

灰色系统丛书

刘思峰 主编

分数阶灰色模型及其 在装备费用测算中的应用

—— 吴利丰 张娜 著 ——



科学出版社

灰色系统丛书

刘思峰 主编

分数阶灰色模型及其 在装备费用测算中的应用

吴利丰 张 娜 著

国家自然科学基金项目

教育部人文社会科学研究规划基金项目

河北工程大学博士科研启动基金项目



资助

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书系统地论述分数阶灰色预测模型,是作者长期从事灰色系统理论探索、实际应用和教学工作的结晶,精辟地向读者展示出灰色系统理论这一新学科的前沿发展动态。全书共分 10 章,包括分数阶累加灰色预测模型、分数阶导数灰色预测模型、基于分数阶缓冲算子的灰色预测模型、GM(1, 1) 分数阶累积模型、灰色关联度模型等。这些内容都是作者首次提出。应用上强调方法在复杂装备费用预测中的实际背景。

本书可作为理工类、经管类各专业大学生和研究生学习预测方法与灰色系统理论的教材,也可供科研机构、高等院校等单位的科研技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

分数阶灰色模型及其在装备费用测算中的应用 / 吴利丰, 张娜著. — 北京: 科学出版社, 2017.12

(灰色系统丛书)

ISBN 978-7-03-055114-6

I. ①分… II. ①吴… ②张… III. ①灰色模型—研究 IV. ①N945.12

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2017) 第 268670 号

责任编辑: 李 莉 / 责任校对: 王晓茜

责任印制: 吴兆东 / 封面设计: 无极书装

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

北京京华虎彩印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2017 年 12 月第 一 版 开本: 720×1000 B5

2017 年 12 月第一次印刷 印张: 9 1/4

字数: 190 000

定价: 62.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

丛 书 序

灰色系统理论是 1982 年中国学者邓聚龙教授创立的一门以“小数据，贫信息”不确定性系统为研究对象的新学说。新生事物往往对年轻人有较大吸引力，在灰色系统研究者中，青年学者所占比例较大。虽然随着这一新理论日益被社会广泛接受，一大批灰色系统研究者获得了国家和省部级科研基金的资助，但在各个时期仍有不少对灰色系统研究有兴趣的新人暂时缺乏经费支持。因此，中国高等科学技术中心（China Center of Advanced Science and Technology, CCAST）的长期持续支持对于一门成长中的新学科无疑是雪中送炭。学术因争辩而产生共鸣。热烈的交流、研讨碰撞出思想的火花，促进灰色系统研究工作不断取得新的进展和突破。

由科学出版社推出的这套“灰色系统丛书”，包括灰色系统的理论、方法研究及其在医学、水文、人口、资源、环境、经济预测、作物栽培、复杂装备研制、电子信息装备试验、空管系统安全监测与预警、冰凌灾害预测分析、宏观经济投入产出分析、农村经济系统分析、粮食生产与粮食安全、食品安全风险评估及预警、创新管理、能源政策、联网审计等众多领域的成功应用，是近 10 年来灰色系统理论研究和应用创新成果的集中展示。

CCAST 是著名科学家李政道先生在世界实验室、中国科学院和国家自然科学基金委员会等部门支持下创办的学术机构，旨在为中国学者创造一个具有世界水平的宽松环境，促进国内外研究机构和科学家之间的交流与合作；支持国内科学家不受干扰地进行前沿性的基础研究和探索，让他们能够在国内做出具有世界水平的研究成果。近 30 年来，CCAST 每年都支持数十次学术活动，参加活动的科学家数以万计，用很少的钱办成了促进中国创新发展的大事。CCAST（特别是学术主任叶铭汉院士）对灰色系统学术会议的持续支持，极大地促进了灰色系统理论这门中国原创新兴学科的快速成长。经过 30 多年的发展，灰色系统理论已被全球学术界所认识和接受。多种不同语种的灰色系统理论学术著作相继出版，全世界有数千种学术期刊接收、刊登灰色系统论文，其中包括各个科学领域的国际顶级期刊。

2005 年，经中国科学技术协会（以下简称中国科协）和中华人民共和国民政

部批准，中国优选法统筹法与经济数学研究会成立了灰色系统专业委员会，挂靠南京航空航天大学。国家自然科学基金委员会、CCAST、南京航空航天大学 and 上海市浦东新区教育学会对灰色系统学术活动给予大力支持。2007 年，全球最大的学术组织 IEEE 总部批准成立 IEEE SMC 灰色系统委员会，在南京航空航天大学举办了首届 IEEE 灰色系统与智能服务国际会议（GSIS）。2009 年和 2011 年，南京航空航天大学承办了第二届、第三届 IEEE GSIS。2013 年，在澳门大学召开的第四届 IEEE GSIS 得到澳门特别行政区政府资助。2015 年，在英国 De Montfort 大学召开的第五届 IEEE GSIS 得到欧盟资助。2017 年 7 月，第六届 IEEE GSIS 将在瑞典斯德哥尔摩大学举办。

在南京航空航天大学，灰色系统理论已成为经济管理类本科生、硕士生、博士生的一门重要课程，并为全校各专业学生开设了选修课。2008 年，灰色系统理论入选国家精品课程；2013 年，又被遴选为国家精品资源共享课程，成为向所有灰色系统爱好者免费开放的学习资源。

2013 年，笔者与英国 De Montfort 大学杨英杰教授合作，向欧盟委员会提交的题为 Grey Systems and Its Application to Data Mining and Decision Support 的研究计划，以优等评价入选欧盟第 7 研究框架“玛丽·居里国际人才引进行动计划”（Marie Curie International Incoming Fellowships, PEOPLE-IIF-GA-2013-629051）。2014 年，由英国、中国、美国、加拿大等国学者联合申报的英国 Leverhulme Trust 项目以及 26 个欧盟成员国与中国学者联合申报的欧盟 Horizon 2020 研究框架计划项目相继获得资助。2015 年，由中国、英国、美国、加拿大、西班牙、罗马尼亚等国学者共同发起成立了“国际灰色系统与不确定性分析学会”（International Association of Grey Systems and Uncertainty Analysis）。

灰色系统理论作为一门新兴学科已以其强大的生命力自立于科学之林。

这套“灰色系统丛书”将成为灰色系统理论发展史上的一座里程碑。它的出版必将有力地推动灰色系统理论这门新学科的发展和传播，促进其在重大工程领域的实际应用，促进我国相关科学领域的发展。

刘思峰

南京航空航天大学和英国 De Montfort 大学特聘教授
欧盟玛丽·居里国际人才引进行动计划 Fellow (Senior)
国际灰色系统与不确定性分析学会主席

2015 年 12 月

序

20 世纪 80 年代初期, 邓聚龙教授首创灰色系统理论。30 多年来, 灰色系统理论研究新成果不断涌现。作为中国学者原创的新学说, 灰色系统理论正逐步走向世界。目前, 从事理论、方法研究和实际应用的学者遍布全球各地。

灰色序列算子, 如累加算子、缓冲算子等均以整数阶形式出现。灰色差分方程和灰色微分方程模型也都是整数阶模型。近年来, “分数阶” 思想及相关研究迅速兴起, 新的研究成果不断涌现。吴利丰博士将分数阶思想引入灰色序列算子和灰色预测模型, 提出了分数阶累加算子、分数阶缓冲算子, 以及分数阶差分方程和分数阶微分方程模型, 并研究了分数阶算子和分数阶模型的性质, 分析了灰色预测模型稳定性与样本量的关系, 取得了一系列具有重要理论意义和实际应用价值的研究成果。其中 1 篇论文入选中国精品科技期刊顶尖学术论文——领跑者 5 000, 1 篇论文入选 *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 中的 “Highly Cited Papers”。

2013 年, 吴利丰以其在分数阶灰色预测模型研究方面的开拓性工作被遴选为南京航空航天大学全国优秀博士学位论文培养对象。在读期间, 他曾获得研究生国家奖学金、南京航空航天大学首届“群星创新奖”、中航机电特别奖学金、“临近空间杯” 博士生科技创新奖、“学术十杰” 称号。他在 2015 年荣获江苏省科学技术奖 (自然科学) 一等奖、2016 年获国防科学技术奖一等奖。

该书是吴利丰博士近年来研究工作的结晶。全书以分数阶的 “in between” 思想为主线, 系统展示了他在分数阶序列算子和分数阶预测模型领域的成果。在此, 特向读者推荐这本集科学性、创新性于一体的灰色系统理论著作。我深信, 它的出版将会推动灰色系统理论这门新学科的发展和传播, 促进相关学科的发展和灰色系统模型的实际应用。

刘思峰

国家有突出贡献的专家

国际灰色系统与不确定性分析学会主席
南京航空航天大学特聘教授、博士生导师

2017 年 4 月 30 日

前 言

灰信息、随机信息、模糊信息和粗糙信息是已知的四种单式不确定性信息，对各种不确定性信息的数学处理是当今科学研究中的热点之一。自邓聚龙先生提出灰色系统理论以来，灰色建模技术取得了一系列可喜的研究成果。但是作为一门新兴学科，其理论基础有待完善。本书从“提出问题、解决问题、实例验证”的思路出发，将“分数阶”的思想贯穿于全书，深入研究灰色建模技术，使新模型满足新信息优先原理和最少信息原理，以期丰富和完善灰色系统理论。本书主要研究工作如下。

(1) 利用矩阵扰动理论证明了灰色一阶序列累加方法在扰动相等的情况下，原始序列样本量较大，解的扰动界较大；样本量较小，解的扰动界较小。从稳定性的角度考虑，当样本量较小时，所建模型相对稳定。为进一步降低扰动界，本书提出了分数阶序列累加，从新信息是否优先、初值是否利用、单调性、稳定性和还原误差大小这五方面比较分数阶累加模型和传统一阶累加模型的差异。

(2) 针对缺乏统计规律的小样本预测系统，如何挖掘其发展规律，一直是学术界的难点。本书依据分数阶微积分理论，将整数阶导数灰色模型推广到分数阶导数灰色模型，并从是否满足新信息优先原理、初值利用情况、还原误差大小和稳定性等方面说明了新模型的优势，以期用 Caputo 型分数阶导数的记忆性描述小样本预测系统。通过实例表明含有 Caputo 型分数阶导数的灰色预测模型的有效性与实用性。

(3) 通过矩阵扰动理论分别证明：经典弱化缓冲算子、变权弱化缓冲算子和普通强化缓冲算子的新信息优先性，从新信息优先的角度比较了这三种缓冲算子，并讨论了样本量与缓冲作用之间的关系。针对传统缓冲算子不能实现作用强度的微调，从而导致缓冲作用效果过强或过弱的问题（ n 阶缓冲算子的缓冲效果过弱，而 $n+1$ 阶缓冲算子的缓冲效果可能过强），借助矩阵计算方法，构造的分数阶经典弱化缓冲算子可以实现缓冲效果随着阶数的改变而改变。

(4) 提出了相似信息优先的复杂装备费用预测模型，可用于样本费用与系统指标之间存在较强的线性关系的情况；从理论上证明了基于相似关联度的 GM

(0, N) 模型的建模原理, 可用于样本费用与系统指标之间线性关系较弱的情况; 通过实例说明了新型 GM(1, 1) 模型在复杂装备维修费用预测中的实用性和有效性。

本书由吴利丰总体策划、主要执笔和统一定稿, 其中张娜执笔了第 8 章和第 9 章; 高晓辉执笔第 3 章。本书的出版得到了国家自然科学基金(71401051)、教育部人文社会科学研究规划基金(15YJA630017)等项目的资助! 在本书写作和出版过程中, 得到中国优选法统筹法与经济数学研究会副理事长兼灰色系统专业委员会理事长刘思峰教授、英国 De Montfort University(德蒙福特大学)的 Yingjie Yang 教授、科学出版社领导和老师等的热情支持和指导, 在此致以衷心的感谢!

由于作者水平有限, 书中难免存在不足之处, 恳请读者批评指正!

作 者

2017 年 4 月

目 录

第 1 章	引论	1
1.1	问题的提出及研究意义	1
1.2	研究现状及评述	2
1.3	主要研究方法	9
第 2 章	分数阶累加灰色预测模型	10
2.1	基于一阶累加建模解的扰动分析	10
2.2	基于分数阶累加的离散灰色预测模型	14
2.3	分数阶累加灰色模型与一阶累加灰色模型的比较	20
2.4	实例分析	24
第 3 章	含分数阶累加的灰色指数平滑模型	27
3.1	灰色二次指数平滑模型	27
3.2	灰色三次指数平滑模型	30
3.3	模型性质的比较	31
第 4 章	分数阶反向累加 GM (1, 1) 模型	35
4.1	一阶反向累加 GM (1, 1) 模型	35
4.2	分数阶反向累加 GM (1, 1) 模型	38
4.3	实例分析	40
第 5 章	分数阶导数灰色预测模型	42
5.1	基于 Caputo 型分数阶导数的灰色模型	42
5.2	新信息优先的分数阶导数灰色模型	43
5.3	实例分析	47
第 6 章	基于分数阶缓冲算子的灰色预测模型	50
6.1	经典弱化缓冲算子的新信息优先性	50
6.2	变权弱化缓冲算子的新信息优先性	56
6.3	普通强化缓冲算子的新信息优先性	61

6.4	分数阶弱化缓冲算子的构造	70
6.5	多元缓冲算子研究	72
6.6	实例分析	77
第 7 章	GM (1, 1) 分数阶累积模型	81
7.1	基于传统累积法估计 GM (1, 1) 模型参数的稳定性	81
7.2	基于分数阶累积法估计灰色模型参数的稳定性	84
7.3	实例分析	88
第 8 章	区间灰数序列的灰色预测模型	90
8.1	区间灰数的大小比较方法	90
8.2	区间灰数的无偏预测模型构建	92
8.3	上界、下界均服从指数增长的区间灰数预测分析	95
8.4	实例分析	96
第 9 章	灰色关联度模型	98
9.1	分数阶灰色关联度	98
9.2	面向横截面数据的灰色相似关联度	103
9.3	针对面板数据的三维灰色凸关联度	106
第 10 章	新模型在复杂装备费用预测中的应用研究	112
10.1	相似信息优先的复杂装备费用预测模型	112
10.2	基于 GM (0, N) 模型预测复杂装备研制费用	117
10.3	基于分数阶累加 GM (1, 1) 模型预测武器装备维修费用	123
参考文献		126

第1章 引 论

1.1 问题的提出及研究意义

在系统科学研究中,系统内外各种扰动的存在与人们认识水平的局限,使人们得到的信息往往带有某种不确定性。随着科学的发展和人类社会的进步,人们对各类系统不确定性问题的研究逐步深入。在20世纪后半叶,系统科学领域涌现了概率论、模糊数学^[1, 2]、粗糙集^[3, 4]等其他不确定性系统理论和方法^[5]。在 World 科技大发展的背景下,1982年,我国学者邓聚龙创立了灰色系统理论,它以“部分信息已知,部分信息未知”的“小样本”“贫信息”不确定性系统为研究对象,是一种研究少数据、贫信息不确定性问题的新方法^[6~9]。经过三十多年的发展,灰色系统理论已初步建立了一门新兴学科的理论结构,尤其是灰色预测模型和灰色关联度模型在能源^[10~12]、农业^[13]、教育^[14]、工业^[15~17]、经济^[18~21]等众多领域的成功应用,展现出了其重要的理论及应用价值,赢得了国内外学者的广泛肯定和关注。

尽管灰色系统理论取得了较大发展,但是作为一门新兴学科,其理论体系还有待完善和丰富,总体来讲,现有模型的如下问题值得关注。

(1) 为什么灰色系统理论适用于“小样本”问题有待解决。经典概率论是建立在大样本基础上的,样本量越大越好。灰色“小样本”系统旨在充分利用辅助信息,注重“贫信息”的内涵,并不是样本量越小越好,这与大样本为基础的概率论是相悖的。然而样本量对灰色系统模型的影响如何还未见研究,本书从稳定性的角度考虑,证明了当样本量较小时,所建模型相对稳定。这对夯实灰色系统基础理论起着关键性的作用。

(2) 现有灰色预测模型是否满足灰色系统理论的最少信息原理和新信息优先原理值得研究。充分开发利用已有的“最少信息”是灰色系统理论解决问题的基本思路;根据历史经验和统计规律,新信息对小样本的预测、决策往往具有较强的指示性,含有较高的信息质量。然而本书通过理论证明了:现有的部分灰色

预测没有利用原始序列的初值,也不满足新信息优先原理,普通强化缓冲算子不满足最少信息原理和新信息优先原理。进而提出了分数阶累加灰色模型、分数阶导数模型和分数阶缓冲算子,这些新模型都满足最少信息原理,并且在一定程度上解决了不满足新信息优先原理的问题。这些对灰色预测理论的完善和发展具有重要的理论意义。

(3) 复杂装备全寿命周期费用预测迫切需要精度更高、更可靠的分数阶灰色系统模型。大型复杂装备往往是小批量、定制化生产,费用信息难于收集和整理,数据质量和数量有限。费用预测面临着数据少,统计不准的问题。在这种情况下,各种灰色预测模型被广泛应用于装备费用的预测。鉴于现代复杂装备研制、生产、使用大都要经历一个较长的时期,考虑到技术进步、通货膨胀、学习曲线、生产率的变化,越新的数据越能反映复杂装备费用与参数之间的关系,这与灰色系统理论的新信息优先原理是一致的。因此有必要探讨现有灰色预测模型的建模机理,进一步提出更合理、适用的灰色预测模型。这对于推动灰色系统理论与复杂装备成本测算问题的对接具有现实意义。

1.2 研究现状及评述

1.2.1 累加生成方法研究

邓聚龙教授认为累加生成可以使灰色过程由灰变白,通过累加使离乱的原始数据中蕴含的规律充分显露出来,进而看出灰量积累的发展态势^[22]。Wen 提出了局部序列灰色累加^[23];宋中民等(宋中民等^[24]、宋中民和邓聚龙^[25])对序列累加生成进行了深入研究,分析累加生成序列的性质,并提出累加生成空间和反向累加生成算子;杨知等根据反向序列累加的特点改进了 GOM(1, 1)模型的背景值^[26];杨保华和张忠泉^[27]、周慧和王晓光^[28]分别基于倒数累加生成对单调递减序列进行灰色建模;陈超英将累加生成改为卷积变换,构建了带有线性时间项的 GM(1, 1, t)模型^[29];王美岚研究了生成矩阵的元素与生成序列凸性的关系,并用黎曼积分解释了传统累加的几何意义,用斯蒂阶积分解释广义累加的几何意义^[30];肖新平等(肖新平和毛树华^[7]、肖新平等^[31])给出了累加生成算子的矩阵形式,讨论了 r 阶累减生成的基矩阵,并将传统的累加生成推广到广义累加生成和广义累减生成;但是广义累加生成较为笼统,且不易计算^[32, 33];同小军等举例说明灰色模型的累加生成能“增强”规律性,具有良好的抗噪性^[34];陈俊珍的研究表明累加生成不一定能弱化“随机性”,而给结果带来好处^[35];徐永高指出累加和最新二乘法是导致灰色模型病态的直接原因^[36];钱吴永等^[37]、魏玉明

等^[38]、孙全敏和王雅鹏^[39]、马乐^[40]都指出累加序列是原始数据的加权和,传统的累加将原始数据看作是同等重要的,并没有体现原始数据中新信息的重要性,为此钱吴永等^[37]、魏玉明等^[38]分别提出加权累加生成的 GM (1, 1) 模型,孙全敏和王雅鹏^[39]提出了变初始点累加; Tien 研究了累加阶数对原始数据中间信息的影响^[41]。上述学者的研究总结起来可以分为两类:一是针对不同的序列特征构造各自适用的生成方法,二是研究已有累加生成技术的性质以及对灰色预测模型的影响。上述研究缺乏对累加生成的系统研究,也没有比较不同累加生成对灰色预测模型的影响。

1.2.2 GM (1, 1) 模型研究

邓聚龙教授基于预测控制的思想完成了灰色系统理论的开篇之作,经过 30 多年的发展,灰色预测模型已成为灰色系统理论中最为活跃的分支之一,学者们从不同角度对具有一阶方程和一个变量的灰色模型 GM (1, 1) 进行了深入研究,主要集中在以下五个方面。

1. 初始值优化

陈俊珍^[35]、Tien^[42]指出:由于传统的序列累加和初始条件选为 $x^{(0)}(1)$,共同造成了模拟值 $\hat{x}^{(0)}(k)$ 与初始值 $x^{(0)}(1)$ 无关,第一点信息没有起作用,说明传统的灰色模型不满足最少信息原理;考虑到新信息在建模中应当发挥关键作用,Dang^[43]、张怡等^[44]、董奋义和田军^[45]分别以 $x^{(1)}(n)$ 作为灰色模型初始条件;罗佑新^[46]则以 $x^{(0)}(n)$ 作为灰色模型初始条件;姚天祥等以拟合误差平方和最小为目标函数,求得最优初始点^[47];实际上,初始值优化就是优化指数模型的一个参数,该参数不一定过某个原始数据,规定该参数过某个原始数据,得到的误差平方和有可能不是最优。因此王义闹以误差平方和最小为目标函数,直接优化指数模型的这个参数,得到了最小的误差平方和^[48]。

2. 背景值优化

传统的背景值 $z^{(1)}(k) = x^{(1)}(k) + x^{(1)}(k+1)/2$ 适用于时间间隔小、变化平缓的序列,不适用于其他情况,因此学者们基于不同视角优化背景值,拓宽了灰色模型的适用范围。例如,谭冠军首次基于 $z^{(1)}(k)$ 的几何意义构造了新背景值^[49];王义闹等设待定参数 $\lambda \in (0, 1)$, 将 $z^{(1)}(k)$ 推广为 $z^{(0)}(k) = \lambda z^{(0)}(k) + (1-\lambda)x^{(0)}(k+1)$, 得到结论: ① $\lim_{a \rightarrow 0} \lambda = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a} - \frac{1}{e^a - 1} = \frac{1}{2}$; ② $\lambda(a)$ 为严格单调增函数^[50]; Zou 给出的背景值为 $z^{(1)}(k) = \frac{x^{(0)}(k+1)}{\ln x^{(1)}(k+1) - \ln x^{(1)}(k)}$ ^[51]; Lin 则给出的背景值为 $z^{(1)}(k) =$

$\frac{x^{(0)}(k)}{\ln x^{(0)}(k) - \ln x^{(0)}(k-1)} + x^{(1)}(k) - \frac{(x^{(0)}(k))^2}{x^{(0)}(k) - x^{(0)}(k-1)}$ [52]; 李俊峰和戴文战基于 Newton-Cotes 公式和插值重构了模型的背景值 [53]; 王叶梅等 [54]、李翠凤和戴文战 [55] 分别研究了非等间距 GM (1, 1) 模型背景值的构造方法。

3. 模型参数估计方法

在比较灰色系统模型优劣时常用平均相对误差绝对值指标, 由于在模型优化算法中多数以误差平方和最小为目标, 运用最小二乘法估计模型参数, 而不是以平均相对误差绝对值最小为目标, 这样就导致了模型优化与模型检验的脱节, 模型的平均相对误差绝对值可能不会达到最小。因此众学者在最优化目标函数与模型精度检验标准一致性方面进行研究, 张岐山运用微粒群算法优化模型背景值和边值, 得到了较高的模型精度 [56]; Lee 设误差绝对值最小为目标函数, 采用遗传算法优化模型参数 [57]; 何文章等在平均相对误差绝对值最小为目标函数的情况下, 运用线性规划求解模型参数 [58]; Wang 和 Hsu [59]、Hsu [60]、郑照宁和刘德顺 [61] 都是在平均相对误差绝对值最小为目标函数的情况下, 运用遗传算法求解模型参数; 吴利丰和王义闹在平均相对误差绝对值最小化的准则下, 提出一种估计灰色模型的算法, 使模型优化与模型检验的准则一致, 且得到了最小的平均相对误差绝对值 [62]。

除了上述估计参数的方法外, 近几年, 有学者采用累积法估计灰色预测模型的参数 [63]。曾祥艳和肖新平先对原始数据进行幂变换, 然后运用累积法估计模型参数, 再将参数代入内涵型 GM (1, 1), 最后还原新序列, 得到原始数据的拟合值, 不仅比传统模型精度高, 还适用于高增长序列 [64]; 郭文艳和任大卫引入累积法估计 GM (1, 1) 模型的参数, 避免了大量的矩阵运算, 降低了计算量 [65]; 李洪然等运用参数累积估计法代替最新二乘法, 证实模型降低了矩阵条件数 [66]; 黄磊和张书毕用累积法估计背景值加权的 GM (1, 1) 模型参数, 不仅拟合、预测精度高, 且降低了模型的病态性, 提高了预测的可靠性 [67]。

4. GM (1, 1) 模型的性质研究

近年来, 对模型参数的研究取得一些成果。邓聚龙指出发展系数的界区为 $a \in \left(\frac{-2}{n+1}, \frac{2}{n+1} \right)$, 级比界区为 $\sigma(k) \in \left(e^{\frac{-2}{n+1}}, e^{\frac{2}{n+1}} \right)$ [5]; 刘思峰和邓聚龙证明 GM (1, 1) 模型的适用范围为: 发展系数 $a \in (-2, 2)$, 依据发展系数阈值, 界定了 GM (1, 1) 模型的有效区、慎用区、不宜区和禁区 [68]; 王文平和邓聚龙基于 GM (1, 1) 模型的混沌特性解释了 GM (1, 1) 模型的禁区现象 [69]; 胡大红和魏勇证明了当 $x^{(0)}(k)$ 非负单调递减时, 发展系数 $a > 0$ [70]。党耀国等证明了传统 GM (1, 1) 模型不会存在病态性问题 [71]; 郑照宁等则指出 GM (1, 1) 模型的方程组存在严重的病态性问题 [72]; 吴正朋等指出直接用原始数据建立离散 GM

(1, 1) 模型有很大的病态性问题^[73]; Chen 给出了建立 GM (1, 1) 模型的充要条件^[74]。关于样本量与模型的关系研究不多, Li 等^[75]、Su 等^[76]建议只用最新的数据建立 GM (1, 1) 模型, 不必用所有数据建模; Yao 等基于等比序列证明了样本量越大, 模拟误差越大, 从模拟误差的角度考虑 GM (1, 1) 模型适用于小样本建模^[77]; Yeh 和 Lu 指出灰色模型的样本量 n 满足 $4 \leq n \leq \max \left\{ 4, \frac{2 - |\ln a|}{|\ln a|} \right\}$ ^[78]。

5. GM (1, 1) 模型的拓展

邓聚龙对 GM (1, 1) 模型进行了深入研究, 推导出 5 种派生模型^[5]; 吉培荣等提出的无偏 GM (1, 1) 模型具有白指数律重合性^[79]; 穆勇给出的无偏 GM (1, 1) 直接建模法同时满足白指数律重合性和线性变换一致性^[80]; Xiao 等基于 GM (1, 1) 模型的矩阵形式给出了 GM (1, 1) 模型的若干个扩展方向^[81]; Cui 等把原模型的灰作用量 b 变为 kb , 重新构建了 NGM (1, 1, k) 模型^[82]; Xie 等分析传统 GM (1, 1) 模型的问题是从离散形式直接跳跃到连续形式, 进而提出了一系列灰数离散模型^[83]; Zhou 和 He 克服原 GM (1, 1) 模型中指数模拟偏差和离散 GM (1, 1) 模型中估计式和预测式之间不等转化的缺点, 提出了广义 GM (1, 1) 模型, 并用其预测我国的燃油产量^[84]; 由于离散 GM (1, 1) 的级比为固定常数, 杨保华等基于级比序列构建离散 GM (1, 1), 较好地提取了原始序列级比的动态变化性, 模型的拟合效果优于原离散 GM (1, 1) 模型^[85]; Chen 等将灰色建模思想扩展到更一般化的 NGBM (1, 1) 模型^[86]; Wu 等将灰色建模思想运用到 Lotka-Volterra 模型上, 取得了不错的效果^[87]; He 等基于矩阵构建了含有偏微分方程的灰色模型^[88]。

以上模型都是基于实数建立模型, 近年来, 基于灰数序列建立的灰色预测模型成为研究热点。Tsaur 构建了灰数序列的模糊回归模型^[89]; 袁潮清等给出了考虑发展趋势和认知程度的区间灰数预测模型^[90]; 曾波等通过计算灰数层的面积及其中位线中点坐标, 将区间灰数序列变换成实数序列, 构建了区间灰数预测模型, 避免了区间灰数的代数运算和灰数信息的丢失^[91]。

1.2.3 灰色关联度研究

作为灰色决策和灰色控制的基石, 灰色关联分析的基本思想是根据序列曲线几何形状的相似程度来判断其联系是否紧密, 曲线越接近, 相应序列之间的关联度就越大, 反之就越小。自提出以来被广泛应用于系统的因素分析、方案决策和优势分析^[92~94], 众多学者以邓聚龙^[5]教授提出的灰色关联公理为基础构造了若干新型灰色关联度模型, 有基于点关联系数的 T 型关联度^[95]、利用一阶差商代替一阶导数的斜率关联度^[96]、二阶趋势关联度^[97]、B 型关联度^[98]、引入灰关联熵的改

进关联度^[99]和考虑时滞效应的时滞关联度^[100]。还有利用两序列曲线之间所夹面积度量两序列曲线相似程度的绝对关联度^[6]和利用两曲面间的体积度量两曲面相似程度的扩展灰色绝对关联度^[101]。以上所有关联度都是基于序列的接近度刻画序列折线的相似性,没有界定接近性和相似性的不同,所以刘思峰等基于广义灰色关联度,分别提出了考虑相似性和接近性的灰色关联度^[102]。

学者们从两方面深入研究了灰色关联度。一是拓展研究对象,从实数关联度到区间数关联度^[103],进一步推广到复数、向量、矩阵范数下的关联度^[104]和张量灰色关联度^[105]。二是分析现有灰色关联度的性质,何文章和郭鹏指出邓氏关联度的次序与无量纲化的方法有关^[106];肖新平分别分析了四种关联度的性质,指出绝对关联度和邓氏关联度的排序离散度小,模型缺乏充足的科学依据^[107];崔杰等提出了关联度仿射性和仿射变换保序性,并证明 T 型关联度和比率关联度满足这两个性质^[108];谢乃明和刘思峰给出了平行性和一致性的定义,并证明很少有关联度同时满足这两个性质^[109];黄元亮和陈宗海指出灰色关联度四公理中的整体性和偶对对称性互不相容^[110]。

以上研究没有分析各种灰色关联度的适用性,不熟悉灰色关联度理论的人不便于使用,从而不利于灰色关联分析的推广。

1.2.4 缓冲算子研究

冲击扰动系统的预测结果和人们定性分析结论不一致的现象经常存在,这不是模型选择的问题,问题在于要排除系统的冲击干扰,正确把握事物规律。为此刘思峰等提出了满足缓冲算子三公理的缓冲算子体系,用于还原系统数据的本来面目^[6]。

党耀国等在平均弱化缓冲算子的基础上,提出了一系列新的缓冲算子^[111];吴正朋等基于序列反向累积的思想,提出一种弱化缓冲算子^[112];崔杰等(崔杰等^[113]、崔杰和党耀国^[114])、崔立志等(崔立志等^[115]、崔立志等^[116])、戴文战和苏永^[117]都是基于缓冲算子三公理和新信息优先原理构造了多种缓冲算子,但是如何体现了新信息优先原理,并没有从理论上给予证明;Hu等基于严格单调函数构造一种强化缓冲算子,为缓冲算子的研究开拓了一个新方向^[118];党耀国等研究了平均强化缓冲算子、几何平均强化缓冲算子、加权平均强化缓冲算子和加权几何平均强化缓冲算子之间的内在关系^[119];关叶青揭示了弱化缓冲与强化缓冲的对应关系,即指数由负到0,由0到正的变化,导致缓冲算子由强(弱)化到不变化,由不变化到弱(强)化的过程^[120];魏勇构造了一类线性强化缓冲算子和弱化缓冲算子,并证明了 m 阶缓冲算子的计算公式^[121]。在缓冲算子应用方面,Guo 等^[122]、Liao 等^[123]、朱坚民等^[124]、尹春华和顾培亮^[125]都是利用经典的平均弱化缓冲算子解决实际问题;李冬梅和李翔^[126]、高岩等^[127]、王大鹏和汪秉

文^[128]分别用各自提出的缓冲算子解决实际问题。为了较好地控制缓冲算子的作用强度,防止出现 k 阶缓冲算子的作用强度不够, $k+1$ 阶缓冲算子的作用强度过大的现象,高岩等^[129]、王正新等^[130]、李雪梅等^[131]围绕变权缓冲算子进行了研究,在缓冲算子微调方面取得了一些进展,但是又产生了权重如何确定的问题,缓冲算子实现微调的问题没有被彻底解决。总体来说,以上研究缺乏分析现有缓冲算子的数学性质,没有比较众多缓冲算子的差异,在各类缓冲算子的微调等方面没有取得突破性进展,需要进一步的深入研究。

1.2.5 复杂装备费用测算模型研究

复杂装备(complex equipment)是指一类产品结构复杂、工程技术含量高、价格昂贵、零部件集成度高的大型产品或系统,如飞机、大型船舶、卫星、运载火箭等。由于客户的个性化和专业化需求,复杂装备通常属于单件或小批量定制生产。

以飞机为例,其寿命周期的费用构成极为复杂,包括国外动力系统、机载系统等的采购费,国内机体采购费,生产制造费等。因此,对飞机费用的估算既是一个复杂的技术工程,也是一个错综复杂的管理过程。随着应用需求的不断提高,大型飞机工程呈现出技术密集、知识密集、系统越加复杂等特点,其研制总费用对航空产业发展和国民经济全局的影响越来越明显。随着科技飞速发展及其在军事领域的广泛应用,大型复杂装备费用增长在国内外都成为普遍现象,费用成为影响装备发展的首要问题。为有效控制费用增长,提高经费使用效率,准确预测复杂装备各阶段的费用就成为重要问题。

针对复杂装备的费用估算问题,按照方案探索、方案论证、工程研制、生产、保障维修的全寿命周期来看,目前常用的方法有参数法、类比法、专家调查法、工程估算法。随着工程的不断推进,估算的费用项目也越来越清晰,上述方法也是由初期的粗糙估算到后来的详细估算。现有测算方法及适用范围见表 1.1。

表 1.1 常用费用估算方法的比较

费用估算方法	适用范围	适用阶段	优点	缺点
参数估算法	具有历史延续性的系列装备	方案论证阶段	①使用快速、成本低; ②客观性比较好; ③不仅可提供费用估算值,还可以提供置信区间	①不能应用于一个全新的系统或技术含量高的系统; ②即使用于一个改进的系统,也需要进行调整; ③不宜用于分系统级以下部件的费用估算; ④在维修保障费用估算方面仍有不足
类比估算法	性能上类似,又无大量数据的装备	概念设计阶段	快速、成本低	相比参数估算法准确度较差