全国煤炭高职高专（成人）“十二五”规划教材

工程数学

复变函数与积分变换

李国元 海 杰 主编

Gongcheng Shuxue

Fubian Hanshu Yu Jifen Bianhuan

中国矿业大学出版社

China University of Mining and Technology Press

全国煤炭高职高专(成人)“十二五”规划教材

工程数学
复变函数与积分变换

李国元　海　杰　主　编

中国矿业大学出版社

内容提要

本书内容包括：复数与复变函数、解析函数、复变函数积分、级数、留数、保角映射初步、Fourier 变换、Laplace 变换等内容。全书共八章，每章后配有一定量的习题和检测题。书后还有两个附录便于参考。

本书可以作为成人院校和高职高专的教材、有关工程技术人员自学的参考书，也可供工科高等院校的电类及与电类相关的各专业师生参考。

图书在版编目(CIP)数据

工程数学：复变函数与积分变换/李国元，海杰主编. —徐州：中国矿业大学出版社，2013.4

全国煤炭高职高专(成人)"十二五"规划教材

ISBN 978-7-5646-1831-5

Ⅰ.①工… Ⅱ.①李… ②海… Ⅲ.①工程数学—高等职业教育—教材 Ⅳ.①TB11

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 053706 号

书　　名　工程数学：复变函数与积分变换
主　　编　李国元　海　杰
责任编辑　张　岩
责任校对　周俊平
出版发行　中国矿业大学出版社有限责任公司
（江苏省徐州市解放南路　邮编 221008）
营销热线　(0516)83885307　83884995
出版服务　(0516)83885767　83884920
网　　址　http://www.cumtp.com　**E-mail**：cumtpvip@cumtp.com
印　　刷　徐州中矿大印发科技有限公司
开　　本　787×1092　1/16　**印张** 10.5　**字数** 257 千字
版次印次　2013 年 4 月第 1 版　2013 年 4 月第 1 次印刷
定　　价　18.00 元

全国煤炭高职高专(成人)“十二五”规划教材

基础类编审委员会成员名单

前　言

编者根据煤炭成人高职高专学生的实际情况和多年来在教学中积累起来的经验和体会，本着以培养基础扎实、勇于创新的人才为教学目的原则，编写了此书.

工程数学中的复变函数和积分变换是理工科院校相关专业的一门数学基础课.全书包括复数与复变函数、解析函数、复变函数积分、级数、留数、保角映射初步、Fourier 变换、Laplace 变换等八章内容.通过本课程的学习，不仅能学到复变函数和积分变换中的基本理论及工程技术中的常用数学方法，同时还可以巩固和复习高等数学的一些基础知识，为今后有关的后续课程的学习奠定必要的数学基础.本书的特点是:内容丰富，重点突出，通俗易懂.为了便于自学，本书对问题的阐述比较仔细，注意启发引导，力求深入浅出，语言确切简洁，注重理论与实际的结合.书中适当地增加了一些例题，书后配备了不同类型的习题和检测题，这样便于学生逐步地、系统地掌握教材的主要内容，进一步提高学生分析问题、解决问题的能力. 为了帮助读者更好地抓住学习的要点，提高学习质量和效率，我们在每一章末都编写了"小结"，除了对本章的主要内容、重点难点进行总结外，还对某些内容在概念与方法上做了进一步的阐述，以便读者更深入理解，牢固掌握.

参加本书编写的人员有李国元(复变函数部分)、海杰(积分变换部分).周延江、麻凤昌完成了全部习题和检测题的采集和整理工作.该书在编写过程中得到了辽宁工程技术大学理学院领导、数学系的领导和数学系同仁以及中国矿业大学出版社的大力支持和帮助，在此表示衷心的感谢.

由于编者的水平有限，书中的缺点和不妥之处难免存在，恳请专家、同行和广大读者批评指正.

编　者
2011 年 11 月

目 录

第一章 复数与复变函数 …… 1

第一节 复数及其代数运算 …… 1

第二节 复数的几何表示 …… 3

第三节 复数的乘幂与方根 …… 7

第四节 区域 …… 9

第五节 复变函数 …… 12

小结 …… 15

习题一 …… 16

检测题一 …… 17

第二章 解析函数 …… 19

第一节 解析函数的概念 …… 19

第二节 函数解析的充要条件 …… 22

第三节 初等函数 …… 25

小结 …… 29

习题二 …… 30

检测题二 …… 30

第三章 复变函数积分 …… 32

第一节 复变函数积分的概念 …… 32

第二节 柯西定理 …… 36

第三节 柯西定理的推广——复合闭路定理 …… 38

第四节 原函数与不定积分 …… 40

第五节 柯西积分公式 …… 42

第六节 高阶导数 …… 44

第七节 解析函数与调和函数的关系 …… 48

小结 …… 50

习题三 …… 52

检测题三 …… 53

第四章 级数 …… 55

第一节 复数项级数与复函数项级数 …… 55

第二节　幂级数 …… 58
第三节　泰勒级数 …… 62
第四节　洛朗级数 …… 65
小结 …… 69
习题四 …… 72
检测题四 …… 72

第五章　留数 …… 74
第一节　孤立奇点 …… 74
第二节　留数 …… 77
第三节　留数在定积分计算上的应用 …… 81
小结 …… 85
习题五 …… 86
检测题五 …… 87

第六章　保角映射初步 …… 89
第一节　保角映射的概念 …… 89
第二节　分式线性映射 …… 91
第三节　几个初等函数的映射 …… 95
小结 …… 99
习题六 …… 100
检测题六 …… 101

第七章　Fourier 变换 …… 102
第一节　Fourier 积分公式 …… 102
第二节　Fourier 变换 …… 107
第三节　Fourier 变换的性质 …… 113
小结 …… 118
习题七 …… 121
测试题七 …… 122

第八章　Laplace 变换 …… 124
第一节　Laplace 变换的概念 …… 124
第二节　Laplace 变换的性质 …… 127
第三节　Laplace 逆变换 …… 132
第四节　卷积 …… 135
第五节　Laplace 变换的应用 …… 136
小结 …… 139
习题八 …… 142

检测题八 …… 143

测试综合试题一 …… 145

测试综合试题二 …… 146

附录Ⅰ　Fourier 变换简表 …… 147

附录Ⅱ　Laplace 变换简表 …… 151

参考文献 …… 155

第一章　复数与复变函数

【本章重点】复数的有关概念；复数的各种表示方法；复数的运算；复变函数的极限和连续.
【本章难点】复数的辐角的概念；复数的运算；复数区域的表示；从映射的角度理解复变函数.
【学习目标】理解掌握复数的有关概念，特别是辐角的多值性；熟练掌握复数的各种运算——加减运算、乘除运算、乘幂和开方运算；准确理解复变函数的概念，注意和一元函数相类比；掌握复变函数的极限、连续的概念和性质；了解有界闭区域上复连续函数的性质.

复数是复变函数的基础.本章将介绍复数的概念、性质及运算，然后引入平面点集的概念，复变函数的概念及极限与连续.

第一节　复数及其代数运算

一、复数的概念

1. 虚数单位

我们知道方程 $x^2=-1$ 在实数集中无解，为了解方程的需要，引进新数 i，称为虚数单位，对虚数单位的规定：

(1) $i^2=-1$；

(2) i 可以与实数在一起按同样的法则进行四则运算.

一般地，如果 n 是正整数，则

$$i^{4n}=1,\quad i^{4n+1}=i,\quad i^{4n+2}=-1,\ i^{4n+3}=-i.$$

2. 复数

对于任意两个实数 x,y，我们称 $z=x+yi$ 为复数.其中 x 和 y 分别称为复数 z 的实部和虚部，记为 $x=\mathrm{Re}(z)$，$y=\mathrm{Im}(z)$.

当 $x=0$，$y\neq 0$ 时，$z=iy$ 称为纯虚数；当 $y=0$ 时，$z=x$，我们把它看做实数 x.

因此实数是复数的推广.特别 $0+i0=0$.

例 1　实数 m 取何值时，复数 $(m^2-3m-4)+(m^2-5m-6)i$ 为

(1) 实数；

(2) 纯虚数.

解　令 $x=m^2-3m-4$，$y=m^2-5m-6$，

(1) 如果复数是实数，则 $y=0$，由 $m^2-5m-6=0$ 可知

$m=6$ 或 $m=-1$.

(2) 如果复数是纯虚数，则 $x=0$，$y\neq 0$，

由 $m^2-3m-4=0$ 知，$m=4$ 或 $m=-1$.

但由 $y \neq 0$ 知 $m=-1$ 应舍去,即只有 $m=4$.

3. 两复数相等

两复数相等当且仅当它们的实部和虚部分别相等.

复数 z 等于 0 当且仅当它的实部和虚部同时等于 0. 两个数如果都是实数,可以比较它们的大小,如果不全是实数,就不能比较大小,也就是说,任意两个复数不能比较大小.

二、复数的代数运算

1. 复数的四则运算

设两个复数 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1,\quad z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$,

两复数的和差定义为:$z_1 \pm z_2=(x_1 \pm x_2)+\mathrm{i}(y_1 \pm y_2)$. (1-1)

两复数的积定义为:$z_1 \cdot z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_2y_1+x_1y_2)$. (1-2)

两复数的商定义为:$\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\mathrm{i}\dfrac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}$. (1-3)

例 2 计算共轭复数 $x+y\mathrm{i}$ 与 $x-y\mathrm{i}$ 的积.

解 $(x-y\mathrm{i})(x+y\mathrm{i})=x^2-(y\mathrm{i})^2=x^2+y^2$.

2. 共轭复数及其性质

实部相同而虚部绝对值相等符号相反的两个复数称为共轭复数.

若 $z=x+\mathrm{i}y$,则 $\bar{z}=x-\mathrm{i}y$ 为其共轭复数. 共轭复数有如下性质:

(i) $\overline{z_1 \pm z_2}=\bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$;$\overline{z_1 \cdot z_2}=\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$;$\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$.

(ii) $\bar{\bar{z}}=z$.

(iii) $z \cdot \bar{z}=[\mathrm{Re}(z)]^2+[\mathrm{Im}(z)]^2$.

(iv) $z+\bar{z}=2\mathrm{Re}(z)$;$z-\bar{z}=2\mathrm{i}\mathrm{Im}(z)$.

以上各式证明略.

例 3 将下列复数表示为 $x+\mathrm{i}y$ 的形式:

(1) $\left(\dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right)^7$;(2) $\dfrac{\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}+\dfrac{1-\mathrm{i}}{\mathrm{i}}$.

解 (1) $\dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\dfrac{(1-\mathrm{i})^2}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=\dfrac{(1-\mathrm{i})^2}{2}=-\mathrm{i}$,$\left(\dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right)^7=(-\mathrm{i})^7=\mathrm{i}$.

(2) $\dfrac{\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}+\dfrac{1-\mathrm{i}}{\mathrm{i}}=\dfrac{\mathrm{i}^2+(1-\mathrm{i})^2}{(1-\mathrm{i})\mathrm{i}}=\dfrac{-1-2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\dfrac{(-1-2\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{2}=-\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$.

例 4 设 $z_1=5-5\mathrm{i}$,$z_2=-3+4\mathrm{i}$,求$\dfrac{z_1}{z_2}$ 与 $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}$.

解
$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{5-5\mathrm{i}}{-3+4\mathrm{i}}=\frac{(5-5\mathrm{i})(-3-4\mathrm{i})}{(-3+4\mathrm{i})(-3-4\mathrm{i})}=\frac{(-15-20)+(15-20)\mathrm{i}}{25}$$
$$=-\frac{7}{5}-\frac{\mathrm{i}}{5}.$$
$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=-\frac{7}{5}+\frac{\mathrm{i}}{5}.$$

例 5 设 $z=-\dfrac{1}{\mathrm{i}}-\dfrac{3\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$,求 $\mathrm{Re}(z)$,$\mathrm{Im}(z)$ 与 $z \cdot \bar{z}$.

解　$z = -\frac{1}{\mathrm{i}} - \frac{3\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} = \mathrm{i} - \frac{3\mathrm{i}\cdot(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}$,

$\mathrm{Re}(z) = \frac{3}{2}, \mathrm{Im}(z) = -\frac{1}{2}$,

$z \cdot \bar{z} = [\mathrm{Re}(z)]^2 + [\mathrm{Im}(z)]^2 = \frac{5}{2}$.

例 6　设两复数 $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1, z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$,证明:$z_1 \cdot \bar{z}_2 + \bar{z}_1 \cdot z_2 = 2\mathrm{Re}(z_1 \cdot \bar{z}_2)$.

证
$$\begin{aligned} z_1 \cdot \bar{z}_2 + \bar{z}_1 \cdot z_2 &= (x_1 + \mathrm{i}y_1)(x_2 - \mathrm{i}y_2) + (x_1 - \mathrm{i}y_1)(x_2 + \mathrm{i}y_2) \\ &= (x_1x_2 + y_1y_2) + \mathrm{i}(x_2y_1 - x_1y_2) + \\ &\quad (x_1x_2 + y_1y_2) + \mathrm{i}(-x_2y_1 + x_1y_2) \\ &= 2(x_1x_2 + y_1y_2) \\ &= 2\mathrm{Re}(z_1 \cdot \bar{z}_2). \end{aligned}$$

或
$$z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 = z_1\overline{z_2} + \overline{z_1\overline{z_2}} = 2\mathrm{Re}(z_1 \cdot \overline{z_2}).$$

第二节　复数的几何表示

一、复平面

1. 复平面

复数 $z = x + \mathrm{i}y$ 与有序实数对 (x, y) 成一一对应,因此,一个建立了直角坐标系的平面可以用来表示复数,通常把横轴叫实轴或 x 轴,纵轴叫虚轴或 y 轴.这种用来表示复数的平面叫复平面或 Z 平面.复数 $z = x + \mathrm{i}y$ 可以用复平面上的点 $P(x, y)$ 表示.如图 1-1 所示,复数与复平面上的点是一一对应的,为方便起见,今后不再区分"数 z"与"点 z".

2. 复数的模(或绝对值)

复数 $z = x + \mathrm{i}y$ 可以用复平面上的向量$\overrightarrow{OP}$表示,向量$\overrightarrow{OP}$的长度称为 z 的模或绝对值,记为

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{1-4}$$

根据图 1-2,显然下列各式成立:

$|x| \leqslant |z|$;$|y| \leqslant |z|$;$|z| \leqslant |x| + |y|$;$z \cdot \bar{z} = |z|^2 = |\bar{z}|^2$.

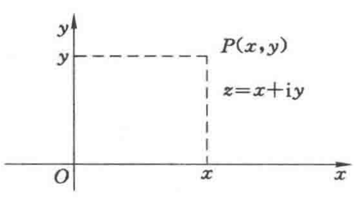

图 1-1

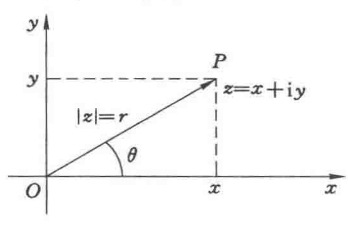

图 1-2

3. 复数的辐角

在 $z \neq 0$ 的情况下,以正实轴为始边,以表示 z 的向量$\overrightarrow{OP}$为终边的角的弧度数 θ 称为复数 z 辐角,记作 $\mathrm{Arg}\, z = \theta$(图 1-2),则

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ \tan\theta = \dfrac{y}{x} \end{cases},\text{其中 } r = |z| = \sqrt{x^2+y^2}. \tag{1-5}$$

根据终边相同角的定义,可知:

任何一个复数 $z \neq 0$ 有无穷多个辐角,如果 θ_1 是其中的一个辐角,那么 z 的全部辐角为 $\text{Arg } z = \theta_1 + 2k\pi$($k$ 为任意整数).

特殊地,当 $z=0$ 时,$|z|=0$,但辐角不确定.

辐角主值的定义:

在 $z(z\neq 0)$ 的辐角中,把满足的 $-\pi < \theta_0 \leqslant \pi$ 的 θ_0 称为 $\text{Arg } z$ 的主值,记作

$$\theta_0 = \arg z. \tag{1-6}$$

所以,$\text{Arg } z = \arg z + 2k\pi$($k$ 为任意整数).

$z\neq 0$ 的辐角主值为:

$$\arg z = \begin{cases} \arctan\dfrac{y}{x}, x>0; \\ \dfrac{\pi}{2}, x=0, y>0; \\ -\dfrac{\pi}{2}, x=0, y<0; \\ \pi, x<0, y=0; \\ \arctan\dfrac{y}{x}+\pi, x<0, y>0; \\ \arctan\dfrac{y}{x}-\pi, x<0, y<0. \end{cases} \quad \text{其中 } -\frac{\pi}{2} < \arctan\frac{y}{x} < \frac{\pi}{2}. \tag{1-7}$$

4. 复数和差的几何意义

若复数 z_1、z_2 分别用对应的向量 $\overrightarrow{OP_1}$、$\overrightarrow{OP_2}$ 表示,则两个复数的加减法运算与相应的向量的加减法运算一致.

于是在平面上以 $\overrightarrow{OP_1}$、$\overrightarrow{OP_2}$ 为边的平行四边形的对角线 $\overrightarrow{OP}$ 就表示了复数 z_1+z_2,对角线 $\overrightarrow{P_2P_1}$ 就表示了复数 z_1-z_2.

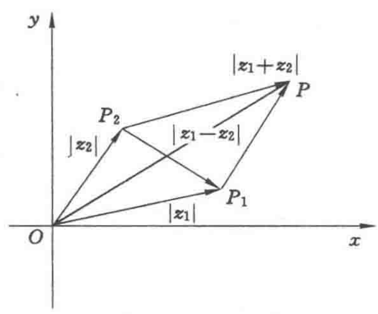

图 1-3

根据几何解释可得:$|z_1-z_2|$ 表示点 z_1 和点 z_2 之间的距离,由图 1-3,我们有

(i) $|z_1+z_2| \leqslant |z_1|+|z_2|$;

(ii) $|z_1-z_2| \geqslant \big||z_1|-|z_2|\big|$.

5. 复数的三角表示和指数表示

利用直角坐标与极坐标的关系

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \end{cases}$$

复数可以表示成

$$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta). \tag{1-8}$$

此式称为复数的三角表示式.

再利用欧拉公式 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$,复数又可以表示成

$$z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}. \tag{1-9}$$

此式称为复数的指数表示式.

注意 这里的 θ 应为 $\mathrm{Arg}\, z$,而把 $z = x + \mathrm{i}y$ 称为代数形式.

例 1 将下列复数化为三角表示式与指数表示式:

(1) $z = -\sqrt{12} - 2\mathrm{i}$;

(2) $z = \sin\frac{\pi}{5} + \mathrm{i}\cos\frac{\pi}{5}$;

(3) $z = \dfrac{(\cos 5\varphi + \mathrm{i}\sin 5\varphi)^2}{(\cos 3\varphi - \mathrm{i}\sin 3\varphi)^3}$.

解 (1) $r = |z| = \sqrt{12+4} = 4$,由于 z 在第三象限,则

$$\theta = \arctan\left(\frac{-2}{-\sqrt{12}}\right) - \pi = \arctan\frac{\sqrt{3}}{3} - \pi = -\frac{5}{6}\pi.$$

故 z 的三角表示式为 $\quad z = 4\left[\cos\left(-\frac{5}{6}\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{5}{6}\pi\right)\right].$

z 的指数表示式为 $\quad z = 4\mathrm{e}^{-\frac{5}{6}\pi\mathrm{i}}.$

(2) $z = \sin\frac{\pi}{5} + \mathrm{i}\cos\frac{\pi}{5}$,显然 $r = |z| = 1$.

$$\sin\frac{\pi}{5} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}\right) = \cos\frac{3\pi}{10},$$

$$\cos\frac{\pi}{5} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}\right) = \sin\frac{3\pi}{10}.$$

故 z 的三角表示式为 $\quad z = \cos\frac{3\pi}{10} + \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{10}.$

z 的指数表示式为 $\quad z = \mathrm{e}^{\frac{3}{10}\pi\mathrm{i}}.$

(3) 因为

$$\cos 5\varphi + \mathrm{i}\sin 5\varphi = \mathrm{e}^{5\varphi\mathrm{i}},$$

$$\cos 3\varphi - \mathrm{i}\sin 3\varphi = \cos(-3\varphi) + \mathrm{i}\sin(-3\varphi) = \mathrm{e}^{-3\varphi\mathrm{i}},$$

所以

$$\frac{(\cos 5\varphi + \mathrm{i}\sin 5\varphi)^2}{(\cos 3\varphi - \mathrm{i}\sin 3\varphi)^3} = \frac{(\mathrm{e}^{5\varphi\mathrm{i}})^2}{(\mathrm{e}^{-3\varphi\mathrm{i}})^3} = \mathrm{e}^{19\varphi\mathrm{i}}.$$

故 z 的三角表示式为 $\quad z = \cos 19\varphi + \mathrm{i}\sin 19\varphi.$

z 的指数表示式为 $\quad z = \mathrm{e}^{19\varphi\mathrm{i}}.$

6. 曲线的复数方程

根据复数的几何意义,在这里研究两个问题:

(1) 已知平面上的曲线方程,如何用复数形式的方程表示?

(2) 已知曲线方程的复数形式,如何确定它所表示的平面曲线?

例 2 将通过两点 $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$ 与 $z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$ 的直线用复数形式的方程表示.

解 通过两点(x_1,y_1)与(x_2,y_2)的直线方程

$$\begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1) \end{cases} \quad (-\infty < t < +\infty),$$

可以得出它的复数形式的参数方程为

$$z = z_1 + t(z_2 - z_1) \qquad (-\infty < t < +\infty).$$

特别地,由 z_1 到 z_2 的直线段的参数方程为

$$z = z_1 + t(z_2 - z_1) \quad (0 \leqslant t \leqslant 1).$$

若取 $t = \frac{1}{2}$,可得线段$\overline{z_1 z_2}$ 的中点的坐标为

$$z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

例 3 求下列方程所表示的曲线:

(1) $|z + \mathrm{i}| = 2$;(2) $|z - 2\mathrm{i}| = |z + 2\mathrm{i}|$;(3) $\mathrm{Im}(\mathrm{i} + \bar{z}) = 4$.

解 (1) 方程 $|z + \mathrm{i}| = 2$ 表示所有与点$-\mathrm{i}$距离为2的点的轨迹.即表示中心为$-\mathrm{i}$、半径为 2 的圆.另外若设 $z = x + \mathrm{i}y$,则

$$|x + (y + 1)\mathrm{i}| = 2,\ \sqrt{x^2 + (y + 1)^2} = 2,$$

即圆的直角坐标方程为

$$x^2 + (y + 1)^2 = 4.$$

(2) $|z - 2\mathrm{i}| = |z + 2\mathrm{i}|$ 表示所有与点 $2\mathrm{i}$ 和 $-2\mathrm{i}$ 距离相等的点的轨迹,故方程表示的曲线就是连接 $2\mathrm{i}$ 和 $-2\mathrm{i}$ 的垂直平分线,设 $z = x + \mathrm{i}y$,根据题意可有

$$|x + y\mathrm{i} - 2\mathrm{i}| = |x + y\mathrm{i} + 2\mathrm{i}|$$

化简后得

$$y = -x.$$

(3) 设 $z = x + \mathrm{i}y$,则

$$\mathrm{i} + \bar{z} = x + (1 - y)\mathrm{i},\mathrm{Im}(\mathrm{i} + \bar{z}) = 1 - y = 4,$$

所求曲线方程为

$$y = -3.$$

二、复球面

1. 南极、北极的定义

取一个与复平面切于原点 $z = 0$ 的球,球面上一点 S 与原点重合(图 1-4),通过 S 作垂直于复平面的直线与球面相交于另一点 N,称 N 为北极,S 为南极.

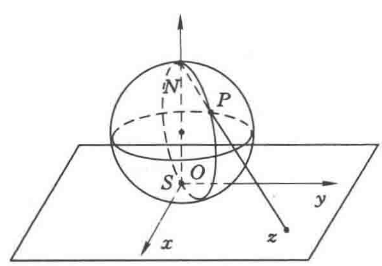

图 1-4

2. 复球面的定义

球面上的点,除去北极 N 外,与复平面内的点之间存在着一一对应的关系.我们可以用球面上的点来表示复数.我们规定:复数中有一个唯一的"无穷大"与复平面上的无穷远点相对应,记作 ∞.因而球面上的北极 N 就是复数无穷大 ∞ 的几何表示.球面上的每一个点都有唯一的复数与之对应,这样的球面称为复球面.

3. 扩充复平面的定义

包括无穷远点在内的复平面称为扩充复平面.不包括无穷远点在内的复平面称为有限复平面,或简称复平面.

对于复数 ∞ 来说,实部、虚部、辐角等概念均无意义,它的模规定为正无穷大.

复球面的优越处是能将扩充复平面的无穷远点明显地表示出来.

关于 ∞ 的四则运算规定如下：

(ⅰ) 加法：$\alpha+\infty=\infty+\alpha=\infty \quad (\alpha\neq\infty)$；

(ⅱ) 减法：$\alpha-\infty=\infty-\alpha=\infty \quad (\alpha\neq\infty)$；

(ⅲ) 乘法：$\alpha\cdot\infty=\infty\cdot\alpha=\infty \quad (\alpha\neq 0)$；

(ⅳ) 除法：$\dfrac{\alpha}{\infty}=0,\dfrac{\infty}{\alpha}=\infty \quad (\alpha\neq\infty),\dfrac{\alpha}{0}=\infty \quad (\alpha\neq 0)$.

第三节　复数的乘幂与方根

一、乘积与商

定理 1　两个复数乘积的模等于它们的模的乘积；两个复数乘积的辐角等于它们的辐角的和.

证　设复数 z_1 和 z_2 的三角形式分别为

$$z_1=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1),z_2=r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2),$$

则

$$\begin{aligned}z_1\cdot z_2&=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)\\&=r_1\cdot r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)+\\&\quad \mathrm{i}(\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2)],\end{aligned}$$

所以

$$z_1\cdot z_2=r_1\cdot r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)], \tag{1-10}$$

$$|z_1z_2|=|z_1||z_2|,$$

$$\mathrm{Arg}(z_1z_2)=\mathrm{Arg}\,z_1+\mathrm{Arg}\,z_2. \tag{1-11}$$

［证毕］

值得注意的是，由于辐角的多值性，式(1-11)应理解为对于左端 $\mathrm{Arg}(z_1z_2)$ 的任意值，必有右端 $\mathrm{Arg}\,z_1$ 与 $\mathrm{Arg}\,z_2$ 的各一值相加得出的和与之对应，反之亦然，如图 1-5 所示.

从几何上看，两复数对应的向量分别为 $\boldsymbol{z}_1,\boldsymbol{z}_2$，先把 $\boldsymbol{z}_1$ 逆时针方向旋转一个角度 θ_2，再把它的模扩大到 r_2 倍，所得向量 $\boldsymbol{z}$ 就表示 $\boldsymbol{z}_1\cdot\boldsymbol{z}_2$. 两复数相乘就是把模相乘，辐角相加.

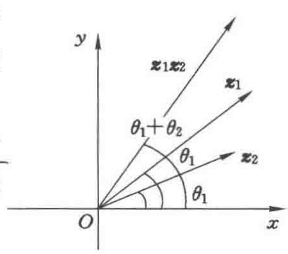

图 1-5

推广到 n 个复数的乘积：

设 $z_k=r_k(\cos\theta_k+\mathrm{i}\sin\theta_k)=r_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_k}(k=1,2,\cdots,n)$，则

$$\begin{aligned}z_1\cdot z_2\cdot\cdots\cdot z_n&=r_1\cdot r_2\cdot\cdots\cdot r_n[\cos(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)]\\&=r_1\cdot r_2\cdot\cdots\cdot r_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)}.\end{aligned} \tag{1-12}$$

定理 2　两个复数的商的模等于它们的模的商；两个复数的商的辐角等于被除数与除数的辐角之差.

证　设复数 z_1 和 z_2 的三角形式分别为

$$z_1=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1),z_2=r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2).$$

按照商的定义，当 $z_1\neq 0$ 时，$z_2=\dfrac{z_2}{z_1}z_1$.

$$|z_2|=\left|\frac{z_2}{z_1}\right||z_1|,\mathrm{Arg}\,z_2=\mathrm{Arg}\left(\frac{z_2}{z_1}\right)+\mathrm{Arg}\,z_1,$$

于是
$$\left|\frac{z_2}{z_1}\right|=\frac{|z_2|}{|z_1|};\tag{1-13}$$
$$\mathrm{Arg}\left(\frac{z_2}{z_1}\right)=\mathrm{Arg}\ z_2-\mathrm{Arg}\ z_1.\tag{1-14}$$

注意式(1-14)应从集合的角度理解.

设复数 z_1 和 z_2 的指数形式分别为
$$z_1=r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1},z_2=r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2},\frac{z_2}{z_1}=\frac{r_2}{r_1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_2-\theta_1)}.$$

复数 z_1 除以复数 z_2 的几何意义是:将 z_1 的辐角按顺时针方向旋转一个角度 $\mathrm{Arg}\ z_2$,再将 z_1 的模伸长(或缩短) $\dfrac{1}{|z_2|}$.

二、幂与根

1. n 次幂

n 个相同复数 z 的乘积称为 z 的n 次幂,记作 z^n,即
$$z^n=\underbrace{z\cdot z\cdot\cdots\cdot z}_{n个}=r^n(\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta).\tag{1-15}$$

如果定义 $z^{-n}=\dfrac{1}{z^n}$,那么当 n 为负整数时,上式仍成立.

2. 棣莫弗公式

若 $|z|=r=1$ 即 $z=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$,则得到棣莫弗(DeMoivre)公式:
$$(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^n=\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta.\tag{1-16}$$

3. 复数的方根

设复数 w 和 z,若 $w^n=z$(n 为正整数),则称复数 w 为 z 的n 次方根.记为
$$w=\sqrt[n]{z}.$$

推导过程如下:设 $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$,$w=\rho(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)$,根据棣莫弗公式,有
$$w^n=\rho^n(\cos n\varphi+\mathrm{i}\sin n\varphi)=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta).$$

则
$$\rho^n=r,n\varphi=\theta+2k\pi.$$

所以
$$\rho=r^{\frac{1}{n}},n\varphi=\theta+2k\pi\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots),$$
$$w=\sqrt[n]{z}=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right).\tag{1-17}$$

当 $k=0,1,2,\cdots,n-1$ 时,得到 n 个相异的根:
$$w_0=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta}{n}\right);$$
$$w_1=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta+2\pi}{n}\right);$$
$$\cdots$$
$$w_{n-1}=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2(n-1)\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta+2(n-1)\pi}{n}\right).$$

当 k 以其他整数值代入时,这些根又重复出现.由于$\sqrt[n]{z}$ 的 n 个值都具有相同的模 $\sqrt[n]{|z|}$,且对应相邻的两个 k 值的方根的辐角均相差$\dfrac{2\pi}{n}$.所以从几何上来看$\sqrt[n]{z}$ 的 n 个点就是