高等数学

新理念教程

（下册）

从福仲　编著

科学出版社

高等数学新理念教程

(下 册)

从福仲 编著

科 学 出 版 社
北 京

内 容 简 介

本书依据《理工类本科高等数学课程教学基本要求》写作而成，适用于高等院校理工类非数学专业高等数学课程教学.

与传统“高等数学”教材编写不同，本书重构了高等数学课程知识体系，对极限部分，从多元函数开始讲述，极限的定义采用集合的观点，增加定义的直观性；在微分学部分，从多元函数开始讲述，使微分学的概念更易于理解；在积分学部分，首先给出了空间流形上积分的定义，便于读者对各类积分概念形成统一认识，减少了教学中不必要的重复. 对于其他内容，我们也进行了必要的简化.

本书将现代数学的基本思想融入到高等数学的教学内容中. 希望通过本书使高等数学的教学达到起点高、易于学习、缩短学时的目的. 本书分上、下两册，上册包括空间解析几何与向量代数、极限与连续、微分学三部分；下册包括积分学、微分方程初步、无穷级数三部分.

本书可作为高等院校理工类非数学专业高等数学课程用书，也可作为新工科背景下高等数学教学实践的尝试用书以及大学数学教师的参考用书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学新理念教程：全2册/从福仲编著. —北京：科学出版社，2018. 6
ISBN 978-7-03-057497-8

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①从… Ⅲ. ① 高等数学-教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2018) 第 107901 号

责任编辑：张中兴 梁 清 孙翠勤／责任校对：彭珍珍
责任印制：吴兆东／封面设计：迷底书装

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京九州迅驰传媒文化有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2018 年 6 月第 一 版 开本：720 × 1000 B5
2018 年 6 月第一次印刷 印张：26 1/2
字数：537 000

定价：98.00 元(上下册)

(如有印装质量问题，我社负责调换)

目　录

第6章 积分的基本概念

6.1 空间中的流形及流形上的积分

6.1.1 空间中的流形

从现在开始, 我们研究空间 $\mathbf{R}^3$ 中的一些特殊几何对象. 设 Ω 是空间中的点集. 对于任意 $M \in \mathbf{R}^3$, 记 $N_\Omega(M,\delta) = N(M,\delta)\bigcap\Omega$, 称其为点 M 在 Ω 中的 δ 邻域. 我们看几个例子.

集合 $\Omega_1 = \{(x,y,z)|a < x < b, y = 0, z = 0\}$ 表示空间 $\mathbf{R}^3$ 中 x 轴上的开区间 (a,b).

空间中的长方体可以表示为 $\Omega_2 = \{(x,y,z)|a < x < b, c < y < d, s < z < l\}$.

集合 $\Omega_3 = \{(x,y,z)|0 < x < a, 0 < y < x, z = 0\}$ 表示定点分别为 $(0,0,0)$, $(a,0,0)$ 和 $(a,a,0)$ 的等腰直角三角形.

集合 $\Omega_4 = \{(x,y,z)|0 < x < 1, x^2 < y < x^3, z = 0\}$ 表示 xOy 面上如图 6-1 所示的图形.

集合 $\Omega_5 = \{(x,y,z)|0 < z < x^2 + y^2, 0 < x < \sqrt{y}, 0 < y < 1\}$ 表示空间中如图 6-2 所示的几何体.

注意, 上面这些几何对象都是不含"边界"的.

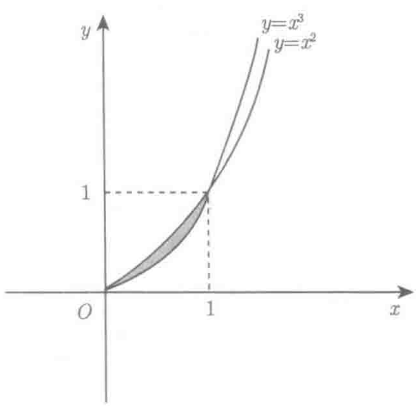

图 6-1

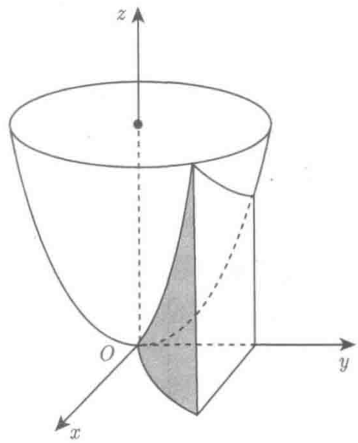

图 6-2

定义 1.1 设 Ω 是空间 $\mathbf{R}^3$ 的点集. 如果 Ω 可以用某些函数的严格不等式或

等式表示, 即 $\Omega = \{M \in \mathbf{R}^3 | f_i(M) < 0, g_j(M) = 0, i = 1, \cdots, m, j = 1, \cdots, n\}$, 并且函数 $f_i(M), g_j(M), i = 1, \cdots, m, j = 1, \cdots, n$ 是可微的, 则称 Ω 为空间 $\mathbf{R}^3$ 中的**流形**, 简称流形. 如果流形 Ω 的表示中 “$<$” 用“$\leqslant$”代替, 则称为**闭流形**, 用 $\bar{\Omega}$ 表示.

定义 1.2　设 E_1 和 E_2 是空间 $\mathbf{R}^3$ 中的两个流形. 如果存在连续可逆的映射 $f: E_1 \to E_2$ 满足 $E_2 = f(E_1)$, 则称 E_1 和 E_2 是**同胚**的.

直观地, 两个流形, 如果可以通过弯曲、延展、剪切 (只要最终完全沿着当初剪开的缝隙再重新粘贴起来) 等操作把其中的一个变为另一个, 则两个流形可以认为是同胚的.

定义 1.3　设 Ω 为流形. 若对于任意一点 $M \in \Omega$, 都有 M 在 Ω 中的某邻域 $N_\Omega(M, \delta)$ 同胚于 $\mathbf{R}^m$ $(m = 1, 2, 3)$ 中的一个连通开集, 则称 Ω 为 **m维流形**.

根据上面的定义, Ω_1 是 1 维流形, 并且闭区间是 1 维闭流形; Ω_3 和 Ω_4 是 2 维流形; Ω_2 和 Ω_5 是 3 维流形.

称流形 Ω (闭流形 $\bar{\Omega}$) 是**有界**的, 如果对于任意的 $(x, y, z) \in \Omega$, 有 $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leqslant C$, 其中 C 为某正常数.

6.1.2　流形上的积分

我们先看一个求有界闭流形质量的问题, 这类问题在日常生活和工作中经常遇到.

例 1.1　设某个物体占据空间有界闭流形 $\bar{\Omega}$, 它在任意点 M 的密度为 $\rho = f(M) > 0$. 求物体的质量.

注意到流形 Ω 的维数决定密度 ρ 的单位. 如果空间流形 Ω 的维数是 1 维、2 维、3 维的, 则闭流形表示的几何对象分别对应线、面、体. 我们可以求出它的长度、面积和体积. 为了方便, 闭流形 $\bar{\Omega}$ 的长度、面积和体积统称为流形的测度, 记为 $\mu(\bar{\Omega})$.

常密度几何对象的求质量公式为: 质量 = 密度 × 测度. 对于非常密度的几何对象, 用这个公式求质量就不适用了. 为此, 我们采用如下方法求几何对象的质量.

1) 分割

将闭流形 $\bar{\Omega}$ 用平行于坐标面的三族平面分割成 n 个小闭流形 $\bar{\Omega}_1, \bar{\Omega}_2, \cdots, \bar{\Omega}_n$. 当这些小流形的直径很小时, 如果 $f(M)$ 连续, 则在 $\bar{\Omega}_i$ 内, 密度 f 可以近似为常数. 若用 $\Delta\mu_i$ 表示 $\bar{\Omega}_i$ 的测度, 则这小流形的质量为

$$\Delta m_i \approx f(M_i)\Delta\mu_i, \quad M_i \in \bar{\Omega}_i,\ i = 1, \cdots, n.$$

2) 求和

这 n 个小闭流形的质量之和就是给定有界闭流形质量的近似值:

$$m \approx \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta\mu_i.$$

3) 取极限

为了提高上述近似等式的精确度, 将闭流形 $\bar{\Omega}$ 分割加细, 即令 n 个小区域的直径中的最大值 (记作 λ) 趋于零时, 取极限就得到流形质量的准确值:

$$m = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta\mu_i.$$

定义 1.4 设 $f(M)$ 是有界闭流形 $\bar{\Omega}$ 上的有界函数. 将闭流形 $\bar{\Omega}$ 任意分成 n 个小流形 $\bar{\Omega}_1, \bar{\Omega}_2, \cdots, \bar{\Omega}_n$, 其测度分别为

$$\Delta\mu_1, \Delta\mu_2, \cdots, \Delta\mu_n.$$

在每个小流形 $\overline{\Omega}_i$ 上任取一点 M_i, $i = 1, 2, \cdots, n$, 作和式

$$\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta\mu_i. \tag{1.1}$$

如果当各小流形的直径中的最大值 λ 趋于零时, 上述和的极限存在, 则称此极限为函数 $f(M)$ 在闭流形 $\bar{\Omega}$ 上的**积分**, 记作 $\int_{\bar{\Omega}} f(M)\mathrm{d}\mu$ 或 $\int_{\bar{\Omega}} f(x,y,z)\mathrm{d}\mu$, 即

$$\int_{\bar{\Omega}} f(x,y,z)\mathrm{d}\mu = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta\mu_i, \tag{1.2}$$

其中 $f(x,y,z)$ 叫做**被积函数**, $f(x,y,z)\mathrm{d}\mu$ 叫做**被积表达式**, $\mathrm{d}\mu$ 叫做**测度元素**, x, y, z 叫做**积分变量**, $\bar{\Omega}$ 叫做**积分流形**.

为了更好地理解积分的概念, 我们对积分的定义作如下说明:

(1) 关于分割和取点的任意性. 在积分的定义中强调分割和取点的任意性. 这不难理解. 以求流形的质量为例, 任何一个流形都有确定的质量, 不应该因为计算方法的不同而改变, 现在用 "分割、求和、取极限" 的方法, 当然也不应该因为分割和取点的不同而改变.

(2) 关于分割精细程度的描述. 所谓精细的分割, 是指分割后每个小流形内任意两点的距离很小. 这样, $f(M_i)\Delta\mu_i$ 在小区域上才能接近于实际值.

(3) 积分的存在性. 我们要指出, 如果函数 f 是连续的, 那么可以证明 f 在 $\bar{\Omega}$ 上的积分是存在的, 即不管怎样分割闭流形 $\bar{\Omega}$, 怎样取点 M_i, 和 (1.1) 式的极限总是存在的. 限于技术原因, 这里不能给出证明. 以后, 我们总假定 f 是连续的.

(4) 积分的意义. 根据积分的定义, 密度为 $\rho = f(x,y,z) > 0$ 的闭流形 $\bar{\Omega}$ 的质量为 $m = \int_{\bar{\Omega}} f(x,y,z)\mathrm{d}\mu$. 积分还有许多其他的意义, 下面将陆续介绍.

6.1.3 积分的性质

下面讨论积分的性质. 假定各性质中所列积分都是存在的.

性质 1 如果 α, β 都是常数, 那么

$$\int_{\bar{\Omega}}(\alpha f(x,y,z)\pm\beta g(x,y,z))\mathrm{d}\mu=\alpha\int_{\bar{\Omega}}f(x,y,z)\mathrm{d}\mu\pm\beta\int_{\bar{\Omega}}g(x,y,z)\mathrm{d}\mu.$$

证

$$\begin{aligned}&\int_{\bar{\Omega}}(\alpha f(x,y,z)\pm\beta g(x,y,z))\mathrm{d}\mu\\&=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}(\alpha f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)+\beta g(\xi_i,\eta_i,\zeta_i))\Delta\mu_i\\&=\alpha\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta\mu_i+\beta\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}g(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta\mu_i\\&=\alpha\int_{\bar{\Omega}}f(x,y,z)\mathrm{d}\mu\pm\beta\int_{\bar{\Omega}}g(x,y,z)\mathrm{d}\mu.\end{aligned}$$

性质 1 对于有限个函数都是成立的. 类似地, 可以证明:

性质 2 如果闭流形 $\bar{\Omega}$ 分为闭流形 $\bar{\Omega}_1$ 和闭流形 $\bar{\Omega}_2$, 那么

$$\int_{\bar{\Omega}}f(x,y,z)\mathrm{d}\mu=\int_{\bar{\Omega}_1}f(x,y,z)\mathrm{d}\mu+\int_{\bar{\Omega}_2}f(x,y,z)\mathrm{d}\mu.$$

性质 3 如果闭流形 $\bar{\Omega}$ 的测度为 μ, 则

$$\int_{\bar{\Omega}}\mathrm{d}\mu=\mu,$$

其中, $\int_{\bar{\Omega}}1\mathrm{d}\mu$ 简记为 $\int_{\bar{\Omega}}\mathrm{d}\mu$.

性质 4 如果在 $\bar{\Omega}$ 上, $f(x,y,z)\leqslant g(x,y,z)$, 则有不等式

$$\int_{\bar{\Omega}}f(x,y,z)\mathrm{d}\mu\leqslant\int_{\bar{\Omega}}g(x,y,z)\mathrm{d}\mu.$$

特别有

$$\left|\int_{\bar{\Omega}}f(x,y,z)\mathrm{d}\mu\right|\leqslant\int_{\bar{\Omega}}|f(x,y,z)|\mathrm{d}\mu.$$

证

$$\begin{aligned}\int_{\bar{\Omega}}f(x,y,z)\mathrm{d}\mu&=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta\mu_i\\&\leqslant\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}g(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta\mu_i=\int_{\bar{\Omega}}g(x,y,z)\mathrm{d}\mu.\end{aligned}$$

上式蕴涵

$$\left|\int_{\bar{\Omega}} f(x,y,z)\mathrm{d}\mu\right| \leqslant \int_{\bar{\Omega}} |f(x,y,z)|\mathrm{d}\mu$$

和下面的性质 5.

性质 5 设 M 和 m 分别是 $f(x,y,z)$ 在闭流形 $\bar{\Omega}$ 上的最大值和最小值, μ 为闭流形 $\bar{\Omega}$ 的测度. 则

$$m\mu \leqslant \int_{\bar{\Omega}} f(x,y,z)\mathrm{d}\mu \leqslant M\mu.$$

性质 6 (中值定理) 设函数 $f(x,y,z)$ 在闭流形 $\bar{\Omega}$ 上连续, 则在 $\bar{\Omega}$ 上至少存在一点 (ξ,η,ζ) 使得

$$\int_{\bar{\Omega}} f(x,y,z)\mathrm{d}\mu = f(\xi,\eta,\zeta)\mu,$$

其中 μ 表示闭流形 $\bar{\Omega}$ 的测度.

证 由已知, 根据性质 5 有

$$m\mu \leqslant \int_{\bar{\Omega}} f(x,y,z)\mathrm{d}\mu \leqslant M\mu,$$

即

$$m \leqslant \frac{1}{\mu}\int_{\bar{\Omega}} f(x,y,z)\mathrm{d}\mu \leqslant M.$$

根据连续函数的介值定理, 存在一点 (ξ,η,ζ), 满足

$$f(\xi,\eta,\zeta) = \frac{1}{\mu}\int_{\bar{\Omega}} f(x,y,z)\mathrm{d}\mu.$$

两端乘以 μ, 即得到所要证明的结果.

6.2 微元法与积分分类

6.1 节介绍了空间流形的概念和积分的定义. 一般地, 空间流形的具体表现形式为曲线、曲面和几何体. 在这一节, 我们首先对积分的概念加以提炼, 介绍微元法的思想. 然后, 根据积分流形的维数, 对积分进行分类.

6.2.1 微元法

我们以转动惯量为例, 介绍微元法的思想. 设在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中有 n 个质点, 它们分别位于点 (x_1,y_1,z_1), (x_2,y_2,z_2), $\cdots$, (x_n,y_n,z_n) 处, 质量分别为 $m_1,m_2,\cdots,m_n$. 由力学知识, 该质点系对于 x 轴、y 轴和 z 轴的转动惯量分别为

$$I_x = \sum_{i=1}^{n}(y_i^2+z_i^2)m_i,\quad I_y = \sum_{i=1}^{n}(z_i^2+x_i^2)m_i,\quad I_z = \sum_{i=1}^{n}(x_i^2+y_i^2)m_i;$$

对坐标原点的转动惯量为

$$I_O = \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) m_i.$$

设有一构件, 占有空间一有界闭流形 $\bar{\Omega}$, 在点 M 处, 密度为 $\rho(M)$. 假定 $\rho(M)$ 在 $\bar{\Omega}$ 上连续. 现在要求该构件的转动惯量.

先求 I_x. 与前面类似, 我们采用如下步骤.

(1) 将闭流形 $\bar{\Omega}$ 任意分割成 n 个小闭流形 $\bar{\Omega}_i, i = 1, 2, \cdots, n$. 于是,

$$I_x = \sum_{i=1}^{n} \Delta I_{xi},$$

其中 ΔI_{xi} 为第 i 个小闭流形对 x 轴的转动惯量.

(2) 计算 ΔI_{xi} 的近似值

$$\Delta I_{xi} \approx (\eta_i^2 + \zeta_i^2)\rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta\mu_i, \quad (\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in \bar{\Omega}_i.$$

(3) 求和并取极限, 得到

$$I_x = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} (\eta_i^2 + \zeta_i^2)\rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta\mu_i = \int_{\bar{\Omega}} (y^2 + z^2)\rho(x, y, z)\mathrm{d}\mu,$$

其中 $\lambda = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \{\lambda_i\}$ 表示分割中所有小闭流形直径的最大者. 同理,

$$I_y = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} (\zeta_i^2 + \xi_i^2)\rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta\mu_i = \int_{\bar{\Omega}} (z^2 + x^2)\rho(x, y, z)\mathrm{d}\mu,$$

$$I_z = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} (\xi_i^2 + \eta_i^2)\rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta\mu_i = \int_{\bar{\Omega}} (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)\mathrm{d}\mu,$$

$$I_O = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} (\xi_i^2 + \eta_i^2 + \zeta_i^2)\rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta\mu_i = \int_{\bar{\Omega}} (x^2 + y^2 + z^2)\rho(x, y, z)\mathrm{d}\mu.$$

一般地, 设 Q 是一个待求的量, 如转动惯量. 它是一个与闭流形 $\bar{\Omega}$ 有关的量, 而且具有所谓 "可加性", 即若将闭流形 $\bar{\Omega}$ 分成两个闭流形 $\bar{\Omega}_1$ 和 $\bar{\Omega}_2$, 则

$$Q(\bar{\Omega}) = Q(\bar{\Omega}_1) + Q(\bar{\Omega}_2),$$

其中 $Q(\bar{\Omega}_1)$ 表示量 Q 对应于闭流形区间 $\bar{\Omega}_1$ 部分的量. 推而广之, 如果把闭流形 $\bar{\Omega}$ 分成 n 个小闭流形 $\bar{\Omega}_1, \bar{\Omega}_2, \cdots, \bar{\Omega}_n$, 那么

$$Q = Q(\bar{\Omega}) = \sum_{i=1}^{n} Q(\bar{\Omega}_i) = \sum_{i=1}^{n} \Delta Q_i.$$

注意到, 虽然在整体上 Q 是未知的, 但在局部上 $\Delta Q_i = Q(\bar{\Omega}_i)$ 可以用已知量来近似地取而代之. 例如, 在求关于 x 轴的转动惯量时, 把小闭流形 $\bar{\Omega}_i$ 视为质点, 用 $(\eta_i^2+\zeta_i^2)\rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta\mu_i$ 近似地代替小闭流形 $\bar{\Omega}_i$ 的转动惯量 ΔI_{xi}, 可以得到 ΔI_{xi} 的近似表达式.

根据问题的条件, 分析 ΔQ_i 想办法找到 $f(x,y,z)$, 使得

$$\Delta Q_i = f(x_i,y_i,z_i)\Delta\mu_i + o(\Delta\mu_i), \quad (x_i,y_i,z_i)\in\bar{\Omega}_i, \tag{2.1}$$

也就是从 ΔQ_i 中分离出它的主要部分来. 那么,

$$Q=\sum_{i=1}^{n}\Delta Q_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\Delta\mu_i.$$

取极限便得到

$$Q=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\Delta\mu_i = \int_{\bar{\Omega}} f(x,y,z)\mathrm{d}\mu, \tag{2.2}$$

其中 λ 表示分割中所有小闭流形直径的最大者. 这样, 将所求量 Q 化成一个积分.

上述推导过程中关键一步是要建立关系式 (2.1). 一般地省略下标, 将其写成

$$\Delta Q = f(x,y,z)\Delta\mu + o(\Delta\mu)$$

或等价地写成

$$\mathrm{d}Q = f(x,y,z)\mathrm{d}\mu, \quad (x,y,z)\in\bar{\Omega}. \tag{2.3}$$

这是把一个量 Q 局部化, 通常称之为 Q 的**微元**, 从分析 ΔQ 而直接写出微分式 (2.3) 的方法称为**微元法**. (2.2) 式是把这些微元再积累起来, 得到整体量 Q, 即

$$Q=\int_{\bar{\Omega}}\mathrm{d}Q=\int_{\bar{\Omega}} f(x,y,z)\mathrm{d}\mu.$$

运用微元法, 不仅形式上简化了 "分割、求和、取极限" 过程, 而且建立了微分和积分的联系, 进一步认识它们是相辅相成的有机整体. 因此, 确立了 "微积分学" 的名称.

现在, 我们可以把微元法的过程归纳如下:

(1) 确立所要求的量 Q 和它所对应的闭流形 $\bar{\Omega}$, 以及在其上变化的测度 μ;

(2) 在小闭流形 $\Delta\bar{\Omega}$ 上, 分析 ΔQ, 建立微分关系式

$$\Delta Q = f(x,y,z)\Delta\mu + o(\Delta\mu) \quad 或 \quad \mathrm{d}Q = f(x,y,z)\mathrm{d}\mu;$$

(3) 作积分

$$Q=\int_{\bar{\Omega}} f(x,y,z)\mathrm{d}\mu,$$

并计算出此积分值, 即求出了量 Q.

6.2.2 线积分

1. 线积分

空间 1 维闭流形上的积分称为**线积分**. 空间 1 维流形是空间的曲线. 空间曲线的解析表达方式有一般式和参数式两种. 一般式方程写成如下形式:

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0, \end{cases} \tag{2.4}$$

即表示成两个曲面的交线. 参数式方程为

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \\ z=z(t). \end{cases} \tag{2.5}$$

在利用微元法时, 1 维闭流形被分割成 1 维小闭流形, 也就是小的曲线弧段. 曲线的测度即为曲线的长度. 此时, 改记 $\mathrm{d}\mu=\mathrm{d}s$, $\int_{\bar{\Omega}} f(x,y,z)\mathrm{d}\mu=\int_{\bar{\Omega}} f(x,y,z)\mathrm{d}s$.

例 2.1　设有空间曲线段 (空间 1 维闭流形) C, 以 C 为准线作一个母线平行于 z 轴的柱面. 求这个柱面介于曲线 C 和曲面 $z=f(x,y)$ 之间的那一部分的侧面积 (图 6-3).

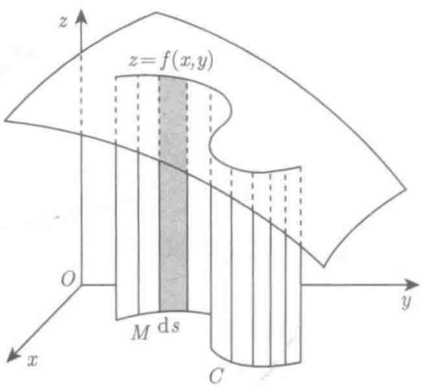

图 6-3

解　利用微元法. 用 A 表示要求的侧面积. 在曲线 C 上的任意一点 $M(x,y,z)$ 处, 取曲线微元 ΔC, 微元 ΔC 的长度元素为 Δs. 则把柱面上对应于 ΔC 的面积微元 ΔA 近似地看成以 Δs 为底, $|f(x,y)-z|$ 为高的矩形. 因此,

$$\Delta A \approx |f(x,y)-z|\Delta s \quad 或 \quad \mathrm{d}A=|f(x,y)-z|\mathrm{d}s.$$

于是,

$$A=\int_C |f(x,y)-z|\mathrm{d}s. \tag{2.6}$$

2. 定积分

如果空间的曲线段是 x 轴的闭区间 $[a,b]$, 则曲线积分称为定积分. 在这种情况下, $C=[a,b], f(x,y,z)\equiv f(x), \mathrm{d}s=\mathrm{d}x$, 线积分

$$\int_C f(x,y,z)\mathrm{d}s=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

a 称为积分下限, b 称为积分上限.

例 2.2 (曲边梯形的面积) 设函数 $y=f(x)$ 是定义在 $[a,b]$ 上的非负连续函数. 由 x 轴, 直线 $x=a$, $x=b$ 和曲线 $y=f(x)$ 所围成的图形称为曲边梯形 (图 6-4). 求它的面积.

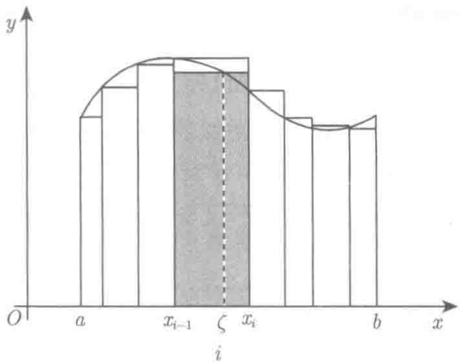

图 6-4

解 注意到 $C=\{(x,0,0)|a\leqslant x\leqslant b, y=0, z=0\}=[a,b]$. 根据 (2.6) 式,

$$A=\int_C |f(x)-y|\mathrm{d}s=\int_C f(x)\mathrm{d}s=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

例 2.2 表明, 如果被积函数非负, 定积分表示相应曲边梯形的面积.

3. 第二型曲线积分

我们再来看一种特殊形式的曲线积分. 以下为叙述简便起见, 以 A 为起点, B 为终点的曲线 L, 记作 L_{AB}. 这样的曲线通常叫做有向曲线. 下面考虑一个质点, 在变力 $\boldsymbol{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$ 作用下沿着有向曲线 L_{AB} 移动所做的功.

利用微元法, 在曲线 L 上任一点 $M(x,y,z)$ 处, 取有向小弧段 $\overset{\frown}{MN}$, 它的长度为 Δs. 当 Δs 很小时, 用 M 点处的力 $\boldsymbol{F}$ 来代替 MN 上其他各点处的力, 而把小

弧段 $\widehat{MN}$ 近似地看成有向直线段 $\overrightarrow{MN}$. 若用 τ_x, τ_y 和 τ_z 分别表示向量 $\overrightarrow{MN}$ 与 x 轴正向、y 轴正向和 z 轴正向的夹角, 则 $\overrightarrow{MN}$ 的单位方向向量为 $\{\cos\tau_x, \cos\tau_y, \cos\tau_z\}$, 故

$$\overrightarrow{MN} = \{\cos\tau_x, \cos\tau_y, \cos\tau_z\}\Delta s = \cos\tau_x \cdot \Delta s\boldsymbol{i} + \cos\tau_y \cdot \Delta s\boldsymbol{j} + \cos\tau_z \cdot \Delta s\boldsymbol{k}.$$

因此, 变力 $\boldsymbol{F}(x, y, z)$ 沿着有向小弧段 $\widehat{MN}$ 上所做的功近似地等于

$$\Delta W \approx \boldsymbol{F}(x, y, z) \cdot \overrightarrow{MN} = (P(x, y, z)\cos\tau_x + Q(x, y, z)\cos\tau_y + R(x, y, z)\cos\tau_z)\Delta s.$$

将上式改写成微分形式就得到, 变力 $\boldsymbol{F}$ 沿着有向曲线 L_{AB} 所做的功的微分表达式

$$\mathrm{d}W = (P(x, y, z)\cos\alpha + Q(x, y, z)\cos\beta + R(x, y, z)\cos\gamma)\mathrm{d}s, \tag{2.7}$$

其中 $\mathrm{d}s$ 为对弧长的微分, $\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ 为有向曲线 L_{AB} 在点 (x, y, z) 处与曲线方向一致的单位切向量. 从而对 (2.7) 式在有向曲线 L_{AB} 上积分, 便得所要求的功

$$W = \int_{L_{AB}} (P(x, y, z)\cos\alpha + Q(x, y, z)\cos\beta + R(x, y, z)\cos\gamma)\mathrm{d}s. \tag{2.8}$$

除了做功问题外, 实际应用中也常遇到类似的积分. 从形式上看, 上述积分是沿着曲线 L 的线积分. 但是, 其被积表达式中含有切线的方向余弦 $\cos\alpha$, $\cos\beta$ 和 $\cos\gamma$, 这些方向余弦没有显式表示出来, 积分不仅与 L 上每点坐标 (x, y, z) 有关, 而且与 L_{AB} 的方向有关. 记

$$\mathrm{d}x = \cos\alpha\mathrm{d}s, \quad \mathrm{d}y = \cos\beta\mathrm{d}s, \quad \mathrm{d}z = \cos\gamma\mathrm{d}s.$$

则 (2.8) 式可表示成

$$\int_{L_{AB}} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\mathrm{d}s = \int_{L_{AB}} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z,$$

称为**第二型曲线积分**, 也叫**对坐标的曲线积分**. 与此对应, 原来的线积分称为**第一型曲线积分**, 也叫**对弧长的曲线积分**.

显然, 当 $P(x, y, z) = 0$, $Q(x, y, z) = 0$ 或 $R(x, y, z) = 0$ 时, 分别得到

$$\int_{L_{AB}} P(x, y, z)\mathrm{d}x = \int_{L_{AB}} P(x, y, z)\cos\alpha\mathrm{d}s,$$

$$\int_{L_{AB}} Q(x, y, z)\mathrm{d}y = \int_{L_{AB}} Q(x, y, z)\cos\beta\mathrm{d}s,$$

$$\int_{L_{AB}} R(x, y, z)\mathrm{d}y = \int_{L_{AB}} R(x, y, z)\cos\gamma\mathrm{d}s.$$

需要指出, (2.8) 式不仅给出了第二型曲线积分的定义, 而且给出了它与第一型曲线积分的关系. 因此, 可以用第一型曲线积分的计算方法来计算第二型曲线积分.

6.2.3 面积分

1. 面积分

空间 2 维闭流形上的积分, 称为**面积分**. 空间 2 维流形是空间的曲面. 空间曲面的解析表达方式有一般式和参数式两种. 一般式方程写成如下形式:

$$F(x,y,z)=0; \tag{2.9}$$

参数式方程为

$$\begin{cases} x=x(u,v), \\ y=y(u,v), \\ z=z(u,v). \end{cases} \tag{2.10}$$

在利用微元法时, 2 维闭流形被分割成 2 维小闭流形, 也就是小的曲面片. 此时, 流形的测度即为曲面的面积. 通常用 Σ 表示 2 维闭流形. 记

$$\mathrm{d}\mu=\mathrm{d}S, \quad \int_{\bar{\Omega}} f(x,y,z)\mathrm{d}\mu=\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S.$$

例 2.3 设有一物件占有空间一有界曲面 Σ, 在曲面的点 M 处, 密度为 $\rho(M)$. 假定 $\rho(M)$ 在 Σ 上连续. 求该物件的质心.

我们先来看简单的情况. 设在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中有 n 个质点, 它们分别位于点 $(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2),\cdots,(x_n,y_n,z_n)$ 处, 质量分别为 $m_1,m_2,\cdots,m_n$. 则该质点系的质心坐标为

$$\bar{x}=\frac{m_x}{m}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i}, \quad \bar{y}=\frac{m_y}{m}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i}, \quad \bar{z}=\frac{m_z}{m}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i z_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i},$$

其中, $m=\sum\limits_{i=1}^{n} m_i$ 为质点系的总质量,

$$m_x=\sum_{i=1}^{n} m_i x_i, \quad m_y=\sum_{i=1}^{n} m_i y_i, \quad m_z=\sum_{i=1}^{n} m_i z_i.$$

解 在曲面 Σ 上的任意一点 $M(x,y,z)$ 处, 取曲面微元 $\Delta\Sigma$, 微元 $\Delta\Sigma$ 的面积元素为 ΔS. 由于 $\Delta\Sigma$ 的直径很小, 且 $\rho(M)$ 在 Σ 上连续, 所以, 相应于 $\Delta\Sigma$ 部分的质量近似等于 $\rho(M)\Delta S$. 这部分质量可近似看成集中在点 M 上. 于是,

$$\mathrm{d}m_x=x\rho(x,y,z)\mathrm{d}S, \quad \mathrm{d}m_y=y\rho(x,y,z)\mathrm{d}S, \quad \mathrm{d}m_z=z\rho(x,y,z)\mathrm{d}S.$$