

特殊杂交应力有限元 与三维应力集中

田永淑 著

 科学出版社

特殊杂交应力有限元 与三维应力集中

田宗湫 著



科学出版社

北京

内 容 简 介

本书系统介绍作者及其研究团队 30 多年来所建立的一系列具有优良性质的新型特殊多场变量有限元。这些元以其精度高、计算量少、既适用于各向同性材料也适用于各向异性材料、可方便快捷地分析多种复杂边界条件下多类槽孔的三维应力等突出优点,反映了有限元学科在解决应力集中等问题的前沿性进展,引起国内外学者的关注。

这些特殊元不仅为一直难以解决的多类槽孔三维应力集中及多类曲面附近的三维应力分析,提供了新的计算方法;也为目前难以破解的槽孔层板破坏机理,展示了新的探讨途径。

作者建立的单元程序及麻省理工学院(MIT)的 FEABL 程序(及其扼要说明)(见附录 C)可从 www.sciencep.com 下载,读者可直接用它们求解多类槽孔及曲面附近的三维应力分布。同时,也可以通过当前通用程序所开窗口,将这些杂交应力元的单元程序与位移元通用程序连接,进行求解。

本书可供工程力学与计算力学专业师生,航空、航天、船舶、机械、土木、水利等专业工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

特殊杂交应力有限元与三维应力集中 / 田宗漱著. —北京:科学出版社, 2018.4

ISBN 978-7-03-056987-5

I. ①特… II. ①田… III. ①结构力学 IV. ①O342

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 051679 号

责任编辑:余 丁 陈 静 / 责任校对:郭瑞芝

责任印制:张克忠 / 封面设计:迷底书装

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

艺堂印刷(天津)有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2018 年 4 月第 一 版 开本:787×1092 1/16

2018 年 4 月第一次印刷 印张:17 1/2

字数:700 000

定价:128.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

前 言

正确地分析槽孔构件(尤其是层合构件)在承载下的三维应力集中,以及准确地确定曲面附近的三维应力分布,是确保工程构件安全工作的重要课题之一。

研究表明:槽孔边附近局部区域,应力梯度快速变化,呈现复杂的三维应力状态,用传统的复变函数或光弹试验方法分析,能力有限;而用一般假定位移有限元求解,收敛很慢,就是用高阶多项式作为插值函数的高精度元,亦无助于事。正因为此类问题的复杂性,近一个世纪其研究方法的研究,进展缓慢。

本书作者及其研究团队,利用美国麻省理工学院卞学鑽(Pian T H H)教授创立的多场变量杂交应力有限元方法,开辟了解决此问题的新途径,先后创立了 31 种新颖、高效的特殊三维杂交应力有限元,它们不仅可以十分简便地进行各向同性及各向异性材料槽孔构件的三维应力集中计算,也可以十分准确地分析多类曲面构件的三维应力分布。

书中系统论述了这些特殊元建立的基础理论及计算实例,这将有助于科研工作者进一步探讨构件应力集中造成的破坏机理;同时也提供了典型单元刚度矩阵的程序,工程技术人员可将其与现有通用库程序直接连接,方便快捷地计算工程实际中所遇到的、以前又难以解决的多类槽孔的三维(及二维)应力集中。

本书反映了有限元学科在解决应力集中等问题前沿性的新突破,是一部系统性强、理论联系实际且具有创见性的学术专著。同时也从一个侧面反映了我们在高等有限元这门新兴科学基础理论及扩展应用方面所取得的成果。

书中多年研究工作曾得到国家自然科学基金的资助,中国科学院大学对本书出版也给予支持,在此一并致谢!

作者热忱欢迎同行和读者对本书批评指正。

田宗湫

2016 年 2 月于北京博雅西园

目 录

前言

第 1 章 小位移变形弹性理论基本方程	1
1.1 应力、应变、位移、体积力、表面力	1
1.2 应变能和余能	2
1.2.1 应变能密度	2
1.2.2 余能密度	3
1.3 小位移变形弹性理论基本方程	3
1.3.1 平衡方程(力学方程)	3
1.3.2 应变位移方程(几何方程)	4
1.3.3 应力应变关系(物理方程或本构方程)	6
1.3.4 边界条件	11
1.4 散度定理	12
1.5 小结	13
参考文献	14
第 2 章 小位移变形弹性理论最小余能经典变分原理 Π_C 及 Hellinger - Reissner 广义变分原理 Π_{HR}	15
2.1 最小余能原理	15
2.1.1 最小余能原理 Π_C 及泛函约束条件	15
2.1.2 最小余能原理的证明	16
2.1.3 最小余能原理的注意事项	18
2.2 Hellinger-Reissner 变分原理	19
2.2.1 小位移变形弹性理论的广义变分原理	19
2.2.2 Hellinger-Reissner 广义变分原理 Π_{HR}	20
2.2.3 Hellinger-Reissner 广义变分原理注意事项	23
2.3 弹性理论变分原理与数学变分原理	23
2.3.1 数学变分命题	24
2.3.2 弹性理论的变分问题	24
2.4 小结	24
参考文献	25
第 3 章 根据修正的余能原理 Π_{mc} 及 Hellinger-Reissner 原理 Π_{HR} 建立的有限元模式	26
3.1 修正的余能原理及早期杂交应力元 I	26
3.1.1 最小余能原理	26

3.1.2	修正的余能原理	27
3.1.3	早期杂交应力元 I	29
3.2	由 Hellinger-Reissner 原理建立的早期杂交应力元 II	32
3.2.1	变分泛函	32
3.2.2	有限元列式	33
3.2.3	注意事项	34
3.3	两种早期杂交应力元小结	37
3.3.1	两种早期杂交应力元	37
3.3.2	假定应力杂交模式小结	37
3.4	扫除附加运动变形模式(扫除多余零能模式)	38
3.4.1	附加运动变形模式	38
3.4.2	扫除附加运动变形模式	39
3.4.3	选择单元应力场扫除零能模式的方法及实例	41
3.4.4	单元稳定所需最小应力参数的意见	42
3.5	小结	43
	参考文献	43
第 4 章	根据修正的余能原理 Π_{mc} 及 Hellinger-Reissner 原理 Π_{HR}, 建立一个给定无外力圆柱表面的特殊杂交应力元及其应用 (I)	45
4.1	具有一个无外力圆柱表面特殊三维杂交应力元	45
4.1.1	单元假定应力场的建立	46
4.1.2	单元位移场及单刚计算	51
4.1.3	单元坐标系转换	53
4.1.4	根据 Π_{HR} (或 Π_{mc}) 建立的具有一个无外力圆柱表面杂交应力元	54
4.2	应用具有一个无外力圆柱表面杂交应力元对具有圆柱形槽孔构件进行受力分析	55
4.2.1	计算实例	55
4.2.2	具有一个给定无外力圆柱表面杂交应力元计算小结	71
4.3	各结点具有转动自由度的 4 结点特殊杂交应力膜元	72
4.3.1	具有一个无外力圆弧边并含 4 个结点转动自由度的杂交应力元	72
4.3.2	用第一类具有转动自由度的特殊元对槽孔构件进行受力分析	76
4.4	各结点具有转动自由度的三维 8 结点特殊杂交应力元	82
4.4.1	各结点具有转动自由度三维 8 结点特殊杂交应力元的建立	82
4.4.2	用第二类具有转动自由度的特殊元对槽孔构件进行受力分析	87
4.4.3	各结点带转动自由度的特殊元与各结点无转动自由度的特殊元对比	90
	参考文献	90
第 5 章	根据修正的余能原理 Π_{mc} 及 Hellinger-Reissner 原理 Π_{HR}, 建立一个给定无外力直表面的特殊杂交应力元及其应用 (II)	94
5.1	具有一个无外力直表面的三维杂交应力元	94

5.1.1 单元位移场 u	94
5.1.2 单元假定应力场 σ	94
5.2 具有一个无外力圆柱表面及一个无外力直表面两种元联合进行槽孔构件 受力分析	97
5.3 小结	116
参考文献	119
第 6 章 修正的 Hellinger-Reissner 原理 Π_{mR}，根据修正的 Hellinger-Reissner 原理 建立的特殊杂交应力元及其应用	123
6.1 修正的 Hellinger-Reissner 原理	123
6.1.1 Hellinger-Reissner 原理的离散形式	123
6.1.2 修正的 Hellinger-Reissner 原理(一) Π_{mR_1}	124
6.2 修正的 Hellinger-Reissner 原理(二)及修正的 Hellinger-Reissner 原理(三)	126
6.2.1 修正的 Hellinger-Reissner 原理(二) Π_{mR_2}	127
6.2.2 修正的 Hellinger-Reissner 原理(三) Π_{mR_3}	127
6.3 修正的 Hellinger-Reissner 原理及所建立的杂交应力元	128
6.3.1 修正的 Hellinger-Reissner 变分原理 Π_{mR}	128
6.3.2 有限元列式	129
6.3.3 这种有限元列式讨论	130
6.4 非协调杂交应力元理性列式(I)——平衡法	130
6.4.1 非协调杂交应力元理性列式(I)	131
6.4.2 用理性列式 I ——平衡法建立杂交应力元的特点	132
6.5 理性列式(I)——平衡法建立特殊杂交应力元及其应用	133
6.5.1 具有一个无外力圆柱表面三维 10 结点特殊杂交应力元	133
6.5.2 工程实例	136
6.6 非协调杂交应力元理性列式(II)——表面虚功法	139
6.6.1 建立应力约束方程及单元刚度阵	139
6.6.2 非协调杂交应力元理性列式说明	142
6.7 理性列式(II)——表面虚功法建立特殊杂交应力元及其应用	142
6.7.1 具有一个无外力斜表面的三维 12 结点特殊杂交应力元	142
6.7.2 倒圆角 V-型槽孔矩形薄板承受拉伸	146
6.8 非协调杂交应力元理性列式(III)——正交法	147
6.8.1 非协调位移元与杂交应力元的对应性	147
6.8.2 非协调杂交应力元理性列式(III)	149
6.9 应力张量转换法建立几何形状歪斜元的应力场	149
6.10 具有一个无外力斜边，且斜边上 2 个结点含有转动自由度的 4 结点杂交 应力元	151
6.10.1 建立单元协调位移	151
6.10.2 建立单元非协调位移	154

6.10.3	建立单元假定应力场	155
6.10.4	工程实例	159
6.11	小结	164
	参考文献	166
第 7 章	扩展的修正余能原理 Π_{emc} 及根据扩展的修正余能原理建立的特殊层合元	169
7.1	扩展的修正余能原理及杂交应力层合元列式	170
7.1.1	扩展的修正余能原理 Π_{emc}	170
7.1.2	层合材料有限元列式	170
7.2	具有一个无外力圆柱表面杂交应力层合元及其应用	172
7.2.1	单元假定应力场	172
7.2.2	单元边界位移	176
7.2.3	工程算例	176
7.3	具有一个无外力直表面特殊杂交应力层合元	186
7.3.1	每层具有 8 结点及一个无外力直表面层合元	186
7.3.2	每层具有 12 结点及一个无外力直表面层合元	188
7.3.3	工程算例	191
7.4	联合一个无外力圆柱表面及一个无外力直表面两类层合杂交应力元, 求解槽孔层合板的应力	197
7.4.1	倒圆角方孔层板承受拉伸	197
7.4.2	倒圆角矩形孔的层板承受拉伸或剪切	200
7.4.3	单侧 U-型槽孔层板承受拉伸	202
7.4.4	拟椭圆孔层板承受拉伸	204
7.5	小结	208
	参考文献	209
第 8 章	扩展的修正 Hellinger-Reissner 原理 Π_{emR} 及根据扩展的修正 Hellinger-Reissner 原理建立的特殊杂交应力层合元	213
8.1	扩展的修正 Hellinger-Reissner 原理及有限元列式	213
8.1.1	扩展的修正 Hellinger-Reissner 原理 Π_{emR}	213
8.1.2	层合元列式	217
8.2	具有一个无外力圆柱表面三维杂交应力层合元	218
8.2.1	单元位移场	218
8.2.2	单元假定应力场	220
8.3	其余三种具有一个无外力圆柱表面每层 10 结点的三维杂交应力层合元	222
8.3.1	单元 Case A	222
8.3.2	单元 Case B	224
8.3.3	单元 Case C	225
8.4	中心横向拟椭圆孔层板受力分析	226
8.4.1	Case A、Case B 及 Case C 三种单元性能比较	226

8.4.2 Case A 与 SLR10 两种元比较	227
8.5 小结	232
参考文献	233
附录 A	234
附录 B	247

第 1 章 小位移变形弹性理论基本方程

1.1 应力、应变、位移、体积力、表面力

弹性体的力学响应可用三类量来表示, 即: 应力(力学量)、应变及位移(几何量)。这三类量通常有以下三种表示方法, 通常用其英文第一字母代表:

工程表示	E (Engineering)
仿射正交张量表示	T (Cartesian Tensor)
矩阵(或矢量)表示	M (Matrix or Vector)

这三种表示方法是等同的。

(1) 应力: 物体内一点的应力状态用 6 个独立的应力分量表示

$$\begin{aligned} \text{E: } & \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy} \text{ (直角坐标: } x, y, z) \\ & (\tau_{yz} = \tau_{zy}, \tau_{zx} = \tau_{xz}, \tau_{xy} = \tau_{yx}) \end{aligned} \quad (1.1.1a)$$

$$\begin{aligned} \text{T: } & \sigma_{ij} \text{ (} i, j = 1, 2, 3; \text{ 卡氏坐标: } x_1, x_2, x_3) \\ & (\sigma_{ij} = \sigma_{ji}) \end{aligned} \quad (1.1.1b)$$

$$\text{M: } \boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}\}^T = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{31}, \sigma_{12}\}^T \quad (1.1.1c)$$

(2) 应变: 物体内一点的应变状态也用 6 个独立的应变分量表示

$$\begin{aligned} \text{E: } & \varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{xy} \\ & (\gamma_{yz} = \gamma_{zy}, \gamma_{zx} = \gamma_{xz}, \gamma_{xy} = \gamma_{yx}) \end{aligned} \quad (1.1.2a)$$

$$\text{T: } \varepsilon_{ij} \text{ (} i, j = 1, 2, 3; \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}) \quad (1.1.2b)$$

$$\text{M: } \boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{xy}\}^T = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, 2\varepsilon_{23}, 2\varepsilon_{31}, 2\varepsilon_{12}\}^T \quad (1.1.2c)$$

剪应变的工程表示与张量表示差 1/2, 即

$$\gamma_{yz} = 2\varepsilon_{23} \quad \gamma_{zx} = 2\varepsilon_{31} \quad \gamma_{xy} = 2\varepsilon_{12} \quad (1.1.3)$$

(3) 位移: 物体内一点的位移以 3 个位移分量表示

$$\text{E: } u, v, w \quad (1.1.4a)$$

$$\text{T: } u_i \text{ (} i = 1, 2, 3) \quad (1.1.4b)$$

$$\text{M: } \boldsymbol{u} = \{u, v, w\}^T = \{u_1, u_2, u_3\}^T \quad (1.1.4c)$$

所以, 弹性理论空间问题的未知量有 6 个应力分量、6 个应变分量及 3 个位移分量, 一共 15 个未知量。实际上, 应力、应变、位移都是弹性体内各点坐标的函数, 即都是场量。以后, 为了与弹性理论变形原理的术语一致, $\boldsymbol{\sigma}$ 、 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 、 \boldsymbol{u} 称为三类变量。

同时, 弹性体还有给定的单位体积的体积力及单位表面上的表面力。

(4) 体积力: 给定单位体积的体积力有 3 个分量

$$E: \bar{F}_x, \bar{F}_y, \bar{F}_z \text{ ①} \tag{1.1.5a}$$

$$T: \bar{F}_i \ (i=1, 2, 3) \tag{1.1.5b}$$

$$M: \bar{\mathbf{F}} = \{\bar{F}_x, \bar{F}_y, \bar{F}_z\}^T = \{\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3\}^T \tag{1.1.5c}$$

表面力: 边界面上单位表面上的面力也有 3 个分量

$$E: \bar{T}_x, \bar{T}_y, \bar{T}_z \tag{1.1.6a}$$

$$T: \bar{T}_i \ (i=1, 2, 3) \tag{1.1.6b}$$

$$M: \bar{\mathbf{T}} = \{\bar{T}_x, \bar{T}_y, \bar{T}_z\}^T = \{\bar{T}_1, \bar{T}_2, \bar{T}_3\}^T \tag{1.1.6c}$$

1.2 应变能和余能

1.2.1 应变能密度

考虑一杆件承受轴向拉伸[图 1.1(a)], 假定其拉力 P 的变化很慢, 以致杆在各瞬时均处于平衡状态, 这种加载过程称为静过程。这时拉力 P 与伸长 u 之间的关系如图 1.1(b) 所示。横坐标 u 与曲线之间的面积 W_a , 代表拉力 P 所做的功。在静过程中, 可以忽略其动态力, 同时, 不考虑随着物体的弹性变形而产生的极小电磁及热现象能量消耗。根据能量守恒原理, 此功在数值上等于物体变形所储存的应变能。对于一个理想弹性体, 外力做的功将全部转变为物体所储存的应变能。随着变形的消失, 它又以功的形式放出。这种应变能是由于变形而且仅由于变形而产生。

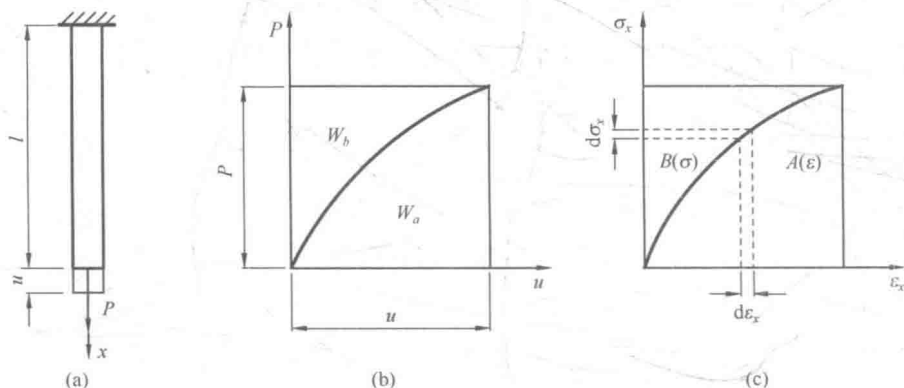


图 1.1 应变能密度与余能密度

图 1.1(c) 为此杆对应的应力-应变曲线, 其横坐标 ϵ_x 与曲线间的面积代表单位体积的应变能, 又称为应变能密度, 以 $A(\epsilon)$ 表示。因此可知, 在单向受力状态, 应变能密度为

$$A(\epsilon) = \int_0^{\epsilon_x} \sigma_x d\epsilon_x \tag{a}$$

同理, 在复杂受力状态下其应变能密度定义为

① 书中除特别说明, 字母上加一横线表示该量是给定的。

$$\begin{aligned}
 A(\varepsilon) &= \int_0^{\varepsilon_{ij}} (\sigma_{11} d\varepsilon_{11} + \sigma_{22} d\varepsilon_{22} + \sigma_{33} d\varepsilon_{33} + 2\sigma_{23} d\varepsilon_{23} + 2\sigma_{31} d\varepsilon_{31} + 2\sigma_{12} d\varepsilon_{12}) \\
 &= \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}
 \end{aligned} \tag{1.2.1}$$

1.2.2 余能密度

图 1.1 (b) 中, 纵坐标 P 与曲线之间的面积 W_b 称为**余能**。同理, 图 1.1 (c) 中纵坐标 σ_x 与曲线之间的面积 $B(\sigma)$ 为单位体积的余能, 又称为**余能密度**。因此

$$B(\sigma) = \int_0^{\sigma_x} \varepsilon_x d\sigma_x \tag{b}$$

而且

$$A(\varepsilon) + B(\sigma) = \varepsilon_x \sigma_x \tag{c}$$

对于线性弹性体, 由于应力应变为直线关系, 所以 $A(\varepsilon) = B(\sigma)$ 。对于非线性弹性体, 其应力应变关系为曲线, 因而应变能密度与余能密度并不相等。

弹性体在复杂受力状态时, 其余能密度 $B(\sigma)$ 为

$$\begin{aligned}
 B(\sigma) &= \int_0^{\sigma_{ij}} (\varepsilon_{11} d\sigma_{11} + \varepsilon_{22} d\sigma_{22} + \varepsilon_{33} d\sigma_{33} + 2\varepsilon_{23} d\sigma_{23} + 2\varepsilon_{31} d\sigma_{31} + 2\varepsilon_{12} d\sigma_{12}) \\
 &= \int_0^{\sigma_{ij}} \varepsilon_{ij} d\sigma_{ij}
 \end{aligned} \tag{1.2.2}$$

同时也存在

$$A(\varepsilon) + B(\sigma) = \varepsilon_{ke} \sigma_{ke} = \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} \tag{1.2.3}$$

1.3 小位移变形弹性理论基本方程

以下讨论在体力和给定的边界条件下、处于平衡状态的小位移变形弹性体的基本方程。所谓小位移变形弹性理论, 是假定物体内一点的位移分量 u 、 v 、 w 小到可以把基本方程线性化, 而这些线性化的基本方程有以下几组。

1.3.1 平衡方程(力学方程)

E: 在笛卡儿直角坐标系中, 弹性体一点的 6 个应力分量必须满足 3 个平衡方程

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \bar{F}_x &= 0 \\
 \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \bar{F}_y &= 0 \\
 \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \bar{F}_z &= 0
 \end{aligned} \tag{1.3.1a}$$

T: 以上 3 个平衡方程可用张量形式表达

$$\sigma_{ij,j} + \bar{F}_i = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (1.3.1b)$$

其中, $\sigma_{ij,j}$ 表示 σ_{ij} 对 x_j 的偏导数, 即 $\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$ 。以后书中凡是 $(\dots)_{,j}$ 都表示 $\frac{\partial(\dots)}{\partial x_j}$ 。

同时, 同一项中指标的符号(而不是阿拉伯字)重复, 代表该指标由 1 至 3 求和, 即代表 \sum_1^3 。略去求和符号, 这种重复的指标, 叫哑标, 如

$$\sigma_{ii} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \quad (a)$$

所以式(1.3.1b)中第一项的符号 j 为哑标, 它表示指标 j 由 1 至 3 求和, 即代表

$$\frac{\partial \sigma_{i1}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{i2}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{i3}}{\partial x_3} + \bar{F}_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (b)$$

在式(b)中, 如取 $i=1$, 可得

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + \bar{F}_1 = 0 \quad (c)$$

这就是工程表示中平衡方程(1.3.1a)的第一式。同样 i 分别取 2 及 3, 将得到其余两个方程。由于哑标代表求和, 所以可以用任何重复的字母表示, 如下式

$$\sigma_{ik,k} + \bar{F}_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (d)$$

与式(1.3.1b)的展开式(b)完全相同。因此, 哑标用别的重复符号置换结果一样。

M: 平衡方程同样可用矩阵表达

$$\mathbf{D}^T \boldsymbol{\sigma} + \bar{\mathbf{F}} = \mathbf{0} \quad (1.3.1c)$$

式中, \mathbf{D} 为微分算子阵

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^T &= \begin{bmatrix} \partial_{,1} & 0 & 0 & 0 & \partial_{,3} & \partial_{,2} \\ 0 & \partial_{,2} & 0 & \partial_{,3} & 0 & \partial_{,1} \\ 0 & 0 & \partial_{,3} & \partial_{,2} & \partial_{,1} & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

\mathbf{D} 阵元素的排列, 与式(1.1.1a)~式(1.1.1c)阵中应力分量的排列顺序一一对应。如果改变了式(1.1.1c)中应力分量的顺序, 则矩阵 \mathbf{D} 中元素的排列顺序也需作相应改变。

1.3.2 应变位移方程(几何方程)

小位移变形弹性体中, 应变位移关系的三种表示方式如下:

E: 在笛卡儿直角坐标系中, 弹性体的 6 个应变分量与 3 个位移分量的关系为

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\
 \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\
 \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} \\
 \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\
 \gamma_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\
 \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}
 \end{aligned} \tag{1.3.3a}$$

T: 以上6个方程可用如下张量形式表示

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (i, j = 1, 2, 3) \tag{1.3.3b}$$

当取 $i=1$, 而 j 分别取 1 及 2 时, 可得

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \tag{e}$$

$$2\varepsilon_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \tag{f}$$

此结果与式(1.3.3a)中的第1及第6式相同。同时由式(f)可见, 剪应变 $2\varepsilon_{12}$ 与 γ_{xy} 相等。这就是式(1.1.2c)中诸剪应变 ε_{23} 、 ε_{31} 及 ε_{12} 前面均加2倍的原因。

M: 应变位移方程的矩阵表达为

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D} \mathbf{u} \tag{1.3.3c}$$

将式(1.3.3c)展开, 可得

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{31} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \tag{1.3.3d}$$

可以看到, 用矩阵表示的平衡方程(1.3.1c)和应变位移方程(1.3.3c)两个方程中的微分算子阵互为转置。

1.3.3 应力应变关系(物理方程或本构方程)

小位移变形弹性理论中的应力应变关系^[1], 以线性、齐次形式给出, 它们有两类表达式。

1. 第一类应力应变关系表达式

E: 对于各向异性的线性弹性体, 当以应变表示应力时, 其应力应变关系为

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= c_{11}\varepsilon_x + c_{12}\varepsilon_y + c_{13}\varepsilon_z + c_{14}\gamma_{yz} + c_{15}\gamma_{zx} + c_{16}\gamma_{xy} \\
 \sigma_y &= c_{21}\varepsilon_x + c_{22}\varepsilon_y + c_{23}\varepsilon_z + c_{24}\gamma_{yz} + c_{25}\gamma_{zx} + c_{26}\gamma_{xy} \\
 \sigma_z &= c_{31}\varepsilon_x + c_{32}\varepsilon_y + c_{33}\varepsilon_z + c_{34}\gamma_{yz} + c_{35}\gamma_{zx} + c_{36}\gamma_{xy} \\
 \tau_{yz} &= c_{41}\varepsilon_x + c_{42}\varepsilon_y + c_{43}\varepsilon_z + c_{44}\gamma_{yz} + c_{45}\gamma_{zx} + c_{46}\gamma_{xy} \\
 \tau_{zx} &= c_{51}\varepsilon_x + c_{52}\varepsilon_y + c_{53}\varepsilon_z + c_{54}\gamma_{yz} + c_{55}\gamma_{zx} + c_{56}\gamma_{xy} \\
 \tau_{xy} &= c_{61}\varepsilon_x + c_{62}\varepsilon_y + c_{63}\varepsilon_z + c_{64}\gamma_{yz} + c_{65}\gamma_{zx} + c_{66}\gamma_{xy}
 \end{aligned} \tag{1.3.4a}$$

方程中与对角线居对称位置的弹性系数相等

$$c_{mn} = c_{nm} \quad (m, n = 1, 2, \dots, 6) \tag{1.3.5}$$

反之, 当用应力表示应变时其应力应变关系为

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= s_{11}\sigma_x + s_{12}\sigma_y + s_{13}\sigma_z + s_{14}\tau_{yz} + s_{15}\tau_{zx} + s_{16}\tau_{xy} \\
 \varepsilon_y &= s_{21}\sigma_x + s_{22}\sigma_y + s_{23}\sigma_z + s_{24}\tau_{yz} + s_{25}\tau_{zx} + s_{26}\tau_{xy} \\
 \varepsilon_z &= s_{31}\sigma_x + s_{32}\sigma_y + s_{33}\sigma_z + s_{34}\tau_{yz} + s_{35}\tau_{zx} + s_{36}\tau_{xy} \\
 \gamma_{yz} &= s_{41}\sigma_x + s_{42}\sigma_y + s_{43}\sigma_z + s_{44}\tau_{yz} + s_{45}\tau_{zx} + s_{46}\tau_{xy} \\
 \gamma_{zx} &= s_{51}\sigma_x + s_{52}\sigma_y + s_{53}\sigma_z + s_{54}\tau_{yz} + s_{55}\tau_{zx} + s_{56}\tau_{xy} \\
 \gamma_{xy} &= s_{61}\sigma_x + s_{62}\sigma_y + s_{63}\sigma_z + s_{64}\tau_{yz} + s_{65}\tau_{zx} + s_{66}\tau_{xy}
 \end{aligned} \tag{1.3.6a}$$

式中, 柔度系数 s_{mn} 同样存在

$$s_{mn} = s_{nm} \quad (m, n = 1, 2, \dots, 6) \tag{1.3.7}$$

对于各向同性线性弹性体, 上述应力应变关系简化为

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= \lambda\varepsilon_V + 2\mu\varepsilon_x \\
 \sigma_y &= \lambda\varepsilon_V + 2\mu\varepsilon_y \\
 \sigma_z &= \lambda\varepsilon_V + 2\mu\varepsilon_z \\
 \tau_{yz} &= \mu\gamma_{yz} \\
 \tau_{zx} &= \mu\gamma_{zx} \\
 \tau_{xy} &= \mu\gamma_{xy}
 \end{aligned} \tag{1.3.8a}$$

式中, ε_V 为体积应变, 可表示为

$$\varepsilon_V = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \tag{1.3.9}$$

这里两个独立弹性常数 λ 、 μ 称为拉梅系数。它们和杨氏弹性系数 E 及泊松比 ν 的关系为

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{1.3.10}$$

将式(1.3.8a)倒过来,也可以得到用应力表示应变

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)] \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \\ \gamma_{yz} &= \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{yz} \\ \gamma_{zx} &= \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{zx} \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy}\end{aligned}\quad (1.3.11a)$$

以上是第一类应力应变关系的工程表达式。其对应的张量及矩阵表达形式如下。

T: 对于各向异性线性弹性体,式(1.3.4a)用张量表示为

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (1.3.4b)$$

式中, C_{ijkl} 为弹性常数, 而且

$$C_{ijkl} = C_{klij} = C_{jikl} = C_{ijlk} \quad (1.3.12)$$

在式(1.3.4b)右侧, 指标 k, l 重复是哑标, 表示 1 至 3 求和, 所以此式展开为

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= C_{ij11}\varepsilon_{11} + C_{ij22}\varepsilon_{22} + C_{ij33}\varepsilon_{33} + 2C_{ij23}\varepsilon_{23} \\ &\quad + 2C_{ij31}\varepsilon_{31} + 2C_{ij12}\varepsilon_{12} \quad (i, j = 1, 2, 3)\end{aligned}\quad (1.3.13)$$

当 i, j 分别取 1、2、3 时, 即得到对应的工程表达式(1.3.4a)。

反之, 也可以应力表示应变

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl}\sigma_{kl} \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (1.3.6b)$$

式中, k, l 同样为哑标, 也存在

$$S_{ijkl} = S_{klij} = S_{jikl} = S_{ijlk} \quad (1.3.14)$$

同时还有

$$C_{ijkl}S_{klmn} = \delta_{nm}^{ij} \quad (1.3.15)$$

这里 δ_{mn}^{ij} 为

$$\begin{aligned}\delta_{mn}^{ij} &= \delta_{mn}^{ji} = \delta_{nm}^{ji} = \delta_{nm}^{ij} = 1 \quad (ij = mn) \\ \delta_{mn}^{ij} &= \delta_{mn}^{ji} = \delta_{nm}^{ji} = \delta_{nm}^{ij} = 0 \quad (ij \neq mn)\end{aligned}\quad (1.3.16)$$

对于各向同性体, 式(1.3.8a)也可以用张量表示

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (1.3.8b)$$

式中, δ_{ij} 也是克氏符号(Kronecker 符号), 即

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

ε_{kk} 中的 k 重复是哑标, 它代表体积应变 ε_V

$$\varepsilon_{kk} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \varepsilon_V = u_{k,k} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \quad (1.3.17)$$

当式 (1.3.8b) 中 $i=1$ 、 j 分别取 1 及 2 时, 可得

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \lambda \varepsilon_V \delta_{11} + 2\mu \varepsilon_{11} = \lambda \varepsilon_V + 2\mu \varepsilon_x \\ \sigma_{12} &= \lambda \varepsilon_V \delta_{12} + 2\mu \varepsilon_{12} = 2\mu \varepsilon_{12} = \mu \gamma_{xy} \end{aligned} \quad (1.3.18)$$

此两式与式 (1.3.8a) 中的第一式及第六式一致。同时可见, 虽然 ε_{12} 与 γ_{xy} 相差 1/2, 但二者所得应力 σ_{12} 一样。

与式 (1.3.11a) 对应, 也可以用应力张量表示应变

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E} [(1+\nu)\sigma_{ij} - \nu\sigma_{kk}\delta_{ij}] \quad (1.3.11b)$$

M: 小位移变形线性弹性体, 不管其材料各向同性与否, 应力应变关系可统一表达为如下矩阵的形式

$$\sigma = C \varepsilon \quad (1.3.4c)$$

$$\varepsilon = S \sigma \quad (1.3.6c)$$

对于线性各向异性弹性体的弹性常数阵 S 及柔度阵 C 分别为

$$S = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} & s_{15} & s_{16} \\ & s_{22} & s_{23} & s_{24} & s_{25} & s_{26} \\ & & s_{33} & s_{34} & s_{35} & s_{36} \\ & & & s_{44} & s_{45} & s_{46} \\ & & & & s_{55} & s_{56} \\ & & & & & s_{66} \end{bmatrix} \quad (1.3.19)$$

对称

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ & & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ & & & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ & & & & c_{55} & c_{56} \\ & & & & & c_{66} \end{bmatrix} \quad (1.3.20)$$

对称

对各向同性弹性体, C 及 S 中元素可以简化。

应力应变关系适用于已知应力求应变, 或已知应变求应力, 有时, 也称它们为物理方程或本构关系。

2. 第二类应力应变关系表达式

在讨论这种表达式前, 先推线性弹性体的应变能密度 $A(\varepsilon)$ 及余能密度 $B(\sigma)$ 表达式。