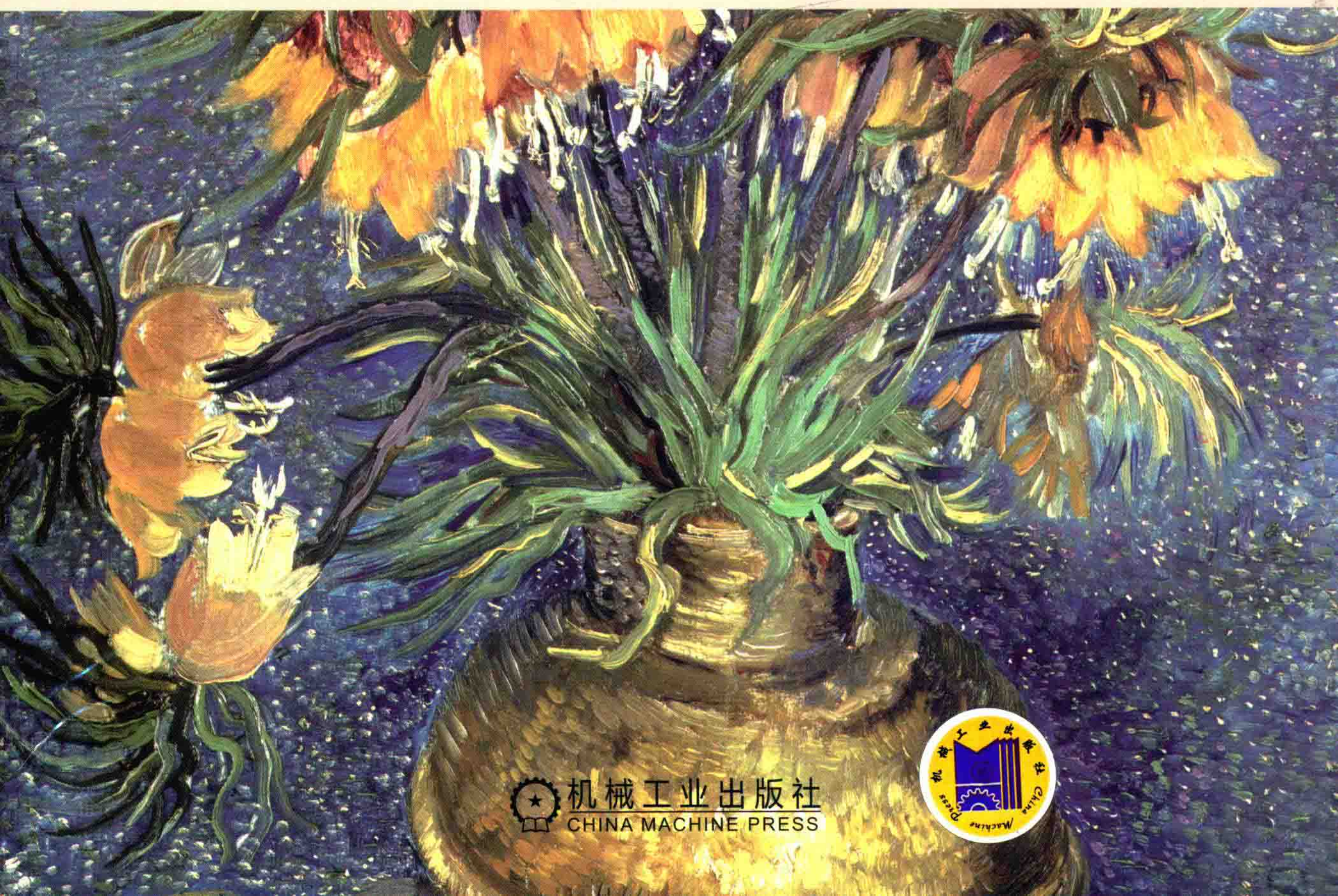
“十三五”国家重点出版物出版规划项目

名校名家基础学科系列
Textbooks of Base Disciplines from Top Universities and Experts

工科数学分析 上册

MATHEMATICAL ANALYSIS FOR ENGINEERING

孙兵　毛京中　主编



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

“十三五”国家重点出版物出版规划项目

名校名家基础学科系列

工科数学分析

上册

主　编　孙　兵　毛京中

参　编　朱国庆　姜海燕

机 械 工 业 出 版 社

本书是“工科数学分析”或“高等数学”课程教材，分为上、下两册。上册以单变量函数为主要研究对象，内容包括函数、极限与连续，导数与微分，微分中值定理与导数的应用，定积分与不定积分，常微分方程。下册侧重刻画多变量函数，从向量代数与空间解析几何开始，学习多元函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分，最后介绍无穷级数。

本书结构严谨，逻辑清晰，阐述细致，浅显易懂，可作为高等院校非数学类理工科专业的本科教材，也可作为高等数学教育的参考教材和自学用书。

图书在版编目(CIP)数据

工科数学分析. 上册 / 孙兵，毛京中主编. —北京：机械工业出版社，2018.4

“十三五”国家重点出版物出版规划项目 名校名家基础学科系列

ISBN 978-7-111-58912-9

Ⅰ.①工… Ⅱ.①孙… ②毛… Ⅲ.①数学分析—高等学校—教材 Ⅳ.①O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 087412 号

机械工业出版社(北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)
策划编辑：韩效杰 责任编辑：韩效杰 李 乐
责任校对：王 延 封面设计：鞠 杨
责任印制：孙 炜
保定市中画美凯印刷有限公司印刷
2018 年 7 月第 1 版第 1 次印刷
184mm×260mm · 23.5 印张 · 592 千字
标准书号：ISBN 978-7-111-58912-9
定价：59.80元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务
服务咨询热线：010-88379833
读者购书热线：010-88379649

网络服务
机 工 官 网：www.cmpbook.com
机 工 官 博：weibo.com/cmp1952
教育服务网：www.cmpedu.com
金 书 网：www.golden-book.com

特别说明

作者团队将历史和人物简介、注解、部分习题详解、知识点总结等学习材料作为学习任务，设置在移动互联网上。读者可通过“书伴”APP扫描页码上的二维码来查看相应内容。

本书中，读者会发现很多页的二维码暂时还没有设置学习任务。不同于其他二维码，本书的二维码用于为APP定位，以便知道读者正在阅读哪一页。同时，这些二维码也为作者团队在课程讲授过程中持续优化学习任务设置预留了接口。读者在扫描了没有设置学习任务的二维码之后，会在“书伴”APP中看到左右各有两个圆形半透明页码按钮，提示上一个和下一个设有学习任务的页码。点击这两个按钮即可直接访问相应页的学习任务，不必每次都扫描二维码。

前　言

工科数学分析是一门重要的大学基础课程，包括微积分的基本知识、向量代数与空间解析几何、常微分方程，其他方面各类课本略有差异。它能和中学的数学衔接起来，高深而略能欣赏，从而使学生获得解决实际问题能力的初步训练，为学习后继课程奠定必要的数学基础。微积分是文艺复兴和科技革命以来最伟大的创造，被誉为人类精神的最高胜利。牛顿靠微积分成就了牛顿力学，大部分科学上的成就也都需用到微积分。解析几何是学习多变量微积分的重要准备，其知识结构也自成体系。常微分方程作为微积分的重要应用之一，它的形成与发展是和力学、天文学、物理学，以及其他科学技术的发展密切相关的。数学的其他分支的新发展，如复变函数、李群、组合拓扑学等，都对常微分方程的发展产生了深刻的影响，当前计算机的发展更是为常微分方程的应用及理论研究提供了强有力的工具。

数学的重要性不言而喻，很多著名学者对此都做出过深刻的评价。“数学王子”高斯(Carl Friedrich Gauss，1777—1855)说：数学是“科学之王”。德国物理学家伦琴(Wilhelm Conrad Röntgen，1845—1923)，在回答科学家需要怎样的修养时说：第一是数学，第二是数学，第三还是数学。复旦大学数学家李大潜院士说：数学学习的本质是提高素质。美国国家科学奖章获得者，瑞士苏黎世联邦理工学院数学家卡尔曼(Kálmán Rudolf Emil)在2005年国际自动控制联合会的世界大会上曾评论到：高技术的本质是一种数学技术。

国家安全依赖于数学科学。不论是密码学、网络科学与技术，还是大规模科学计算，没有数学知识的幕后支持，这些学科哪一门可以走得远呢？军政部门的数据决策、后勤保障、模拟训练和测试、军事演习、图像和信号分析、卫星和航天器的控制、新设备的测试和评估、威胁检测，离了数学，又有哪一个可以行得通呢？

即使是从文化的角度来看，数学的作用也是无处不在的。我们以折纸这一古老而有趣的文化为例，对此进行简要的说明。折纸背后的数学公理系统、在计算上的算法和软件开发，对于人们的生产、生活产生了重大的影响。人们将其应用到卫星太阳能帆板、汽车安全气囊的折叠和展开，人造血管支架乃至轮胎纹理的设计等方面，取得了巨大的成功。这种纯粹基于兴趣的，看起来毫无实际用途的研究，以出乎人们意料的方式在现实生活中产生了巨大的应用价值。

确实，人类正使用数学以前所未有的力度改变着整个世界，不论是用傅里叶变换分析音乐和弦，还是用计算流体力学技术设计新型足球，我们生活的方方面面正受益于数学的应用。在网络搜索、基因工程、地质勘探、现代医学、气候研究、电子设备开发等幕后，数学一直都在。如果想了解世界是怎样运转的，我们必须明白数学的作用，学习它，了解它，掌

握它。我们不应只满足于科学的应用，更应去追问所做事情中的原理。

本书作为“十三五”国家重点出版物出版规划项目，隶属于“名校名家基础学科”系列。全书分为上、下两册。上册以单变量函数为主要研究对象，内容包括函数、极限与连续，导数与微分，微分中值定理与导数的应用，定积分与不定积分，常微分方程。下册侧重刻画多变量函数，从向量代数与空间解析几何开始，学习多元函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分，最后介绍无穷级数。一句话，工科数学分析的主要目的就是以极限为工具，研究函数的分析运算性质。从上册的单变量函数开始，到下册的多变量函数完结。在难度设置上，工科数学分析弱于数学系本科生学习的数学分析，强于一般非数学专业的理工科学生必修的微积分或高等数学。

和传统教材不同的是，本书配套有可供手机或平板电脑上使用的书伴 APP。作为全新的移动学习型教材，我们综合使用这种新媒介作为作者和读者的全方位交互平台，实现了传统纸质教材和网络互联平台的有机结合。利用手机或平板电脑扫描教材每页预留的二维码，读者可以得到与该页内容相关的资源，如教材重要内容展开、有关数学实验、图片、动画、思考题答案、视频资料以及学术讲座等内容。而且，这些内容可以跟随使用情况随时进行动态增添修改。同时，借助于这种移动终端，学生还可以在平台上提供的讨论与提问板块，直接和作者、同学及专业老师进行沟通和提问；教师在平台上可以在线答疑，有共性的问题可以吸纳为习题，个性的问题也能马上解决。我们希望这种新颖的互动学习方式可以提高学生的学习兴趣，有效地避免学习疲劳。换言之，我们希望教材是动态的、开放的，是具有完全状态反馈形式的“闭环系统”，是由读者和作者共同编写完成的。这一点对于以往的传统教材来说是不可想象的。在使用本书的过程中，读者若有任何建议或意见，也可以通过该平台直接反映给我们，或者给我们发电子邮件(sun345@bit.edu.cn)联络，在此提前表示感谢。

本书的完成得益于收到的众多支持和无私帮助，在此致以诚挚的谢意。特别感谢北京理工大学的田玉斌教授、蒋立宁教授的指导和帮助。

受限于编者水平，书中定有不少错误和不妥之处，恳请读者不吝批评指正。

孙　兵　毛京中　朱国庆　姜海燕

于北京理工大学

目　　录

第一章 函数、极限与连续

数学中专门研究函数的领域叫数学分析.函数是数学分析的研究对象,极限是数学分析的基础,也是数学分析的重要思想方法.极限使我们可以用均匀去逼近不均匀,用规则的几何量去逼近不规则的几何量,用有限去研究无穷,将近似值转化为精确值.数学分析的主要概念几乎都是用极限定义的.本章主要讨论函数、极限与连续的概念,极限与连续的性质,极限的计算方法.

第一节 函　　数

一、函数概念

1. 函数

客观世界中的数量一般可以分为两种:常量与变量.在考察过程中保持不变的量称为常量,在考察过程中会起变化的量称为变量.在同一个问题中,往往同时出现两个或多个变量,并且它们的变化是相互关联的,函数就是反映客观世界中量与量之间的变化关系的.

定义 1　**设 X,Y 是两个非空数集,如果对每个 $x\in X$,按照某种确定的法则 f,有唯一的 $y\in Y$ 与之对应,则称 f 是 X 上的函数,或说 y 是 x 的函数,记作 $y=f(x)$.其中 x 称为自变量,y 称为因变量,数集 X 称为函数 f 的定义域.当 x 取遍 X 中的一切数时,相应的函数值的集合称为 f 的值域.**

y 是 x 的函数也可记作 $y=y(x)$.当自变量 x 的值取为 $x_0\in X$ 时,函数 $y=f(x)$ 的对应值 $f(x_0)$ 称为函数值,$f(x_0)$ 也可以写成 $y|_{x=x_0}$ 或 $y|_{x_0}$.

在函数的定义中,我们要求对每个 $x\in X$,有唯一的 $y\in Y$ 与之对应,这样定义的函数 f 又称为**单值函数**.例如,$y=\sin x$,$y=x^2$ 都是单值函数.如果与 x 相对应的 y 值不总是唯一的,则 y 称为 x 的**多值函数**.以后如果不做特别说明,则所提到的函数都是指单值函数.

如果两个函数的定义域相同，对应法则也相同，那么这两个函数就是相同的，否则就是不同的.例如，$y=\ln x^2$ 与 $y=2\ln x$ 是不同的函数，因为它们的定义域不相同.$y=x$ 与 $y=\sqrt{x^2}$ 也是不同的函数，因为它们的对应法则不相同.

确定函数的定义域通常分两种情形.如果函数是有实际背景的，则应根据问题的实际意义来确定它的定义域.例如，球的体积 V 与半径 r 之间具有函数关系 $V=\frac{4}{3}\pi r^3$，根据实际意义，函数的定义域，即半径的取值范围应为 $r\geqslant 0$.如果函数是用抽象的算式表达的，而没有实际背景，则函数的定义域是使得算式有意义的一切实数组成的集合，这种定义域称为自然定义域.例如，函数 $y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的自然定义域为满足 $1-x^2>0$ 的一切 x 的集合，即开区间$(-1,1)$.

函数的对应法则，也叫作函数关系或对应律，常用三种方法表示：数值法（又称列表法）、几何法（又称图形法）、解析法（又称公式法）.这些内容在中学已学过，此处不再详细叙述.

2. 区间与邻域

微积分中所研究的函数，其定义域通常是由一个或若干个区间组成的.区间分为有限区间和无穷区间.

有限区间包括：

开区间　　$(a,b)=\{x\,|\,a<x<b\}$，

闭区间　　$[a,b]=\{x\,|\,a\leqslant x\leqslant b\}$，

左开右闭区间　　$(a,b]=\{x\,|\,a<x\leqslant b\}$，

左闭右开区间　　$[a,b)=\{x\,|\,a\leqslant x<b\}$.

无穷区间包括：$(a,+\infty)=\{x\,|\,x>a\}$，$[a,+\infty)=\{x\,|\,x\geqslant a\}$，
$(-\infty,b)=\{x\,|\,x<b\}$，$(-\infty,b]=\{x\,|\,x\leqslant b\}$，
$(-\infty,+\infty)=\{x\,|\,-\infty<x<+\infty\}$.

以上各种区间中的 a 和 b 称为区间的端点，其中 a 称为左端点，b 称为右端点，属于区间但不是端点的点称为区间的内点.

当我们研究函数在一点处的某种特性时，常常要用到函数在这一点附近某一区间的函数值.为以后叙述方便，先定义一个概念.

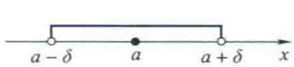


图 1-1

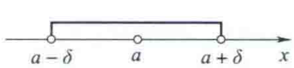


图 1-2

我们将开区间$(a-\delta,a+\delta)=\{x\,\|\,x-a\,|<\delta\}$$(\delta>0)$称为点 a 的 δ 邻域，记作 $N(a,\delta)$，其中 a 叫作邻域的中心，δ 叫作邻域的半径（见图 1-1）.

如果在 $N(a,\delta)$ 中去掉点 a，所得数集$\{x\,|\,0<|x-a|<\delta\}$叫作 a 的去心 δ 邻域（见图 1-2）.

3. 分段函数、隐函数

在函数的定义中，并不要求在整个定义域上只能用一个表达式来表示对应法则.在很多问题中常常会遇到这种情况，在定义域的

不同区间上用不同的表达式来表示对应法则，这种函数叫作分段函数.下面是几个分段函数的例子.

例 1　某种商品每件出厂价 90 元，成本 60 元.厂家为鼓励销售商大量采购，决定凡是订购量超过 100 件以上的，每多订购一件，售价就降低 1 分（例如订购 300 件，订购量比 100 件多出 200 件，于是每件降价 $0.01\times200=2$（元），即销售商可以每件 88 元订购 300 件），但最低价为每件 75 元.设 x 表示订购量，p 表示实际售价，则 p 与 x 之间的函数关系为

$$p=\begin{cases}90, & x\leqslant 100,\\ 90-0.01\times(x-100), & 100<x<1600,\\ 75, & x\geqslant 1600.\end{cases}$$

例 2　绝对值函数 $y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant0,\\ -x, & x<0,\end{cases}$ 其定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $[0,+\infty)$.

例 3　符号函数，其定义如下：

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$$

它的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $\{-1,0,1\}$，其图形如图 1-3 所示.

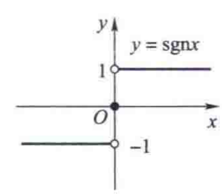


图　1-3

例 4　取整函数.我们用符号 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，即如用 k 表示整数，则当 $k\leqslant x<k+1$ 时，$[x]=k$.

例如，$[\sqrt{2}]=1$，$\left[\dfrac{1}{3}\right]=0$，$[-1.3]=-2$.

取整函数 $y=[x]$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为整数集，其图形如图 1-4 所示.

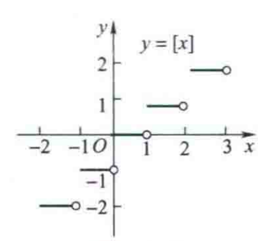


图　1-4

例 5　狄利克雷函数

$$y=f(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数},\\ 0, & x\text{ 为无理数}.\end{cases}$$

这个函数的图形是画不出来的，它有无数个点分布在 x 轴上，也有无数个点分布在直线 $y=1$ 上.

从函数的表示形式来看，又可分为显函数和隐函数.如果 y 是 x 的函数关系可以写成 $y=f(x)$ 的形式，则称其为显函数.例如：$y=x^2$，$y=\ln x$ 都是显函数.如果 y 与 x 之间的函数关系是用一个二元方程确定的，例如：

$$3x+5y-1=0,\quad x^2+y^2=1,\quad y=x\mathrm{e}^{x+y},\quad xy+\sin\frac{y}{x}=0$$

都确定了 y 是 x 的函数，这样的函数称为隐函数.

实际上，显函数与隐函数并没有严格的界限，有时可以从隐函

数解出显函数来.例如,由 $3x+5y-1=0$,可以解出 $y=\dfrac{1-3x}{5}$,由 $x^2+y^2=1$,可以解出 $y=\sqrt{1-x^2}$ 或 $y=-\sqrt{1-x^2}$.也有些隐函数无法化成显函数.例如,$xy+\sin\dfrac{y}{x}=0$ 即如此,但是 y 与 x 之间的函数关系是确实存在的.后面有些数学分析的理论与计算是专门针对隐函数的.

二、函数的几种特性

先约定一些简单的符号."$\exists$"表示存在,例如,存在正数 M,可以简单写成 $\exists M>0$."$\forall$"表示任意,例如,任意 $x\in I$,可以简写成 $\forall x\in I$.

1. 有界性

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义,如果 $\exists M>0$,使得对 $\forall x\in I$,都有 $|f(x)|\leqslant M$,则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上有界,如果这样的 M 不存在,则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上无界.

例如,$y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界,因为对 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$,都有 $|\sin x|\leqslant 1$.

又如,$y=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $[1,2)$ 上是有界的,因为对 $\forall x\in[1,2)$,都有 $\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 1$.但此函数在区间 $(0,1)$ 内是无界的,因为不论我们将正数 M 取得多么大,都 $\exists x\in(0,1)$,使得 $\left|\dfrac{1}{x}\right|>M$.

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义,如果 $\exists M_1$,使得对 $\forall x\in I$,都有 $f(x)\leqslant M_1$,则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上有上界.如果 $\exists M_2$,使得对 $\forall x\in I$,都有 $f(x)\geqslant M_2$,则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上有下界.

例如,$y=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(-\infty,0)$ 上有上界,但没有下界.$y=|x|$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上有下界,但没有上界.

容易证明,$f(x)$ 在区间 I 上有界的充分必要条件是它在 I 上既有上界又有下界.

2. 单调性

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义,如果对 $\forall x_1,x_2\in I$,$x_1<x_2$,都有 $f(x_1)<f(x_2)$,则称 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的.如果对 $\forall x_1,x_2\in I$,$x_1<x_2$,都有 $f(x_1)>f(x_2)$,则称 $f(x)$ 在区间 I 上是单调减少的.单调增加函数与单调减少函数统称单调函数.

例如,函数 $y=x^2$ 在 $(-\infty,0]$ 上是单调减少的,在 $[0,+\infty)$ 上是单调增加的.

上面定义的单调函数又称严格单调函数.如果将定义中的 $f(x_1)<f(x_2)$(或 $f(x_1)>f(x_2)$)换成 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$(或

$f(x_1) \geqslant f(x_2)$)，则 $f(x)$ 仍可看成是单调函数，但是被称为不严格单调函数.如果没有特别说明，以后所提到的单调函数都是指严格单调函数.

3. 奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，如果对 $\forall x \in D$，都有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数.如果对 $\forall x \in D$，都有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数.

偶函数的图形关于 y 轴是对称的，奇函数的图形关于原点是对称的，即右半平面的图形绕原点旋转 $180°$ 后与左半平面的图形重合.

例如，$y=|x|$ 是偶函数，$y=\tan x$ 是奇函数，$y=2^x$ 既不是奇函数，也不是偶函数.

4. 周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果存在不为零的数 T，使得对 $\forall x \in D$，都有 $x \pm T \in D$，且 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为周期函数，T 称为 $f(x)$ 的周期，通常我们所说的周期指的是最小正周期.

例如，$y=\sin x$，$y=\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数，$y=\tan x$ 是以 π 为周期的周期函数.

并非每个函数都有最小正周期.例如，$f(x)=5$ 是周期函数，任何一个实数都是它的周期，但它没有最小正周期.

三、函数的运算

同数一样，函数也可以做加、减、乘、除、幂运算.

设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域分别为 D_1，D_2，$D=D_1 \cap D_2$ 是非空数集，则我们可以在 D 上定义这两个函数的下列运算：

函数的和 $f+g$，定义为 $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$.

函数的差 $f-g$，定义为 $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$.

函数的积 $f \cdot g$，定义为 $(f \cdot g)(x)=f(x) \cdot g(x)$.

函数的商 $\dfrac{f}{g}$，定义为 $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}\ (g(x) \neq 0)$.

函数的幂 f^m，定义为 $f^m(x)=[f(x)]^m\ (m \neq -1)$.

四、反函数与复合函数

1. 反函数

研究客观事物，往往要从正反两方面来研究.我们知道，函数 $y=f(x)$ 表明 y 是怎样随 x 而变化的.但变量之间的制约关系是相互的，自变量与因变量之间的关系是相对的，有时需要反过来研究 x 是怎样随 y 而变化的问题，这样就产生了反函数的概念.例如，对初速度为零的自由落体运动，有如下关系 $s=\dfrac{1}{2}gt^2$，即路程是时间

的函数，但有时要反过来把时间看作路程的函数，由上式解得 $t=\sqrt{\frac{2s}{g}}$，我们将 $t=\sqrt{\frac{2s}{g}}$ 称为 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 的反函数.一般地，我们给出反函数的定义如下.

定义 2 **设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 X，值域为 Y，如果对 $\forall y\in Y$，在 X 中只有唯一一个 x 与之对应，从而 x 与 y 之间构成一一对应，根据函数的定义，x 也是 y 的函数，此时 y 是自变量，x 是因变量，它是由 $y=f(x)$ 所产生的，称为 $y=f(x)$ 的反函数，记作 $x=f^{-1}(y)$.**

习惯上，常把自变量记作 x，因变量记作 y，于是 $y=f(x)$ 的反函数就记作 $y=f^{-1}(x)$.

反函数是相互的，如果 $y=f^{-1}(x)$ 是 $y=f(x)$ 的反函数，则 $y=f(x)$ 也是 $y=f^{-1}(x)$ 的反函数，即它们互为反函数.根据反函数的定义，有

$$f^{-1}(f(x))=x,\quad f(f^{-1}(x))=x.$$

在同一个直角坐标系中，$y=f(x)$ 与 $x=f^{-1}(y)$ 的图形显然是同一条曲线.而 $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的图形有什么关系呢？如果点 (x,y) 是曲线 $y=f(x)$ 上的点，则点 (y,x) 一定在曲线 $y=f^{-1}(x)$ 上，因此，曲线 $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 关于直线 $y=x$ 对称（见图 1-5）.

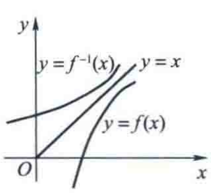


图 1-5

例如，$y=2x$ 的反函数是 $y=\frac{x}{2}$，它们的图形对称于直线 $y=x$.

由反函数的定义可知，并不是每个函数都有反函数.例如，$y=x^2, x\in(-\infty,+\infty)$ 没有反函数，因为对值域 $[0,+\infty)$ 中的每个 y，与之对应的 x 不是唯一的.但是当 $y=f(x)$ 是单调函数时，变量 y 与 x 之间一一对应，且 x 与 y 之间也一一对应，因此有下面的定理：

定理（反函数存在定理） **如果 $y=f(x)$ 是定义在 X 上的单调增加（或单调减少）函数，其值域为 Y，则必存在反函数 $x=f^{-1}(y)$，且反函数在 Y 上也是单调增加（或单调减少）的.**

2. 复合函数

两个函数有时会合在一起产生一个新的函数.例如，设有质量为 m 的物体，以初速度 v_0 向上抛出，则动能 T 与速度 v 的函数关系为 $T=\frac{1}{2}mv^2$，如果忽略空气阻力，速度 v 与时间 t 的函数关系为 $v=v_0-gt$，由此两式得知，T 与 t 的函数关系为

$$T=\frac{1}{2}m(v_0-gt)^2,$$

我们将此函数称为 $T=\frac{1}{2}mv^2$ 与 $v=v_0-gt$ 的复合函数.

一般地，有如下定义.

定义 3 **设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_1，$u=g(x)$ 的定义域为 D，值域为 $g(D)$，如果 $g(D)\subset D_1$，则由式 $y=f(g(x))$ 确定的函数称为 $y=f(u)$，$u=g(x)$ 的复合函数，常用 $f\circ g$ 表示这个函数，即**

$$(f\circ g)(x)=f(g(x)),$$

$(f\circ g)(x)$ 的定义域是 D，变量 u 称为中间变量.

同样可以定义由三个甚至更多个函数构成的复合函数.由定义可知，并非任意两个函数都能复合.例如，$y=\sqrt{u^2-2}$，$u=\sin x$ 就无法构成复合函数，因为 $u=\sin x$ 的值域中的每个值都不在 $y=\sqrt{u^2-2}$ 的定义域上.

例 6 设 $f(x)=\frac{x-3}{2}$，$g(x)=\sqrt{x}$，求 $(f\circ g)(x)$，$(g\circ f)(x)$.

解 $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(\sqrt{x})=\frac{\sqrt{x}-3}{2}$，

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g\left(\frac{x-3}{2}\right)=\sqrt{\frac{x-3}{2}},$$

由此可见，通常 $f\circ g\neq g\circ f$.

例 7 设 $f(x)=\begin{cases}1+x, & x<0,\\ 1+x^2, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 求 $(f\circ f)(x)$.

解 由 $f(x)<0$，即 $1+x<0$，得 $x<-1$，此时 $f(x)=1+x$.有两种情形可得到 $f(x)\geqslant 0$.一种情形是当 $x<0$，但 $x\geqslant -1$ 时，有 $f(x)=1+x\geqslant 0$，另一种情形是当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=1+x^2>0$，因此得

$$(f\circ f)(x)=\begin{cases}1+(1+x), & x<-1,\\ 1+(1+x)^2, & -1\leqslant x<0,\\ 1+(1+x^2)^2, & x\geqslant 0\end{cases}$$
$$=\begin{cases}2+x, & x<-1,\\ 2+2x+x^2, & -1\leqslant x<0,\\ 2+2x^2+x^4, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

例 8 分析函数 $y=[\arctan(2x-1)^5]^{10}$ 是由哪些简单函数复合而成的.

解 所给函数可以看作由

$$y=z^{10},\quad z=\arctan u,\quad u=v^5,\quad v=2x-1$$

复合而成的.

五、初等函数

下列六种函数统称为基本初等函数：

常数　　$y=C$(C 是常数).

幂函数　　$y=x^{\mu}$(μ 是实数).

指数函数　　$y=a^{x}$($a>0,a\neq 1$).

对数函数　　$y=\log_a x$($a>0,a\neq 1$).

三角函数　　$y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x$,

　　$y=\cot x, y=\sec x, y=\csc x$.

反三角函数　　$y=\arcsin x, y=\arccos x$,

　　$y=\arctan x, y=\operatorname{arccot} x$.

由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合所产生并且可用一个式子表示的函数称为初等函数.

例如，$y=\dfrac{1+e^{x}\sin x}{\sqrt{1-x^{2}}}$，$y=\ln(x+\sqrt{1+x^{2}})$，

$y=\arctan\dfrac{3x+2}{2}+5$，$y=|x|=\sqrt{x^{2}}$，　$y=x^{x}=e^{\ln x^{x}}=e^{x\ln x}$

都是初等函数.分段函数常常不是初等函数.

六、双曲函数与反双曲函数

1. 双曲函数

在初等函数中，有一类函数在电学、热学、声学、流体力学以及工程技术中很有用，这就是双曲函数.双曲函数是由指数函数 e^{x} 与 e^{-x} 构成的下列初等函数.

称$\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}$为双曲余弦，记作 $\operatorname{ch}x$，即 $\operatorname{ch}x=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}$.

称$\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}$为双曲正弦，记作 $\operatorname{sh}x$，即 $\operatorname{sh}x=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}$.

称$\dfrac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x}$为双曲正切，记作 $\operatorname{th}x$，即 $\operatorname{th}x=\dfrac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x}=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$.

显然，$\operatorname{sh}x$ 与 $\operatorname{th}x$ 是奇函数，$\operatorname{ch}x$ 是偶函数.由 $|\operatorname{th}x|=\left|\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\right|=\left|\dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}\right|$，可推知 $|\operatorname{th}x|<1$。

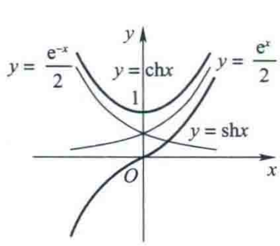


图 1-6

$y=\operatorname{ch}x$ 及 $y=\operatorname{sh}x$ 的图形可分别通过将 $y=\dfrac{e^{x}}{2}$与 $y=\dfrac{e^{-x}}{2}$的图形相加或相减得到(见图 1-6)。$y=\operatorname{th}x$ 的图形如图 1-7 所示.

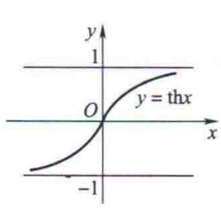


图 1-7

双曲函数有很多与三角函数类似的恒等式.

根据双曲函数的定义，有