创新的自信心、意志力都得以提高。

（2）学习兴趣的提高功能。数学是一门比较抽象的学科，在教学中若能充分体现数学建模思想，引导学生从大量的现实背景中抽象出数学模型（概念、定理、法则），然后加以分析、验证，再把数学模型应用到实际问题中，将教学过程看作师生进行建模、识模、用模的过程，可使学生充分感受数学的美妙神奇，体验经过努力发现规律、解决问题后的成就感和乐趣，体现高等数学的实际应用价值，从而可使枯燥的数学知识变得具体可感，既增强了学生的新奇感，激发了学生的求知欲，又能培养学习兴趣，形成数学教与学的良性循环。

（3）理性精神的提升功能。数学的理性精神表现为一种信念，是对真理的追求。数学建模思想以知识建构和知识应用为载体，注重科学的态度和合理的方法，在分析问题的过程中需要对问题进行细致观察和严密思考。这可使学

生产生对数学的好奇心、自信心与求知欲，促成学生对数学的严谨性与数学结论的确定性的理解，形成冷静、客观、公正的思维方式，养成实事求是的态度以及进行质疑和独立思考的习惯。

（4）数学品质的铸造功能。数学建模思想的运用实际上是发现问题和创造性地运用数学知识解决问题的一个系统过程，在提高学生数学品质方面有着特别重要的作用。许多实际问题往往不是数学化的，这就需要一定的洞察能力和想象力；把经过一定抽象和简化的实际问题用数学的语言表达出来形成数学模型，需要一定的数学语言翻译能力和总结概括能力；灵活、创造性地用已学到的数学思想和方法进行综合应用和分析，创建一些新的理论、技术和算法去解决问题，需要一定的综合分析能力；对学习中碰到的困难能以积极的态度和科学的思维方法去克服，需要一定的学习毅力。

（5）学习方式的优化功能。数学建模思想符合知识建构理论，崇尚探究式的学习方式。当前，大学生的学习方式仍处于课堂被动接受的形式，学生不理解所涉及的概念、法则和定理，只记住问题的类型和操作符号指示的程序。数学建模思想影响下的学习方式应该是有教师指导，学生自主探究，将数学对象作为一个数学模型，经历建模、识模、用模的过程，逐步养成推敲概念、紧扣条件、理解记忆、灵活应用的良好习惯，使他们严密的逻辑思维能力以及准确表达问题的能力得到提高。同时它强调以学生为主体对数学对象进行精炼、抽象、深化、迁移等活动，注重对知识的理解和掌握，重视思想方法的提炼和形成，使数学对象在建构中理解，在理解中应用，在应用中内化，从而使知识学习生动化、系统化。

（6）教学改革的促进功能。加强数学建模思想的教学势必要求教师转变传统教学中重结论轻过程、重知识轻方法、重形式轻实质的观念，树立以学生为主体，构建探究学习环境的教学理念；势必要求教师按照教学目标和要求进一步更新教学方法和教学手段，认真挖掘教学内容，使学生不仅掌握数学知识内涵，而且学会“用数学”；势必要求教师对数学教育改革和数学方法论的积极学习，深入研究和实践，进而提高自身数学教学和科研水平。因此，加强数学建模思想的教学必然对学生素质的提高和数学教学改革产生积极的意义。

七、数学建模的一般方法和步骤

建立数学模型的方法和步骤并没有一定的模式，但一个理想的模型应能反映系统的全部重要特征，并能体现模型的可靠性和模型的使用性。

1. 数学建模的一般方法

（1）机理分析方法：根据对现实对象特性的认识，分析其因果关系，找出反映内部机理的规律，所建立的模型常有明确的物理或现实意义。

（2）测试分析方法：将研究对象视为一个“黑箱”系统，内部机理无法直接寻求，通过测量系统的输入输出数据，并以此为基础运用统计分析方法，按照事先确定的准则在某一类模型中选出一个数据拟合得最好的模型。

将这两种方法结合起来使用，即用机理分析方法建立模型的结构，用系统测试分析方法来确定模型的参数，也是常用的建模方法。

2. 数学建模的步骤

应用数学知识去解决各类实际问题时，建立数学模型是十分关键的一步，同时也是十分困难的一步。建立教学模型的过程，需要通过调查、收集数据资料，观察和研究实际对象的固有特征和内在规律，抓住问题的主要矛盾，建立起反映实际问题的数量关系，然后利用数学的理论和方法去分折和解决问题。完成这个过程，需要有深厚扎实的数学基础、敏锐的洞察力和大胆的想象力，以及对实际问题的浓厚兴趣和广博的知识面。一个合理、完善的数学建模步骤是建立一个好的数学模型的基本保证，数学建模讲究灵活多样，所以数学建模步骤也不能强求一致。下面介绍的一种“八步建模法”，是在大学数学建模教学中总结出的一套比较细致全面的建模步骤，具体包括以下八个步骤。

➘ 提出问题

能创造性地提出问题已顺利解决问题的一半，也是成功解决问题的关键一步。很多问题没有得到很好的解决，其原因是问题没有提好。这一步骤的关键在于明确建模目的和要建立的模型类型，即从问题的情景以及可获得的可信数