实用工程数学

杨策平　刘　磊　主编

科学出版社

实用工程数学

杨策平　刘　磊　主　编
朱　玲　徐　循　副主编

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书根据高职高专工程数学课程教学大纲的基本要求，并结合编者多年的教学实践经验编写而成，反映了当前高职高专教育培养高素质实用型人才数学课程设置的教学理念。全书共分三部分，第一部分，线性代数初步；第二部分，概率论与数理统计初步；第三部分，MATLAB 简介及数学实验。本书含盖了工程数学的大部分基本内容。每章节后都配有习题，并在书后附有部分习题参考答案与提示。

本书可供高职高专各专业学生使用。

图书在版编目（CIP）数据

实用工程数学／杨策平，刘磊主编．—北京：科学出版社，2018.1
ISBN 978-7-03-055792-6

Ⅰ．①实…　Ⅱ．①杨…②刘…　Ⅲ．①工程数学-教材　Ⅳ．①TB11

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 300852 号

责任编辑：滕亚帆　李　萍／责任校对：桂伟利
责任印制：霍　兵／封面设计：华路天然设计工作室

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
保定中画美凯印刷有限公司 印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2018 年 1 月第　一　版　开本：720×1000　1/16
2018 年 1 月第一次印刷　印张：14
字数：300 000

定价：36.00 元

前　言

本书是按照新形势下高职高专工程数学教学改革的精神，针对高职高专学生学习的特点，结合编者多年的教学实践编写而成的. 本书具有以下特色：

(1) 依据高职高专工程数学课程教学大纲的基本要求编写而成，力求突出实用性，坚持理论够用为度的原则. 在尽可能保持数学学科特点的基础上，注意到高职高专教育的特殊性，对教学内容进行了精选，淡化理论性和系统性，对一些定理只给出解释或简单的几何说明，强化针对性和实用性，将应用落实到使学生能运用所学数学知识求解实际问题上.

(2) 本书吸取了国内外同类教材的精华，借鉴了近几年我国出版的一批教材的成功经验，因此，本书具有更强的实用性. 书中概念的引入尽可能从实际背景入手，讲解基本概念、基本原理和基本解题技能时，在考虑到学生自身能力、教学学时等实际情况的基础上，做到由易到难、循序渐进和通俗易懂，不要求复杂的计算和证明.

(3) 本书注重基础知识、基本方法和基本技能的训练；注重对学生抽象概括能力、逻辑推理能力、计算能力和解决实际问题能力的培养，并对解题的步骤和思路进行了适当的归纳. 每节后习题的配备类型合理，深度和广度适中.

(4) 本书既考虑到一般理工科专业对工程数学的需要，也兼顾经济类专业的特点，因此，也适用于经济类专业. 书中工程数学内容全面，可根据不同需要选学部分内容，同时，书中注有“*”号的内容可供教师选讲及学有余力的同学阅读.

本书由杨策平、刘磊担任主编，由朱玲、徐循担任副主编. 参编人员有王红、朱长青、黄斌、任潜能、胡二琴等教师.

本书由杨策平修改、统稿、定稿.

在本书的编写过程中，湖北工业大学工程技术学院和湖北工业大学理学院的领导及教师提出了许多宝贵的意见和建议，编者在此表示诚挚的谢意，欢迎各位读者提出批评和建议.

编　者

2017 年 10 月于武汉

目　录

第一部分　线性代数初步

第二部分　概率论与数理统计初步

第三部分　MATLAB 简介及数学实验

第一部分　线性代数初步

在科学技术和生产经营管理活动中，经常碰到的许多问题都可以归结为求解线性方程组的问题. 行列式和矩阵是为了求解线性方程组而引入的，它们是研究线性代数的重要工具. 这里将介绍行列式和矩阵的概念及其运算，并用它们求解线性方程组，解决一些实际问题.

第一章　行列式与矩阵

第 1 节　行列式的概念与性质

一、二阶与三阶行列式

行列式的概念起源于求解线性方程组，所谓线性方程组是指未知量的最高次幂是一次的方程组.

设有二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \tag{1}$$

我们用加减消元法，可得

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2, \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}. \end{cases}$$

若 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$，那么方程组(1)的解为

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \\ x_2 = \dfrac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \end{cases} \tag{2}$$

但公式(2)不容易记忆，因此也就不便于应用. 针对这一缺点，引入记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \tag{3}$$

在上面引入的记号中，横排称为行，竖排称为列，因为共有两行两列，所以

称为**二阶行列式**，它表示代数和 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，其中数 $a_{ij}(i=1,2;\ j=1,2)$ 称为二阶行列式的**元素**或**元**. 元素 a_{ij} 的第一个下标 i 称为**行标**，表明该元素位于第 i 行，第二个下标 j 称为**列标**，表明该元素位于第 j 列，位于第 i 行第 j 列的元素称为二阶行列式的 (i,j) 元.

二阶行列式的定义本身也给出了它的计算方法. 从左上角到右下角的对角线称为**主对角线**，沿主对角线上的两元素之积取正号. 从右上角到左下角的对角线称为**次对角线**，沿次对角线上的两元素之积取负号. 这种计算法称为二阶行列式的**对角线法则**.

由二阶行列式的概念，若记

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix},\quad D_1=\begin{vmatrix}b_1 & a_{12}\\ b_2 & a_{22}\end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix}a_{11} & b_1\\ a_{21} & b_2\end{vmatrix},$$

则公式(2)可写成

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{\begin{vmatrix}b_1 & a_{12}\\ b_2 & a_{22}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}},\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{\begin{vmatrix}a_{11} & b_1\\ a_{21} & b_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}}.$$

注意 上式的分母 D 是由方程组(1)的系数所确定的二阶行列式(称为**系数行列式**)，x_1 的分子 D_1 是用常数项 b_1，b_2 替换 D 中 x_1 的系数 a_{11}，a_{21} 所得的二阶行列式，x_2 的分子 D_2 是用常数项 b_1，b_2 替换 D 中 x_2 的系数 a_{12}，a_{22} 所得的二阶行列式. 由此可见，用二阶行列式表示线性方程组(1)的解，显然容易记忆.

例 1.1.1 求解二元线性方程组

$$\begin{cases}2x_1+3x_2=2,\\ x_1+4x_2=-1.\end{cases}$$

解 因为

$$D=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 4\end{vmatrix}=8-3=5\neq 0,$$

$$D_1=\begin{vmatrix}2 & 3\\ -1 & 4\end{vmatrix}=8-(-3)=11,\quad D_2=\begin{vmatrix}2 & 2\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-2-2=-4,$$

所以方程组的解为

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{D_1}{D}=\dfrac{11}{5},\\[2mm] x_2=\dfrac{D_2}{D}=-\dfrac{4}{5}.\end{cases}$$

与二阶行列式类似，定义三阶行列式如下：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

称为**三阶行列式**.

由以上定义可知，三阶行列式有三行三列，其元素 $a_{ij}(i, j=1,2,3)$ 共有 3^2 个. 三阶行列式仍有对角线法则，即实线上三个元素乘积之和，减去虚线上三个元乘积之和(图 1-1).

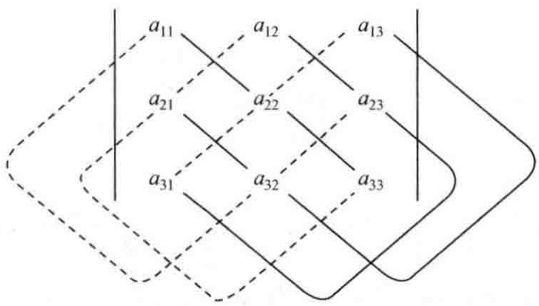

图 1-1

由二阶行列式和三阶行列式的定义，不难发现有如下关系式

$$\begin{aligned} D&=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &=a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

是原三阶行列式 D 中划去元素 a_{11} 所在的第一行和第一列后剩下的元素按原来顺序组成的二阶行列式，称它为元素 a_{11} 的**余子式**，记作 M_{11} ，即

$$M_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

类似地，记

$$M_{12}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix},\quad M_{13}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

并且令

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}\quad (i,j=1,2,3)$$

称为元素 a_{ij} 的**代数余子式**.

因此，三阶行列式也可以表示为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}. \tag{4}$$

这样，三阶行列式的值可转化为二阶行列式计算而得到.

例 1.1.2 计算三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ -1 & -3 & 4 \end{vmatrix}.$$

解 $D=2\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}+(-5)\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}+1\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}$

$$=2\times[3\times4-(-2)\times(-3)]+5\times[0\times4-(-2)\times(-1)]$$
$$+[0\times(-3)-3\times(-1)]=5.$$

二、*n* 阶行列式的定义

定义 1.1.1 由 n^2 个数组成的算式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 ***n* 阶行列式**，其中 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 称为 n 阶行列式第 i 行第 j 列的元素.

当 $n=2$ 时，按(3)式计算二阶行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

当 $n>2$ 时，设 $n-1$ 阶行列式已定义. 在 n 阶行列式 D 中划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列后剩下的元素按原来顺序组成的 $n-1$ 阶行列式，称为元素 a_{ij} 的余子式，记作 M_{ij}； $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 称为元素 a_{ij} 的代数余子式.

类似于三阶行列式和二阶行列式的关系式(4)，我们利用 $n-1$ 阶行列式定义 n 阶行列式.

定义 1.1.2

$$D = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}. \tag{5}$$

这是 n 阶行列式的递归定义. 特别地, 当 $n=1$ 时, 一阶行列式 $|a_{11}|$ 规定为 a_{11}, 即 $|a_{11}| = a_{11}$.

例 1.1.3　写出四阶行列式

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 & 7 \\ 3 & 8 & 6 & 0 \\ 5 & 4 & 1 & 9 \\ 10 & 11 & -3 & -6 \end{vmatrix}$$

中元素 a_{23} 的余子式和代数余子式.

解　由余子式和代数余子式的定义可知

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 7 \\ 5 & 4 & 9 \\ 10 & 11 & -6 \end{vmatrix}, \quad A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 & 7 \\ 5 & 4 & 9 \\ 10 & 11 & -6 \end{vmatrix}.$$

例 1.1.4　计算下列 n 阶三角行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解　由 n 阶行列式的定义(5)式得

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22} \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{43} & a_{44} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \cdots = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

类似地, 有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

例 1.1.5　计算四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & e \\ f & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

解　由(5)式得

$$D=\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & e \\ f & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=a\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}+b\times(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & d \\ f & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=a\times c\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} d & e \\ 0 & 0 \end{vmatrix}-b\times c\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & d \\ f & 0 \end{vmatrix}$$

$$=bc\times(0-df)=-bcdf.$$

三、行列式的性质

为了简化行列式的计算，下面不加证明地引入行列式的性质.

首先给出转置行列式的定义.

定义 1.1.3　设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

将 D 所对应的行与列的位置互换所得的行列式

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 D 的**转置行列式**.

性质 1.1.1　行列式与它的转置行列式相等.

性质 1.1.1 表明,行列式中行与列的地位是对称的,因此,凡是有关行的性质,对列同样成立.

性质 1.1.2　互换行列式的两行(列)，行列式变号.

推论　如果行列式有两行(列)完全相同，则此行列式等于零.

证明　交换这两行，则 $D=-D$，故 $D=0$.

性质 1.1.3　行列式的某一行(列)中所有的元素都乘以同一个数 k 等于用数 k 乘以此行列式. 例如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

由性质 1.1.3 易得如下结论.

推论 1　行列式中某一行(列)的所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面.

推论 2　如果行列式中有一行(列)的元素全为零，那么这个行列式等于零.

性质 1.1.4　如果行列式有两行(列)的对应元素成比例，那么这个行列式等于零.

性质 1.1.5　如果行列式的某一行(列)的各元素都可写成两项之和，例如

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则 D 等于下列两个行列式之和.

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 1.1.6　把行列式的某一行(列)的元素乘以同一个数后加到另一行(列)的对应元素上，行列式不变.

性质 1.1.7　行列式等于它的任一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和，即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\quad (i=1, 2, \cdots, n)$$

或

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}\quad (i=1, 2, \cdots, n).$$

性质 1.1.7 称为行列式按行(列)展开法则.

例 1.1.6　已知三阶行列式 $D=\begin{vmatrix}3 & 2 & 2\\ 7 & -4 & 1\\ 3 & 7 & 4\end{vmatrix}$，

(1) 按第三行展开，并求其值；

(2) 按第二列展开，并求其值.

解　(1) 将 D 按第三行展开得

$$\begin{aligned}D&=a_{31}A_{31}+a_{32}A_{32}+a_{33}A_{33}\\&=3\times(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}2 & 2\\ -4 & 1\end{vmatrix}+7\times(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}3 & 2\\ 7 & 1\end{vmatrix}+4\times(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}3 & 2\\ 7 & -4\end{vmatrix}\\&=3\times10+7\times(-1)\times(-11)+4\times(-26)=3.\end{aligned}$$

(2) 将 D 按第二列展开得

$$\begin{aligned}D&=a_{12}A_{12}+a_{22}A_{22}+a_{32}A_{32}\\&=2\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}7 & 1\\ 3 & 4\end{vmatrix}+(-4)\times(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}3 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}+7\times(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}3 & 2\\ 7 & 1\end{vmatrix}\\&=2\times(-1)\times25+(-4)\times6+7\times(-1)\times(-11)=3.\end{aligned}$$

例 1.1.7　计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix}2 & 3\\ 597 & 701\end{vmatrix}$；

(2) 设 $\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=1$，求 $\begin{vmatrix}a_{13} & a_{12} & a_{11}\\ a_{23} & a_{22} & a_{21}\\ a_{33}+2a_{13} & a_{32}+2a_{12} & a_{31}+2a_{11}\end{vmatrix}$.

解

(1) $\begin{vmatrix}2 & 3\\ 597 & 701\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 600-3 & 700+1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 600 & 700\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2 & 3\\ -3 & 1\end{vmatrix}$

$$=100\begin{vmatrix}2 & 3\\ 6 & 7\end{vmatrix}+11=100(14-18)+11=-389.$$

(2) $\begin{vmatrix}a_{13} & a_{12} & a_{11}\\ a_{23} & a_{22} & a_{21}\\ a_{33}+2a_{13} & a_{32}+2a_{12} & a_{31}+2a_{11}\end{vmatrix}\xlongequal{r_3+(-2)r_1}\begin{vmatrix}a_{13} & a_{12} & a_{11}\\ a_{23} & a_{22} & a_{21}\\ a_{33} & a_{32} & a_{31}\end{vmatrix}$

$$\xlongequal{c_1\leftrightarrow c_3}-\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=-1.$$

上式中 $r_3+(-2)r_1$ 表示第一行乘以(-2)加到第三行，$c_1\leftrightarrow c_3$ 表示第一列与第三

列互换位置. 类似地，有

$$r_i + kr_j, c_i + kc_j, r_i \leftrightarrow r_j, c_i \leftrightarrow c_j, kr_i, kc_i, r_i \div k, c_i \div k$$

等记号，其中 $r_i \div k(c_i \div k)$ 表示第 i 行(列)提出公因子 k.

四、行列式的计算

对于一个 n 阶行列式，通常是利用性质，将其化简为三角行列式，或将其化简为有某行(列)元素多数为零,或只有一个元素为零,再利用性质 1.1.7 展开降阶，直至化为二、三阶行列式求值.

例 1.1.8 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

解法 1 将 D 化为上三角行列式：

$$D \overset{c_1\leftrightarrow c_2}{=\!=\!=} -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \underset{r_4-r_1}{\overset{r_2-r_1}{=\!=\!=}} -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\overset{r_4\div 3}{=\!=\!=} -3\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{r_3-r_2}{=\!=\!=} -3\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{r_3\leftrightarrow r_4}{=\!=\!=} 3\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{vmatrix}$$

$$=3\times(1\times1\times1\times7)=21.$$

解法 2 保留 a_{12}，把第二列其余元素化为 0，然后按第二列展开：

$$D \underset{r_4-r_1}{\overset{r_2-r_1}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & -1 \\ 1 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} =1\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 1 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} \overset{r_2-r_1}{=\!=\!=} -1\begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)\times1\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & 7 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} =21.$$

例 1.1.9 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix}.$$

解　由于 D 的每一行的所有元素的和都为 $a+3b$，因此可采用以下解法：

$$D \xlongequal{c_1+(c_2+c_3+c_4)} \begin{vmatrix} a+3b & b & b & b \\ a+3b & a & b & b \\ a+3b & b & a & b \\ a+3b & b & b & a \end{vmatrix} \xlongequal{c_1\div(a+3b)} (a+3b)\begin{vmatrix} 1 & b & b & b \\ 1 & a & b & b \\ 1 & b & a & b \\ 1 & b & b & a \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,3,4]{r_i-r_1} (a+3b)\begin{vmatrix} 1 & b & b & b \\ 0 & a-b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-b \end{vmatrix} =(a+3b)(a-b)^3.$$

习　题　1-1

1. 计算下列二、三阶行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}$；　　(2) $\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 0 \end{vmatrix}$；　　(4) $\begin{vmatrix} b & -a & 0 \\ 0 & 2c & 3b \\ c & 0 & a \end{vmatrix}$.

2. 利用行列式的性质，计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} -ab & ac & ae \\ bd & -cd & de \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix}$；　　(2) $\begin{vmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 196 & 203 & 199 \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -1 & 3 \end{vmatrix}$；　　(4) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

3. 计算下列 n 阶行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$；　　(2) $\begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & a \end{vmatrix}$.

4. 证明下列各题：

(1) $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$；

(2) $\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a_1+b_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ a_2+b_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$.

5. 解下列方程：

(1) $\begin{vmatrix} x & 3 & 4 \\ -1 & x & 0 \\ 0 & x & 1 \end{vmatrix} = 0$；

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1-x & 2 & 2 \\ 3 & 3 & x-2 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & x-3 \end{vmatrix} = 0$.

第 2 节 克拉默法则

作为 n 阶行列式的一个应用，下面用 n 阶行列式来求解含有 n 个未知量 n 个方程的线性方程组.

设给定了一个含有 n 个未知量 n 个方程的线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad\qquad \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{1}$$

以 D 记线性方程组(1)的系数行列式，即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

定理 1.2.1 [克拉默(Cramer)法则] 如果线性方程组(1)的系数行列式 $D \neq 0$，那么方程组(1)存在唯一解

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad \cdots, \quad x_n = \frac{D_n}{D},$$

其中 $D_j\,(j=1,2,\cdots,n)$ 是把系数行列式 D 中第 j 列的元素用方程组右边的常数项代替后所得到的 n 阶行列式，即

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,\,j-1} & b_1 & a_{1,\,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,\,j-1} & b_2 & a_{2,\,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,\,j-1} & b_n & a_{n,\,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$