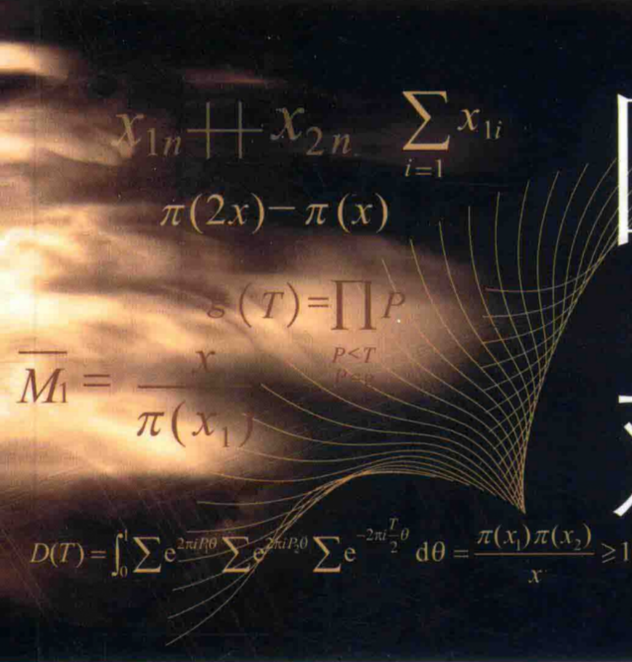
数论专题研究论文集



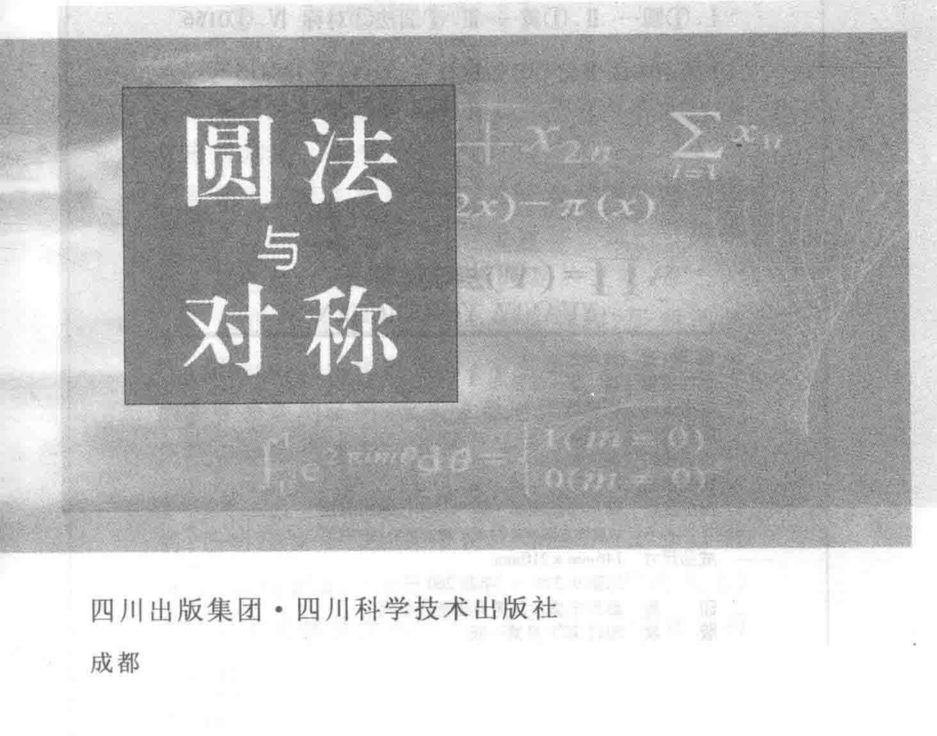
圆法与对称

黄永龙 编著

四川出版集团 · 四川科学技术出版社

数论专题研究论文集

黄永龙 编著



圆法与对称

四川出版集团·四川科学技术出版社

成都

图书在版编目(CIP)数据

圆法与对称/黄永龙编著. –成都:四川科学技术出版社,
2011.7

ISBN 978 –7 –5364 –7208 –2

Ⅰ.①圆… Ⅱ.①黄… Ⅲ.①圆法②对称 Ⅳ.①0156

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第138415号

圆法与对称

YUANFA YU DUICHENG

编 著 者　黄永龙
责任编辑　肖　伊　陈敦和
封面设计　韩建勇
版面设计　杨璐璐
责任校对　尧汝英
责任出版　邓一羽
出版发行　四川出版集团・四川科学技术出版社
成都市三洞桥路12号　邮政编码610031
成品尺寸　146mm×210mm
印张9.375　字数260千
印　　刷　彭州市盛发印务有限责任公司
版　　次　2011年7月第一版
印　　次　2011年7月第一次印刷
定　　价　66.00元
ISBN 978 –7 –5364 –7208 –2

目 录

对 称 法

摘要:本文主要介绍在两轴整数点个数相等的条件下,以两轴上的整数点按一定顺序排列作为基础对称形式,在建立起对称方法后,扩展到多轴和、差对称组合形式及两轴不等对称组合形式,在此基础上还给出了从轴上整数点相对称向轴上素数整点相对称的基础转换式,以及建立起轴上素数整点的和、差相对称形式向轴上非素数整点的和、差相对称形式的转换基础式,为解析“圆法”能展开有效准确的运算,创立了基础理论。对称法是解析对称理论的重要组成部分。

关键词:两轴对称和、差;多轴对称和、差;转换基础式;准确运算基础式

在一个平面上,我们在任意的方向确定两条或两条以上相平行的轴,在每条轴上设置 $x(x\geqslant 2)$ 个点,对每条轴上的点都取整数点。用轴上的整数点相对称的分解组合方法,来研究在轴上的整数点中的素数分布点的对称组合特征,我们称这种两轴整数点相对称的组合形式或 3 轴或更多条轴整数点相对称的组合形式为对称法。

轴上的整数点对称法,包含了很多种不同形式的整数点相对称的分解组合形式,在此,将对对称法的基础理论与方法的形成和轴上整数点相对称向轴上素数整点相对称的转换,以及轴上素数整点的相对称向轴上非素数整点相对称的转换等方法的应用,分 9 个方面进行介绍。

1 绪 论

对称问题,在实际生活中我们经常见到和用到,如图形和物体或数的排列等方面的相对称的形式是有很多的。有些图形或数的排列很容易用数学的方法去解决,而有的图形或数的对称形式很难用数

学的方法去表示与计算。如整数分析论中的素数组合，整数区间的素数至少存在的个数等问题，就很难用常用的数学方法去分析和解决。1742 年，哥德巴赫(Goldbach)提出的把整数表为素数之和的命题，是典型的素数相对称组合的问题。从该命题的提出到现在已经长达 260 年之久，在这一较长的探索研究过程中，数学家们修改命题的基础条件，将两个素数之和修改为两个奇素数之和，以求能够满足实施证明的基础条件。后来，数学家们又将命题改为弱型命题，引入自然数集合非常重要的概念——“正密率”，运用“筛法”理论，运用高斯(Causs)三角和，把大筛法应用于对圆法中基本区间的讨论，并设定以“充分大”作为计算单位与限定条件。可以这样说，随着整数分析论的发展，已有越来越多的人发现这些被数学领域所熟知的，并且被认为有着重要意义的理论方法，用来解决哥德巴赫(Goldbach)命题和整数区间素数至少存在个数的分布等方面的问题时，显得是多么的艰难，而所得到的结果往往也不够理想。这正好说明，解决整数分析论中的素数组合及整数区间的素数至少存在的个数等一些命题，具有很强的挑战性。同时，这也可以说明，研究解决数学难题，正是推进数学科学发展与进步的原动力之一。在另一方面，这又告诉我们要解决数学难题，就要用最准确的方法，找到与之相适应的最普遍、最简单、最原始的基础形式，并且由此能够建立起表述该数学难题本质全部的基础表达式。由这种理论与方法所形成的数式常常有着更深刻和更广泛的用途。要达到此目的，我们以两轴对称为例，把圆法整点对称形式，构造成两条相等且平行的直线，两条直线分别为 x_1 轴和 x_2 轴，轴上的点为整数点，这样就形成了两轴整数点相对称的基础形式，然后再与“圆法”结合运用，目的就是便于将“圆法”与“对称法”进行比较，以利于对“对称法”的理解掌握。

我们已经提出用对称轴及用轴上整数点相对称的方法，来研究解决整数分析论中的素数组合及整数区间素数至少存在的个数等问题。用在这种条件下形成的理论与方法去解决哥德巴赫(Goldbach)命题，应该比单纯使用“圆法”去解决哥德巴赫(Goldbach)命题要优越得多。因为用“圆法”对哥德巴赫(Goldbach)命题给出一个准确的

基础表达式时，需要改进“圆法”的一些基础条件才有可能。因此，我们选择用轴上整数点相对称的方法与“圆法”相结合，去解决整数分析论中的素数组合，整数区间素数至少存在的个数等问题，将会收到更好的效果。

提出这个理论方法，主要是依据轴上整数点是一一对应的，而建立这个理论方法，则主要是依据轴上整数点在相对称中的分解组合及变化特征条件下所形成的素数整点的对称、组合及变化规律。因为对轴上整数点相对称的理论方法进行证明会容易一些，所得到的基础式的结果也更为明显、简单、普遍、准确。但仅仅从它们的纯代数表达式去理解是不够的，因为它们不是仅仅适合个别条件下的对称理论，而是有着广泛运用的对称理论。在解决整数分析论中的素数组合，整数区间素数至少存在的个数等一些命题时，有着重要的用途。这个理论方法与自然数列中的素数分布理论有着密不可分的联系，特别是轴上整数点相对称的理论方法，最主要的就是表述轴上素数整点相对称的自然构成的形式及变化规律。其重要意义在于能够准确给出表述哥德巴赫(Goldbach)命题(A)本质全部的基础式；能够准确给出表述非哥德巴赫(Goldbach)数本质全部的基础式；能够准确给出表述 3 素数对称组合本质全部的基础式；能够准确给出表述非 3 素数对称组合本质全部的基础式；能够准确给出表述孪生素数全部的基础式；能够准确给出表述每一个大于或等于 4 的偶数能用无限多种方式表为两个素数之差的基础式；能够准确给出在某个整数区间素数至少存在个数的基础表达式；同时，还能够准确给出多个命题是等价关系的依据。这些带有深刻意义的结果，是我们将轴对称理论的基础概念和基础性质应用在整数分析论的素数组合中，并且研究整数点在构成中的自然变化和在整数点的自然变化中不断扩大运用范围而产生的。这充分体现出对称理论带有较普遍的工具作用。整数点在构成中的自然变化，主要表现在构成对称形式中的分解组合变化同素数整点的分解组合变化与非素数整点的分解组合变化是一致的，以及在每个大于 2 的偶数中的非素数整点的分解组合的两个相对称数的和与素数整点的分解组合的两个相对称数的和

是相等的。这也是轴上整数点对称方法本身所具有的重要特征之一。同时,还在它们构成的自然变化中发现并归纳出"对称和""3 轴和""对称差"和重要的两轴素数之积等方法,以及"圆法"与对称法结合运用等重要方法,这些方法同属于轴上整数点对称理论范畴。这些方法都将在本书的各论文中给出详细的证明。

可以这样说,以"圆法"作为"载体"理论,改进"圆法"基础条件,与轴整数点对称理论结合在一起,用来解决整数分析论中的素数组合及用来解决整数区间素数至少存在的个数等问题都是非常重要而又十分有效的工具。

2 对称和

按照所设定的条件及序列,在一一相对应的条件下,把两条轴上的整数点或素数整点进行逐一的求其相对称数之和的个数的方法,称为对称和。

2.1 两条轴整数点对称求和的基础形式

基础形式为

$$
\begin{array}{ll}
x_{11}=x_{11}-0 & x_{21}=x_{21}+0 \\
x_{12}=x_{11}-1 & x_{22}=x_{21}+1 \\
x_{13}=x_{11}-2 & x_{23}=x_{21}+2 \\
\vdots & \vdots \\
x_{1n}=x_{11}-(n-1) & x_{2n}=x_{21}+(n-1),(n\geqslant 1)
\end{array}
$$

归纳以上式子写成下面的表达式,即

$$\sum_{i=1} x_{1i}+\sum_{i=1} x_{2i}=\sum_{i=1} T_i(i=1,2,3,\cdots) \tag{1}$$

或

$$\sum_{\substack{i=1,\\ n\geqslant 1}}[x_{11}-(n-1)]_i+\sum_{\substack{i=1,\\ n\geqslant 1}}[x_{21}+(n-1)]_i=\sum_{i=1} T_i(i=1,2,3,\cdots) \tag{2}$$

2.2 两轴整数点对称求和的基本性质

2.2.1 对应性

两条轴上的整数点是一一对应的，两条轴上的整数点个数是相等的，即

$$x_1 = x_2 = x\left(x = \frac{T}{2}, 4 \leqslant T \in Q\right) \tag{3}$$

及

$$x_1 \nparallel x_2 \tag{4}$$

$x_1 \nparallel x_2$ 读成 x_1 轴上的整数点与 x_2 轴上的整数点是一一对应的。

2.2.2 同一性

两条轴上的初始整数点数是同一个数，即

$$x_{11} = x_{21}$$

x_1 轴上的整数点按其自然数值从大到小排列，即

$$x_{11}, x_{12}, x_{13}, \cdots, x_{1n}$$

x_2 轴上的整数点按其自然数值从小到大排列，即

$$x_{21}, x_{22}, x_{23}, \cdots, x_{2n}$$

2.2.3 对称性

两轴上的整数点相对称时，是奇数对奇数，偶数对偶数，即

$$G_{1r} \nparallel G_{2r}, Q_{1r} \nparallel Q_{2r} \tag{5}$$

整数点在对称时，奇数与奇数的和等于偶数与偶数的和，即

$$G_{1r} + G_{2r} = Q_{1r} + Q_{2r} (r = 1, 2, 3, \cdots) \tag{6}$$

其中，G_{1r}，G_{2r} 分别代表两条轴上的奇数；Q_{1r}，Q_{2r} 分别代表两条轴上的偶数。

2.2.4 分解性

每一个数或一种组合形式，能够分解为两种或两种以上的整数点相对称的组合形式，其表达式为

$$\sum_{i=1}(x_{1i} + x_{2i}) = \begin{cases} \sum\limits_{r=1}(G_{1r} + G_{2r}) + \sum\limits_{r=1}(Q_{1r} + Q_{2r})(r = 1, 2, 3, \cdots) \\ \sum\limits_{j=1}(P_{1j} + P_{2j}) + \sum\limits_{j=1}(F_{1j} + F_{2j})(j = 1, 2, 3, \cdots) \end{cases} \tag{7}$$

其中，P_{1j}，P_{2j}分别代表两条轴上的素数；F_{1j}，F_{2j}分别代表两条轴上的非素数。

式(7)说明两条轴上的整数点之和可分解为两条轴上的奇数之和及两条轴上的偶数之和；同样，也可分解成两条轴上的素数之和及两条轴上的非素数之和。

2.2.5 整合性

能够将两种或两种以上的整数点相对称的分解组合形式，归纳为一种整数点相对称的组合形式或一个数，其表达式为

$$\left.\begin{array}{l}\sum\limits_{r=1}(G_{1r}+G_{2r})+\sum\limits_{r=1}(Q_{1r}+Q_{2r})\\\sum\limits_{j=1}(P_{1j}+P_{2j})+\sum\limits_{j=1}(F_{1j}+F_{2j})\end{array}\right\}=\sum_{i=1}(x_{1i}+x_{2i})=\sum_{i=1}T_i \quad (8)$$

式(8)是式(7)的逆向表述。以上所介绍的两轴整数点相对称和的特征表达式，是在对称求和条件下的原始的算术表现形式。

2.3 两轴对称组合条件下的几种数值表达式

$$f(G_{1,2})=\begin{cases}\dfrac{T}{4}, & \text{当}\dfrac{T}{4}\text{为偶数时}\\\left[\dfrac{T}{4}\right]_{\sup}, \left[\dfrac{T}{4}\right] & \text{为奇数时，取}\left[\dfrac{T}{4}\right]\text{接近上一个整数}\end{cases}$$

$$f(Q_{1,2})=\begin{cases}\dfrac{T}{4}, & \text{当}\dfrac{T}{4}\text{为偶数时}\\\left[\dfrac{T}{4}\right]_{\inf}, \left[\dfrac{T}{4}\right] & \text{为奇数时，取}\left[\dfrac{T}{4}\right]\text{接近下一个整数}\end{cases}$$

$$f(F_{1,2})_{\min}=1$$

其中，$f(F_{1,2})$是在对称分解条件下直接推得的。

现在重点介绍在两轴整数点相对称的条件下，其中素数整点能够相对称的基础式。

x_1轴上的素数为$\pi(x_1)$，x_2轴上的素数为$\pi(x_2)$或$\pi(2x)-\pi(x_1)$，由式(7)知，

$$\pi(x_1)=\sum_{j=1}P_{1j}$$

$$\pi(x_2)=\sum_{j=1} P_{2j}$$

$$\sum_{j=1} P_{1j}+\sum_{j=1} P_{2j}\supseteq\begin{cases}P_{11}+P_{21}\\P_{12}+P_{22}\\P_{13}+P_{23}\\\quad\vdots\\P_{1k}+P_{2k}\end{cases}\quad(k=1,2,\cdots;j=1,2,\cdots;k\leqslant j)$$

其中

$$P_{11},P_{12},P_{13},\cdots,P_{1k}\in\sum_{j=1} P_{1j}$$

$$P_{21},P_{22},P_{23},\cdots,P_{2k}\in\sum_{j=1} P_{2j}$$

$\pi(x_1)$与$\pi(x_2)$在自然数列中的分布是不一样的，我们重点是要在两条轴上的素数分布不一样的条件下，来研究两轴上的素数在平均分布时，能够有对称和的点或是对称和的个数。于是，我们设定一个区间 $x\geqslant 2$，只要在 x 区间内至少有一组两个素数相对称和的点，就能够满足两轴素数整点相对称的条件。

按照素数分布定理，在设定的区间 $x\geqslant 2$ 的范围内，在两轴整数点相对称的条件下，在两轴上的两个相邻素数的平均间隔为

$$\frac{x_1}{\pi(x_1)}\cdot\frac{x_2}{\pi(x_2)}$$

或

$$\frac{x_1}{\pi(x_1)}\cdot\frac{x_2}{\pi(2x)-\pi(x_1)}$$

由于设定的区间是 $x\geqslant 2$，那么必须在 x 区间内至少存在一个两轴素数相对称和的点。同时，在两轴上的两个相邻素数的平均间隔必须小于或等于 x。于是用 x 除以两个相邻素数的平均间隔，就构成了两轴素数相对称和的点表达式。

$$f(P_1,P_2)=\frac{x}{\dfrac{x_1}{\pi(x_1)}\cdot\dfrac{x_2}{\pi(x_2)}}\geqslant 1\tag{9}$$

现在设 $f(q_1,q_2)$为在偶数 $T\geqslant 4$ 中不能表为两个素数对称和的个

数，由式(7)及(8)有

$$f_1(F_1)=\sum_{j=1} F_{1j}$$

$$f_2(F_2)=\sum_{j=1} F_{2j}$$

$$\sum_{j=1} F_{1j}+\sum_{j=1} F_{2j}\supseteq\begin{cases}F_{11}+F_{21}\\F_{12}+F_{22}\\F_{13}+F_{23}\\ \vdots\\F_{1k}+F_{2k}\end{cases}\quad(k=1,2,\cdots,j=1,2,\cdots,k\leqslant j)$$

其中

$$F_{11},F_{12},F_{13},\cdots,F_{1k}\in f(F_1)$$

$$F_{21},F_{22},F_{23},\cdots,F_{2k}\in f(F_2)$$

这里的 $f(F_1,F_2)$可以由 $f(P_1,P_2)$的成立推论得到。

同时，因为

$$f(F_1,F_2)+f(P_1,P_2)=f(T)=\frac{T}{2}$$

所以

$$f(F_1,F_2)=f(T)-f(P_1,P_2)$$

进一步有

$$f(F_1,F_2)=\frac{T}{2}-\frac{x}{\frac{x_1}{\pi(x_1)}\cdot\frac{x_2}{\pi(x_2)}}\geqslant 1 \tag{10}$$

对于式(9)及(10)的证明，可以运用切比晓夫(Chebyshev)关于素数分布的不等式，很容易证明得到。

卄——表示两条轴上的整数点是一一相对称的，简称对称符号。

$f(P_1,P_2)$——表示两轴上的素数整点相对称的和。

3 对称差

在两条轴上的整数点一一相对应的条件下，把轴上的整数点或素数整点进行逐一的求其差，称为对称差。