普通高等教育“十三五”规划教材

应用型本科院校规划教材

线性代数（含练习册）

主　编　高　洁

副主编　唐春艳　郭夕敬

科学出版社

通高等教育“十三五”规划教材

应用型本科院校规划教材

线性代数（含练习册）

主编　高　洁

副主编　唐春艳　郭夕敬

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书依据“工科类、经济管理类本科数学基础课程教学基本要求”以及“全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲”中有关线性代数部分的内容要求编写而成.

全书共六章, 内容包括行列式、矩阵、向量空间、线性方程组、方阵的特征值与特征向量、实对称矩阵与二次型. 各章节配有典型例题和习题. 本书内容系统、体系完整、结构清晰、浅入深出、可读性强, 便于学生自学. 各章内容均符合教学基本要求, 可供学时数较少的专业选用, 而各章的“定理补充证明与典型例题解析”则可供对数学要求较高的专业或考研的学生选用.每一章编写了数学模型与数学实验内容, 以期达到理论知识与实践应用相统一的目的, 特别适用于应用型本科高校.

本书适合普通高等学校本科非数学类专业学生使用, 也可供考研学生及科技工作者参考.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数: 含练习册/高洁主编. —北京: 科学出版社, 2018.1
普通高等教育“十三五”规划教材・应用型本科院校规划教材
ISBN 978-7-03-056321-7

I. ①线… II. ①高… III. ①线性代数-高等学校-教材 IV. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 009536 号

责任编辑:昌 盛 梁 清 / 责任校对: 彭珍珍
责任印制: 师艳茹 / 封面设计: 迷底书装

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

保定市中画美凯印刷有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2018 年 1 月第 一 版 开本: 720 × 1000 1/16
2018 年 1 月第一次印刷 印张: 15 1/4
字数: 302 000

定价: 35.00 元(含练习册)

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前　言

当你开始阅读这本书时，你就成了这本书的创作者之一. 你将和我们一起来审视它的意义与价值，而你的意见和体会显得尤为重要. 合作已经开始，这是我们早就期待的，因为我们相信这将是一个愉快的历程，你的热情参与会给我们留下美好的记忆.

随着综合国力的提高，我国的教育布局也逐步地从“宝塔式”走向“大众化”. 教育部规划司提出了将大部分包括独立学院在内的地方本科院校转型为应用型本科院校.《国家中长期教育改革和发展规划纲要(2010—2020 年)》明确提出了需优化人才培养结构，不断扩大应用型人才培养规模. 应用型本科院校的主要任务和目标是培养应用型人才，而实践性教学是培养应用型人才的重要组成环节. 因此我们为每一章编写了相应的数学模型与数学实验内容，以期达到理论知识与实践应用相统一的目的. 信息时代的新方法影响着教育的每一环节；经典的与全新的教材、教学模式、教学方法等各种教学组件都在寻找自己合适的位置. 请相信，对于这些新形势与新思维，我们都给予了足够的关注. 本书就是在这种寻觅和探索的思想指导下完成的.

我们在取材时充分地考虑了你学习后续课程的需要. 本书涵盖了线性代数的经典内容，这也是教学大纲的要求. 内容是经典的，但这绝不意味着处理方法也必须是经典的. 我们知道，你尚未完成初等数学到高等数学的过渡. 与传统教材相比，无论是概念的引入，还是定理的证明与应用，我们都不惜花费相当多的篇幅用于与你所习惯的思维方式相衔接，始终在力争做到“浅入”而“深出”. 因此，我们特别注意了你对报考硕士研究生的渴求. 本书的深度与广度都达到了非数学专业考研大纲的要求，加之精选的章后习题本来就有相当比例的历届考研试题，因而把本书作为考研资料之用也是适宜的.

学习过程中，我们建议你对以下五点给予关注:

(1) 行列式是本书的有力工具，在第 1 章后各章常会看到它的应用;

(2) 矩阵理论是本书的核心内容;

(3) 秩数与向量的线性关系是难点;

(4) 最简梯矩阵是一条无形的主线，它连接着许多重要的概念与结论，同时也提供了解决相关问题的途径;

(5) 线性方程组问题和二次型理论是矩阵应用的成功范例.

线性代数是高等数学的一个重要分支. 高等数学之“高等”，绝不仅“高等”在内容上，就其思想方法而言也与初等数学有着很大的区别. 顺利完成由初等数

学到高等数学的过渡，同时实现由“形象思维”到“抽象思维”的转变是我们对你的期盼，这也是本书的任务之一. 除了把知识介绍给你之外，我们还希望在后续学习的能力与严谨思维方式的培养等方面对你有所帮助. 学完本书之后，即使你获得了很优异的成绩，也不要认为已完成了学业. 掌握好基本理论与基本技能固然重要，触及问题的本质与精髓才是更加艰深的任务. 我们希望你的知识有一天能升华到那种理想的境界.

毋庸置疑，考入大学意味着你已踏上了一条希望之路. 但应清醒地认识到这仅仅是一个新的开始，理想的真正实现还需要你继续付出辛勤的劳动. 改革、竞争、快节奏犹如大浪淘沙，谁笑到最后，谁笑得最好. 望你轻拂高考的征尘，依旧紧束戎装，去笑迎新的挑战. 记住，机遇总是偏袒勤奋的人.

愿本书助你成功. 祝你成功，这是我们共同的心愿.

仅以此书献给我们永远的良师益友——原永久教授！

编　者

2017 年 11 月 21 日

于珠海观音山下

目　　录

第1章 行 列 式

行列式这一概念最初产生于17世纪后半叶对线性方程组的研究，其确切定义及符号是由 Cauchy 于 1841 年给出的；其理论完善于 19 世纪. 行列式作为重要的工具在数学各分支乃至自然科学及众多的工程技术领域都有着广泛的应用. 本章主要介绍 n 阶行列式的定义、性质及计算方法.

1.1 n 阶行列式的定义

首先考虑二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases}$$

这里每个系数都缀上了下标，是为了表达清楚、讨论方便. 将前一个方程乘以 a_{22}，后一个方程乘以 a_{12}，然后相减得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12};$$

同理可得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21}.$$

显然，如果 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$，则可得方程组的解为

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

现在，引入记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

并且称其为**二阶行列式**，由二阶行列式的定义，方程组的解可表示为

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

类似地，通过考虑三元一次方程组，而引入**三阶行列式**的定义如下:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

在二、三阶行列式中，由左上角元素至右下角元素的连线称为行列式的**主对角线**；由右上角元素至左下角元素的连线称为行列式的**次对角线**. 由定义不难看出：二阶行列式恰为其主对角线两个元素之积减去次对角线两个元素之积. 而对于三阶行列式中的任意一项，若以其三个因子为顶点的三角形有一条边平行于主对角线，则该项符号为正(包括主对角线三个元素之积组成的项)；若以其三个因子为顶点的三角形有一条边平行于次对角线，则该项符号为负(包括次对角线三个元素之积组成的项). 这种方法可称为**对角线法**. 如图 1.1.1 所示.

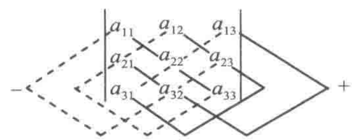

图 1.1.1

例 1.1 解二元一次方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -3, \\ 3x_1 + 2x_2 = 7. \end{cases}$$

解 由于

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1\times 2 - (-2)\times 3 = 8 \neq 0,$$

则方程组有解. 又由于

$$\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = (-3)\times 2 - (-2)\times 7 = 8,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 1\times 7 - (-3)\times 3 = 16,$$

因此方程组的解为

$$x_1 = \frac{8}{8} = 1, \quad x_2 = \frac{16}{8} = 2.$$

例 1.2 计算三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 3 & 2\end{vmatrix}.$$

解 $D=1\times0\times2+2\times1\times1+3\times(-1)\times3-3\times0\times1-2\times(-1)\times2-1\times1\times3$

$=-6$.

下面要给出 n 阶行列式的定义, 为此, 再考察一下二、三阶行列式. 为方便, 横排称为**行**, 竖排称为**列**. 在二阶行列式中, 每一项都是既不同行又不同列的两个元素之积, 且恰好包含全部 $2!$ 个这样的项. 类似地, 在三阶行列式中, 每一项也都是既不同行又不同列的三个元素之积, 也恰好包含全部 $3!$ 个这样的项.

一般地, n 阶行列式记为

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix},$$

它是由 n^2 个数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 排成的并在两侧框以竖线的正方形数表, 记为 D. 类似于二、三阶行列式, 其横排自上而下依次称为**第 1 行, 第 2 行**, $\cdots$, **第 n 行**; 其竖排由左至右依次称为**第 1 列, 第 2 列**, $\cdots$, **第 n 列**. $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 称为行列式 D 的第 i 行第 j 列**元素**. i,j 依次称为元素 a_{ij} 的**行标**与**列标**. 由二、三阶行列式的定义可以想象到, D 的展开式中的一般项也应是 n 个既不同行又不同列的 n 个元素的乘积, 并且恰好包含全部 $n!$ 个这样的项. 问题是如何确定每一项的符号. 当 $n\geqslant4$ 时, 前面的对角线法显然已不再适用, 为此先引入 n 阶排列这一概念.

由 $1,2,\cdots,n$ 这 n 个数码排成的有序数组称为一个 **n 阶排列**. 例如 2, 1, 3; 1, 5, 2, 4, 3 分别是 3 阶排列和 5 阶排列.

在一个 n 阶排列中, 如果较大的数码 j 排在较小的数码 i 的前面, 则称 i,j 二数码构成此 n 阶排列的一个**逆序**, 记为 (j,i). 逆序的总数称为此 n 阶排列的**逆序数**. 例如 5 阶排列 1, 5, 2, 4, 3 就有 (5, 2), (5, 4), (5, 3), (4, 3) 4 个逆序; 故 5 阶排列 1, 5, 2, 4, 3 的逆序数为 4, 记为 $\tau(1,5,2,4,3)=4$. 一般地, n 阶排列 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 的逆序数记为 $\tau(p_1,p_2,\cdots,p_n)$. 计算一个 n 阶排列的逆序数时, 为避免重复计算或遗漏某个逆序, 最好按某种次序去进行计算. 此外, 我们把逆序数为偶数的 n 阶排列称为**偶排列**; 逆序数为奇数的 n 阶排列称为**奇排列**. 按此定义, 上面的 2, 1, 3 与 1, 5, 2, 4, 3 便分别是奇排列和偶排列.

下面给出 n 阶行列式的定义.

定义 1.1

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n},$$

其中 $t=\tau(p_1,p_2,\cdots,p_n)$，求和指对所有的 n 阶排列 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 求和，其值称为行列式 D 的**值**.

按此定义易知

(1) D 是一个代数和;

(2) 和中的每一项都是取自 D 的 n 个不同的行及 n 个不同的列的 n 个元素的乘积，这样的项共 $n!$ 个，D 恰好是这 $n!$ 个项的代数和;

(3) 项 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 的符号为 $(-1)^{\tau(p_1,p_2,\cdots,p_n)}$，即在行标排列成自然顺序时，若列标排列 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 为偶排列，则此项取正号，而当 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 为奇排列时此项取负号.

定义中的 n 阶行列式通常简记为 $\det(a_{ij})$.

容易验证，当 $n=2,3$ 时，定义 1.1 也适用于前面的二、三阶行列式.

至于一阶行列式 $|a|$，按定义显然有 $|a|=a$.

在 n 阶行列式中，与二、三阶行列式一样，由左上角元素至右下角元素的连线称为行列式的**主对角线**，由右上角元素至左下角元素的连线称为行列式的**次对角线**.

例 1.3 证明

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

证明 因行列式是一个代数和，故在求其值时不必考虑那些值为零的项. 设 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 是行列式中不为零的项，这些因子从左至右依次取自 n 个不同的行. 因 $a_{12},\cdots,a_{1n}$ 全为零，故此项取自第一行的因子只能是 a_{11}，否则此项必为零. 即 $a_{1p_1}=a_{11}$. 再看取自第二行的因子 a_{2p_2}，显然 a_{2p_2} 不能是 a_{21}，因为 a_{21} 与 a_{11} 在同一列；可是又因为 $a_{23},\cdots,a_{2n}$ 全为零，故 a_{2p_2} 只能是 a_{22}，否则此项必为零. 如此下去即知，除 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 外，所有的项全为零. 而此项的符号显然为正，因此 $D_n=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$. 证毕.

上面这种类型的行列式称为**下三角形行列式**. 类似地, 称下面这种类型的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

为**上三角形行列式**. 同理可证其值也为 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$. 下三角形行列式与上三角形行列式可统称为**三角形行列式**. 它们的值都等于主对角线上的 n 个元素之积. 三角形行列式的特例是所谓**对角形行列式**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

其值自然也等于主对角线上的 n 个元素之积.

习题 1.1

1. 已知 $abcdef$ 为标准次序, 求 $bcadfe$ 的逆序数.

2. 写出四阶行列式

$$D_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

中同时包含 a_{12} 和 a_{31} 的项.

3. 计算下列二、三阶行列式.

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} a & b \\ a^2b & ab^2 \end{vmatrix}$; (3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$;

(4) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}$; (5) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}$; (6) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$.

4. 解方程 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & x \\ 3 & x & 0 \\ -1 & 0 & x \end{vmatrix} = 0$.

习题 1.1 解答

1.2 行列式的性质

为了有效地计算一给定行列式的值, 本节讨论行列式的性质.

引理 2.1 互换 n 阶排列任意二数码的位置, 则排列的奇偶性变更.

注 引理 2.1 的证明见 1.5 节.

设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad D'=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

称 D' 为 D 的**转置行列式.**

性质 2.1 $D'=D$.

注 性质 2.1 的证明见 1.5 节.

由性质 2.1 可知, 若某命题对于行列式的行成立, 则对于列也同样成立, 反之亦然.

性质 2.2 互换行列式的某两行(或列), 行列式仅变符号.

注 性质 2.2 的证明见 1.5 节.

推论 2.1 行列式若有两行(或列)相同, 则其值为零.

证明 设性质 2.2 证明中 D 的 i,j 两行相同, 则由 $D=D_1=-D$, $2D=0$ 即知.

性质 2.3 行列式的某行(或列)的各元素乘以数 k 等于用数 k 乘以行列式.

证明 设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

往证 $D_1=kD$. 而这由行列式的定义直接便可得到

$$\begin{aligned} D_1 &= \sum (-1)^{\tau(p_1\cdots p_i\cdots p_n)} a_{1p_1}\cdots ka_{ip_i}\cdots a_{np_n} \\ &= k\sum (-1)^{\tau(p_1\cdots p_i\cdots p_n)} a_{1p_1}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n} \\ &= kD. \end{aligned}$$

推论 2.2 行列式的某行(或列)各元素的公因子可以提到行列式符号外面相乘.

推论 2.3 若行列式的某两行(或列)的对应元素成比例, 则行列式的值等于零.

此由推论 2.1 与推论 2.2 即知.

性质 2.4 设

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \cdots & \alpha_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \beta_{i1} & \beta_{i2} & \cdots & \beta_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{i1}+\beta_{i1} & \alpha_{i2}+\beta_{i2} & \cdots & \alpha_{in}+\beta_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

则 $D=D_1+D_2$. 这里, 三个行列式除第 i 行外的元素完全相同. 对于列也有相应的结论.

证明
$$\begin{aligned} D &= \sum(-1)^{\tau(p_1\cdots p_i\cdots p_n)}a_{1p_1}\cdots(\alpha_{ip_i}+\beta_{ip_i})\cdots a_{np_n} \\ &= \sum(-1)^{\tau(p_1\cdots p_i\cdots p_n)}a_{1p_1}\cdots\alpha_{ip_i}\cdots a_{np_n}+\sum(-1)^{\tau(p_1\cdots p_i\cdots p_n)}a_{1p_1}\cdots\beta_{ip_i}\cdots a_{np_n} \\ &= D_1+D_2 . \end{aligned}$$

性质 2.5 行列式的某行(或列)的各元素乘以数 k 加到另一行(或列)的对应元素上, 行列式的值不变.

此由性质 2.5 与推论 2.3 即知.

一般情况下, 行列式的定义不适用于计算行列式. 因为它的展开式太复杂, 即使是四阶行列式也含有 $4!=24$ 项, 并且每一项都有个确定符号的问题. 利用行列式的性质把给定的行列式化成三角形行列式, 再利用三角形行列式之值等于主对角线元素之积是计算行列式的常用方法.

为行文简便, 引入以下记号:

$r_i \leftrightarrow r_j (c_i \leftrightarrow c_j)$ 表示互换行列式的 i, j 两行(两列);

$r_i + kr_j \left(c_i + kc_j\right)$ 表示把行列式的第 j 行(列)各元素的 k 倍加到第 i 行(列)的对应元素上;

$r_i \to k (c_i \to k)$ 表示把行列式第 i 行(列)各元素的公因子 k 提到行列式符号外面相乘.

例 2.1　计算下列行列式.

(1) $D=\begin{vmatrix}101 & 100 & 204\\ 199 & 200 & 395\\ 303 & 300 & 600\end{vmatrix}$;　　(2) $D=\begin{vmatrix}2 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 2\end{vmatrix}$;

(3) $D_n=\begin{vmatrix}x & a & \cdots & a\\ a & x & \cdots & a\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a & a & \cdots & x\end{vmatrix}$;

(4) $D=\begin{vmatrix}a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2\\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2\\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2\\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2\end{vmatrix}$;

(5) $D_n=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n\\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n\end{vmatrix}$.

解　(1) $D=\begin{vmatrix}101 & 100 & 204\\ 199 & 200 & 395\\ 303 & 300 & 600\end{vmatrix}\xlongequal{c_1-c_2,c_3-2c_2}\begin{vmatrix}1 & 100 & 4\\ -1 & 200 & -5\\ 3 & 300 & 0\end{vmatrix}$

$$\xlongequal{c_2\to 100}100\begin{vmatrix}1 & 1 & 4\\ -1 & 2 & -5\\ 3 & 3 & 0\end{vmatrix}\xlongequal{r_2+r_1,r_3-3r_1}100\begin{vmatrix}1 & 1 & 4\\ 0 & 3 & -1\\ 0 & 0 & -12\end{vmatrix}$$

$$=100\cdot 1\cdot 3\cdot(-12)=-3600.$$

(2) $D=\begin{vmatrix}2 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 2\end{vmatrix}\xlongequal{c_1+c_2+c_3+c_4}\begin{vmatrix}5 & 1 & 1 & 1\\ 5 & 2 & 1 & 1\\ 5 & 1 & 2 & 1\\ 5 & 1 & 1 & 2\end{vmatrix}$

$$\xlongequal{c_1\to 5}5\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 2\end{vmatrix}\xlongequal{r_2-r_1,\ r_3-r_1,\ r_4-r_1}5\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=5.$$

(3) $$D_n=\begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix} \xlongequal{c_1+c_2+\cdots+c_n} \begin{vmatrix} x+(n-1)a & a & \cdots & a \\ x+(n-1)a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x+(n-1)a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$=\left[x+(n-1)a\right]\begin{vmatrix} 1 & a & \cdots & a \\ 1 & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a & \cdots & x \end{vmatrix}=\left[x+(n-1)a\right]\begin{vmatrix} 1 & a & \cdots & a \\ 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}$$

$$=\left[x+(n-1)a\right](x-a)^{n-1}.$$

(4) $$D=\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_2-c_1,c_3-c_1,c_4-c_1}\begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 4a+4 & 6a+9 \\ b^2 & 2b+1 & 4b+4 & 6b+9 \\ c^2 & 2c+1 & 4c+4 & 6c+9 \\ d^2 & 2d+1 & 4d+4 & 6d+9 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_3-2c_2,c_4-3c_2}\begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2 & 6 \\ b^2 & 2b+1 & 2 & 6 \\ c^2 & 2c+1 & 2 & 6 \\ d^2 & 2d+1 & 2 & 6 \end{vmatrix}=0.$$

(5) $$D_n=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_1-\frac{1}{2}c_2-\frac{1}{3}c_3-\cdots-\frac{1}{n}c_n}\begin{vmatrix} a_1-\dfrac{a_2}{2}-\dfrac{a_3}{3}-\cdots-\dfrac{a_n}{n} & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}$$

$$=\left(a_1-\frac{a_2}{2}-\frac{a_3}{3}-\cdots-\frac{a_n}{n}\right)n!$$

(5) 中的行列式可称为**“箭形”**行列式.

对于行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

若对 $\forall i,j(1\leqslant i,j\leqslant n)$ 都有 $a_{ji}=-a_{ij}$，则称 D 为**反对称行列式**. 易知, 反对称行列式关于主对角线对称位置的两个元素互为相反数, 并且主对角线上的元素全为零.

例 2.2 证明奇数阶反对称行列式的值为零.

证明 设 D 为 n 阶反对称行列式, 则由反对称行列式的定义及推论 2.2 可知

$$D=\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & -a_{21} & \cdots & -a_{n1} \\ -a_{12} & 0 & \cdots & -a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \cdots & 0 \end{vmatrix}=(-1)^n\begin{vmatrix} 0 & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & 0 & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & 0 \end{vmatrix},$$

再由性质 2.1 可知

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & 0 & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 0 \end{vmatrix}=D,$$

因此上式可写作 $D=(-1)^n D$.

故当 n 是奇数时，$D=-D$，即知 $D=0$.

习题 1.2

计算下列行列式.

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$;　　(2) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 2 \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 914 & 643 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{vmatrix}$;　　(4) $\begin{vmatrix} -ab & ac & ae \\ bd & -cd & de \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix}$;

习题 1.2 解答