



普通高等院校土木工程专业“十三五”规划教材
国家应用型创新人才培养系列精品教材

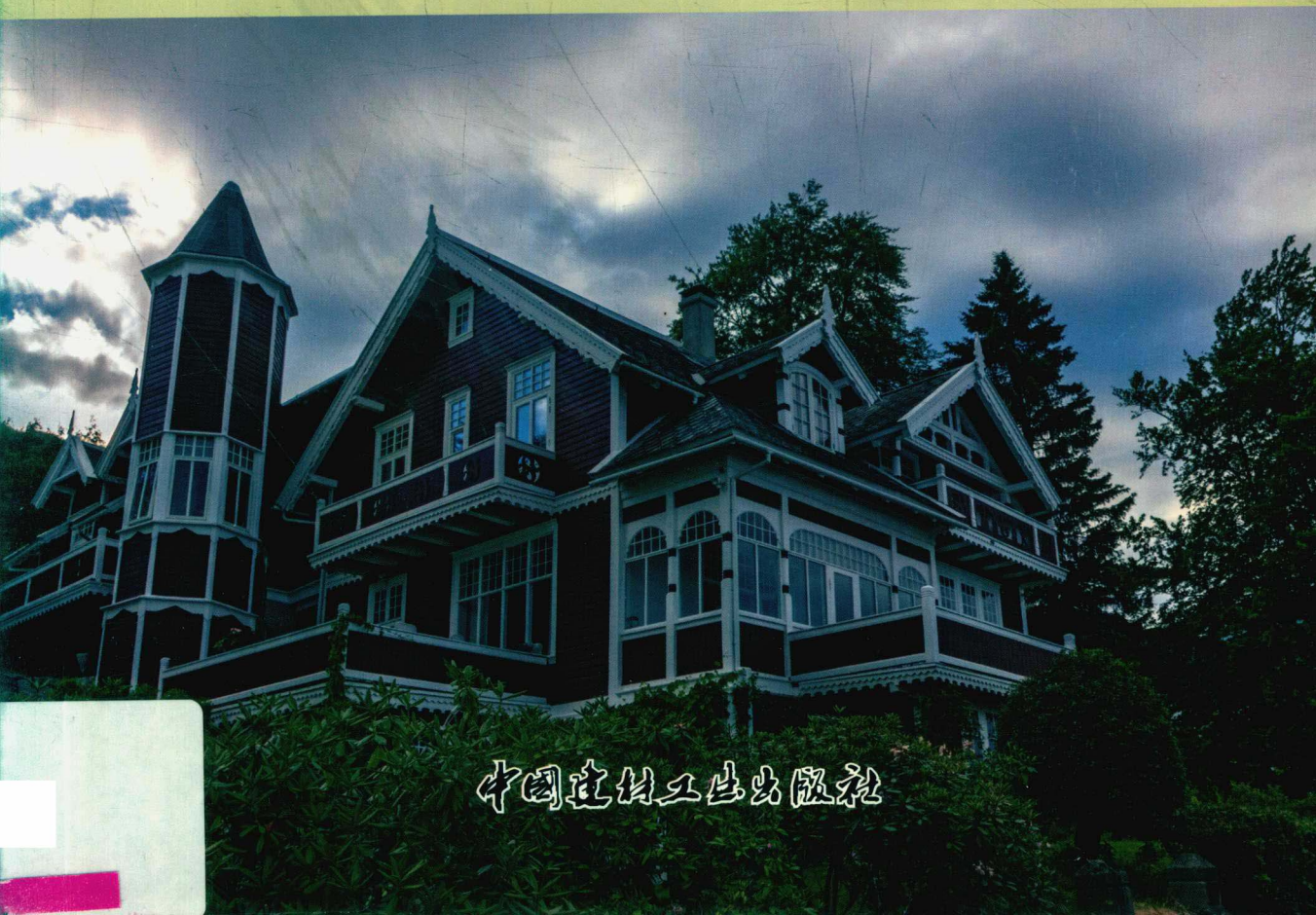


扫描二维码
免费课件下载

计算结构力学 与有限元法基础

Computational Structure Mechanics
and Finite Element Method

主 编 孙旭峰



中国建材工业出版社

普通高等院校土木工程专业“十三五”规划教材
国家应用型创新人才培养系列精品教材

计算结构力学与 有限元法基础

孙旭峰 主编



中国建材工业出版社

图书在版编目(CIP)数据

计算结构力学与有限元法基础/孙旭峰主编. --北京: 中国建材工业出版社, 2018. 6

普通高等院校土木工程专业“十三五”规划教材 国家应用型创新人才培养系列精品教材

ISBN 978-7-5160-2261-0

I. ①计… II. ①孙… III. ①计算力学—结构力学—高等学校—教材 ②有限元法—高等学校—教材 IV. ①O342 ②O241.82

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2018) 第 103364 号

内 容 简 介

本书作为扬州大学重点教材, 将结构力学中的矩阵位移法与弹性力学平面问题的有限元法融为一体, 由简入繁, 介绍了平面杆系结构静力问题、动力问题、稳定问题、非线性问题矩阵分析的基本原理, 以及弹性力学平面问题有限元分析的基本知识。

本书涉及的所有章节内容均配有相应的 Fortran90 教学源程序, 以及丰富的例题和习题。

本书可作为高等学校土建、水利、路桥、力学类专业的本科教材, 也可作为研究生、教师和工程技术人员的参考用书。

计算结构力学与有限元法基础

孙旭峰 主编

出版发行: 中国建材工业出版社

地 址: 北京市海淀区三里河路 1 号

邮 编: 100044

经 销: 全国各地新华书店

印 刷: 北京鑫正大印刷有限公司

开 本: 787mm×1092mm 1/16

印 张: 14.75

字 数: 360 千字

版 次: 2018 年 6 月第 1 版

印 次: 2018 年 6 月第 1 次

定 价: 49.80 元

本社网址: www.jcbs.com 微信公众号: zgjcgychs

本书如出现印装质量问题, 由我社市场营销部负责调换。联系电话: (010) 88386906

前言

“计算结构力学”是从“结构力学”中独立出来的一门专业课程，主要讲解平面杆系结构的矩阵位移法。若将其基本求解思想应用于一般连续体，在课程教学内容中增加有关“弹性力学”问题的有限元法，则该课程也可叫“有限元法”。

本教材书名取为“计算结构力学与有限元法基础”，其目的有三：一是希望平面杆系结构的矩阵位移法部分能与“结构力学”课程中的相关章节内容无缝对接、协调一致；二是希望平面杆系结构的矩阵位移法能与一般弹性连续体的有限元法之间过渡自然，内容统一；三是希望满足不同院校对本课程的个性化教学需求。

本书在内容编排上有以下特点：舍弃“子块”叠加的概念，直接讲解单元定位向量，避免引起混淆，并且在平面杆系结构中不再区分平面刚架、平面桁架等；舍弃纯计算数学的内容，如求解线性方程组、广义特征值问题等；略讲编程的技巧问题，如二维等带宽存储、一维变带宽存储等，把重点放在较容易理解的满阵存储上；在平面杆系结构的矩阵位移法中增加虚功原理推导单元刚度矩阵、等效结点荷载的内容，并与连续体部分的内容完全一致；加入平面杆系结构非线性问题的矩阵位移法，为进一步学习有限元法做好铺垫；本教材各部分内容均配备相应的 Fortran90 教学程序和例题，方便读者学习。

感谢辽宁交通大学郭吉坦教授在百忙之中对本教材的审阅，及提出宝贵意见。限于编者水平，书中难免存在不足之处，欢迎读者批评指正。

编 者

2018 年 5 月

目 录

第 1 章 绪论	1
1.1 概述	1
1.2 有限元法的历史与现状	1
1.3 有限元法的分析过程	2
复习思考题	2
第 2 章 平面杆系结构静力问题的矩阵位移法	3
2.1 单元刚度矩阵	3
2.2 利用虚功原理推导单元刚度矩阵	10
2.3 单元刚度矩阵的坐标转换	14
2.4 直接刚度法	17
2.5 支座约束条件的处理	26
2.6 等效结点荷载	31
2.7 计算步骤及示例	37
2.8 平面杆系结构静力问题的程序设计及使用	49
复习思考题	64
第 3 章 平面杆系结构动力与稳定问题的矩阵位移法	67
3.1 结构动力分析的有限单元法概述	67
3.2 刚架单元的质量矩阵	67
3.3 动力分析计算步骤及示例	69
3.4 动力问题的程序设计及使用	73
3.5 结构稳定分析的有限单元法概述	86
3.6 刚架单元的初应力矩阵	87
3.7 稳定分析计算步骤及示例	88
3.8 稳定问题的程序设计及使用	91
复习思考题	105
第 4 章 弹性力学平面问题的常应变单元	107
4.1 弹性力学平面问题的基本方程	107
4.2 连续弹性体的离散化	108

4.3 单元的位移模式和形函数 收敛准则 109

4.4 单元刚度矩阵 111

4.5 单元的等效结点荷载 113

4.6 计算步骤及示例 114

4.7 平面问题常应变单元的程序设计及使用 118

4.8 计算成果的整理 126

复习思考题..... 126

第 5 章 弹性力学平面问题的较精密单元 128

5.1 六结点三角形单元 128

5.2 四结点矩形单元 133

5.3 八结点四边形等参数单元 138

5.4 确定形函数的几何方法及收敛准则的进一步讨论 143

复习思考题..... 145

第 6 章 结构的非线性问题 147

6.1 概述 147

6.2 几何非线性问题的有限单元法 147

6.3 单元的切线刚度矩阵 151

6.4 非线性方程的求解及示例 155

6.5 结构的塑性分析 161

复习思考题..... 164

附录 A 高斯数值积分方法 166

附录 B 用 matlab 求解线性代数方程组和广义特征值问题 168

附录 C 平面问题较精密单元的静力求解程序 169

附录 D 平面杆系结构非线性问题的求解程序 197

参考文献 227



第 1 章 绪 论

1.1 概 述

在《结构力学》课程中,讲解了力法、位移法等结构分析的基本原理。因为需要求解关于基本未知量的线性方程组,所以当结构较为复杂、未知量较多时,手算求解方程组是非常困难的。虽然在结构力学中也学习了力矩分配法、无剪力分配法、剪力分配法等近似计算方法,可以避免求解方程组,但这些方法都有一定的适用条件,并且对于更为复杂的结构和更高的计算要求同样无能为力。

结构力学的分析对象是从实际结构简化而来的计算简图,对更为复杂的工程问题也是一样,并且最终都归结为在一定边界条件下求解方程的力学问题。近代力学的基本理论和方程在 19 世纪末和 20 世纪初已基本形成,于是寻求各种具体问题的解便成为力学工作者和工程师们的追求目标。由于解析方法的能力和范围有限,便引用了各种简化假定来求解实际工程问题,但在很多情况下,过多的简化会导致结果不正确。于是,数值法作为主要方法而得到不断发展,如有限差分法、有限元法、边界元法等。随着电子计算机技术的突飞猛进和快速普及,将数值法与计算机技术相结合使得复杂的数学运算不再是不可逾越的障碍。这其中,有限元法成为当前工程结构分析中最为常用和有效的方法。

所谓计算结构力学,是将传统的平面杆系结构力学方法以矩阵的形式加以表达,从而便于编程运算,可分为矩阵力法和矩阵位移法。其中,矩阵力法的基本体系选择无确定性,不便于编制统一的计算机程序,而矩阵位移法则具有通用性强和易于程序化的特点,故而得到广泛应用。如果将杆系结构的矩阵位移法推广到板、壳以及实体等一般连续体结构的分析中去,则称为有限元法(Finite Element Method),或有限单元法、有限元素法。一般所指的计算结构力学实际上是平面杆系结构的有限元法。所不同的是,平面杆系结构的控制方程(静力学问题)可以依据材料力学和结构力学中的解析方法得出,是精确的,而一般连续体的控制方程则只能通过虚功原理或能量原理近似地获得。故而在本教材中,将首先讲解与《结构力学》课程相衔接的计算结构力学部分,再介绍弹性力学平面问题的有限元法。

1.2 有限元法的历史与现状

有限元法基本思想是由 Courant 提出的,1943 年他第一次尝试应用定义在三角形区域的分片连续函数和最小势能原理求解圣文南(St. Venant)扭转问题。但由于当时没有

计算工具来分析工程实际问题,因而未得到重视和发展。

1956年,Turner、Clough等人在分析飞机结构时,将刚架位移法推广应用于弹性力学平面问题,第一次给出了用三角形单元求解平面应力问题的正确解答,是现代有限元法的第一次成功应用,其研究打开了计算机技术求解复杂问题的新局面。1960年,Clough将这种方法命名为有限元法。

1963年前后,Besseling、Melosh、Jones等人证明了有限元法是基于变分原理的里兹(Ritz)法的一种变形,从而使得里兹法分析的所有理论基础都适用于有限元法,确认了有限元法是处理连续介质问题的一种普遍方法。利用变分原理建立有限元方程和经典里兹法的主要区别是,有限元法假设的近似函数不是在全求解域上规定的,而是在单元上规定的,而且事先不要求满足任何边界条件,因此它可以用来处理很复杂的连续介质问题。

有限元法在工程中应用的成功,引起了数学界工作者的关注。20世纪60至70年代,数学工作者对有限元的误差、解的收敛性和稳定性等方面进行了卓有成效的研究,从而巩固了有限元法的数学基础。我国数学家冯康,在20世纪60年代研究变分问题的差分格式时,也独立地提出了分片插值的思想,为有限元法的创立做出了贡献。

五十多年来,有限元法的应用已由弹性力学平面问题扩展到空间问题、板壳问题,由静力平衡问题扩展到稳定问题、动力问题、波动问题、接触问题等。分析的对象从弹性材料扩展到弹塑性、粘弹性、粘塑性和复合材料等,从固体力学扩展到流体力学、热力学、电磁学、生物医学等领域,并且可以解决多种介质和场的耦合问题。在工程分析中的作用已从分析和校核扩展到优化设计,涌现了很多大型通用有限元分析软件,如ANSYS、ABAQUS、ADINA、MARC、NASTRAN等,有些有限元软件还与工程设计相结合,如SAP2000、MIDAS、PKPM、3D3S等。可以预计,随着现代力学、计算数学和计算机技术等学科的发展,有限元法作为一个具有巩固理论基础和广泛应用效力的数值分析工具,必将在国民经济建设和科学技术发展中发挥更大的作用,其自身亦将得到进一步的发展和完善。

1.3 有限元法的分析过程

无论是计算结构力学中的矩阵位移法还是更一般的有限元法,其分析过程大体相同:先假想把杆系结构或连续体分割成数目有限的若干单元,彼此间只在单元的结点处相联结(此过程称离散化);将单元上受到的外力转化为作用于结点上的等效结点力;按本构方程建立单元结点力与结点位移之间的关系(称为单元刚度方程,此过程称单元分析);按平衡条件和结点处的变形协调条件,将所有单元的单元刚度方程组集起来,并考虑支座约束条件后,得到一组以结点位移为未知量的代数方程组(称为结构刚度方程,此过程称整体分析);求解此方程组就可以得到结点位移,继而可以求得杆端内力或单元的应力、应变等。

复习思考题

1. 一般所指的计算结构力学、矩阵位移法和有限元法之间是什么关系?
2. 阅读相关文献,进一步了解有限元法的发展历史、相关软件及其在工程实践中的应用。
3. 矩阵位移法的一般求解思路是什么?试比较其与传统位移法的异同。



第2章 平面杆系结构静力问题的矩阵位移法

2.1 单元刚度矩阵

用矩阵位移法分析平面杆系结构时,首先要将结构离散化成若干杆件单元,并对结点和单元进行编号。同时,为了表示位移和力的方向,需要为结构设定一个坐标系 Oxy ,这个坐标系称为结构的整体坐标系,或结构坐标系。例如,在分析图 2-1 (a) 所示的平面刚架时,可以如图 2-1 (b) 那样对该刚架的结点和单元进行编号。

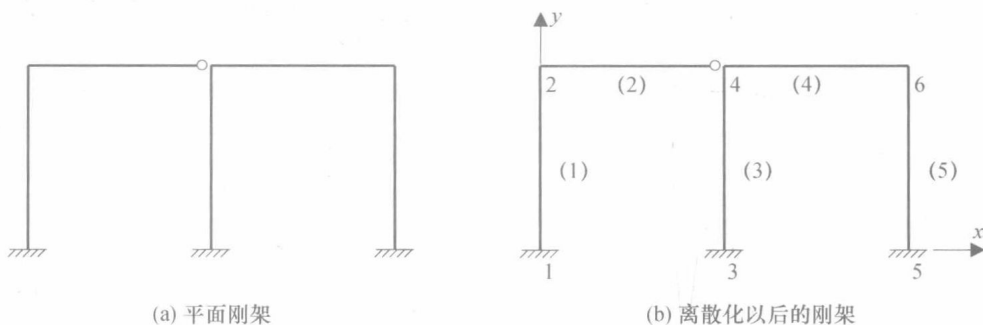


图 2-1 平面刚架的离散化

一般来说,单元刚度方程的通式是在单元为等截面直杆的条件下推导的。所以在进行离散化时,可以选择自由端、转折点、汇交点、支承点、截面突变点、材料突变点等构造结点分割单元。当然,也可以选择杆件中间的非构造结点分割单元。例如,当仅有少量集中荷载作用于杆件上时,可以将集中荷载作用点作为结点处理,如图 2-2 所示。这样,这些集中荷载就成为结点荷载,而不用将其转化为等效结点荷载。对于一般的变截面杆件或曲杆,可以近似地将其离散化成若干个等截面直杆单元,如图 2-3 所示,当分段足够多时,这种近似处理方法的精度可以得到保证。

2.1.1 一般单元

杆件单元的分析任务,是建立杆端力与杆端位移之间的刚度方程。在一般情况下,将考虑轴向变形的影响,但不考虑轴向受力状态与弯曲受力状态之间的相互影响。

图 2-4 所示为一等截面直杆单元,设其单元编号为 (e) ,其所联结的两个结点编号分别为 i 、 j 。为了单元刚度矩阵推导的统一和杆端力、杆端位移的描述方便,可为每个单元设定局部坐标系 $\bar{x}\bar{y}$,并称 i 端为始端, j 端为末端。局部坐标系和整体坐标系采用相同

的右手系，以 i 为坐标原点，从 i 到 j 为 $\bar{x}$ 轴的正方向， $\bar{x}$ 轴正方向逆时针旋转 90° 为 $\bar{y}$ 轴的正方向。局部坐标系相对于整体坐标系的方位角用 α 表示，定义为由整体坐标系 x 轴正向逆时针转至局部坐标系 $\bar{x}$ 轴正向的角度。

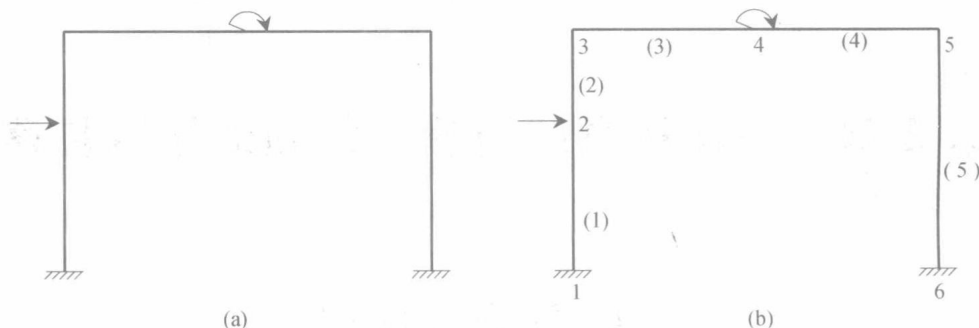


图 2-2 荷载作用点作为结点处理的刚架

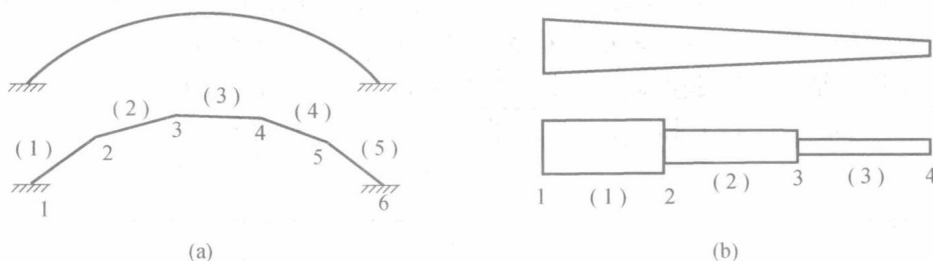


图 2-3 曲杆和变截面杆的离散化

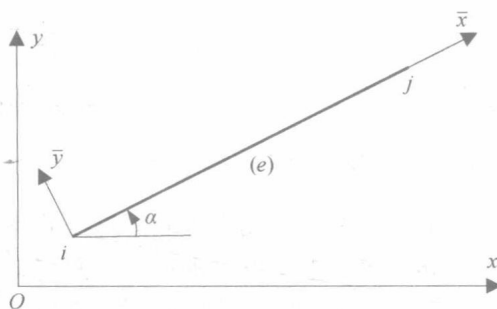


图 2-4 局部坐标系

一般情况下，平面杆件两端各有三个杆端力分量和三个杆端位移分量，它们分别是： i 端的 $\bar{F}_{xi}^{(e)}$ 、 $\bar{F}_{yi}^{(e)}$ 、 $\bar{M}_i^{(e)}$ （即轴力 $\bar{F}_{Ni}^{(e)}$ 、剪力 $\bar{F}_{Si}^{(e)}$ 、弯矩 $\bar{M}_i^{(e)}$ ）， j 端的 $\bar{F}_{xj}^{(e)}$ 、 $\bar{F}_{yj}^{(e)}$ 、 $\bar{M}_j^{(e)}$ （即轴力 $\bar{F}_{Nj}^{(e)}$ 、剪力 $\bar{F}_{Sj}^{(e)}$ 、弯矩 $\bar{M}_j^{(e)}$ ）， i 端的杆端位移 $\bar{u}_i^{(e)}$ 、 $\bar{v}_i^{(e)}$ 、 $\bar{\varphi}_i^{(e)}$ ， j 端的杆端位移 $\bar{u}_j^{(e)}$ 、 $\bar{v}_j^{(e)}$ 、 $\bar{\varphi}_j^{(e)}$ ，如图 2-5 所示，这样的单元即称为一般单元，也称刚架单元。其中，上划线表示它们是局部坐标系中的量值，上标 (e) 表示它们属于单元 (e) 。杆端力和杆端位移的正负号规定为：与坐标轴正方向一致为正，方向相反为负，杆端弯矩和杆端角位移则按右手系以逆时针方向为正。

现在来讨论单元在局部坐标系下的刚度方程。所谓单元刚度方程，是指由单元杆端位移求单元杆端力时所建立的方程。为建立单元刚度方程，可以参照结构力学位移法中基本

结构的做法, 在杆端位移方向上施加相应的附加约束, 并使基本结构发生指定的杆端位移分量 (其余杆端位移分量为零), 继而由结构力学方法计算各杆端力分量。

因为一般单元考虑两端各三个杆端位移分量, 所以其基本结构为两端固定端杆件。根据胡克定律和等截面单跨超静定梁的转角位移方程 (或刚度系数, 形常数), 即可确定发生某一单位杆端位移时的杆端力分量, 如图 2-6 所示。

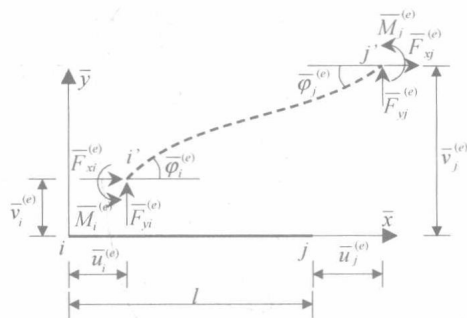


图 2-5 一般单元

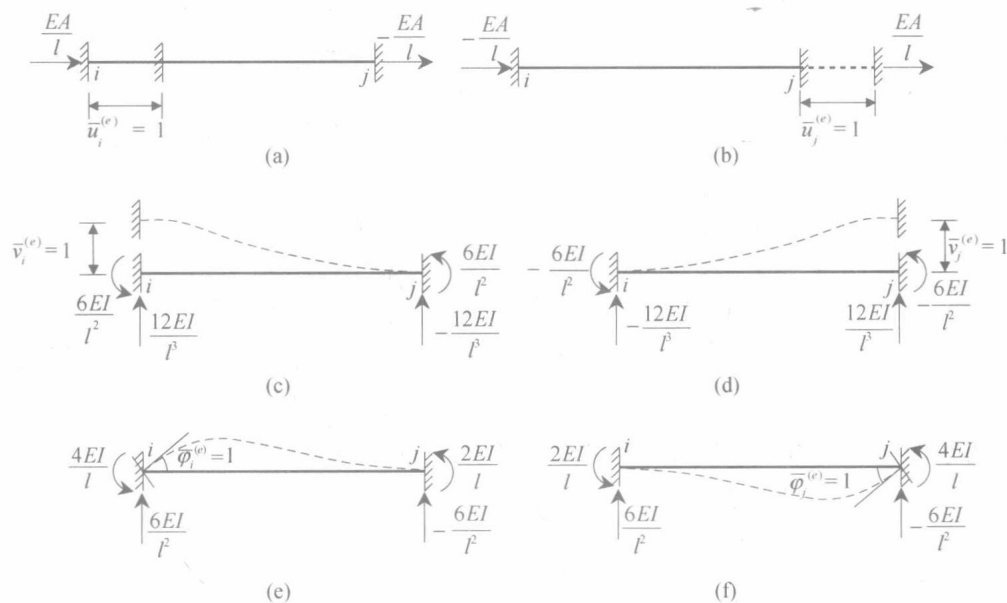


图 2-6 发生单位杆端位移时的杆端力分量

这样, 由叠加原理即可写出杆端力和杆端位移之间的单元刚度方程为

$$\begin{aligned}\bar{F}_{xi}^{(e)} &= \frac{EA}{l} u_i^{(e)} - \frac{EA}{l} u_j^{(e)} \\ \bar{F}_{yi}^{(e)} &= \frac{12EI}{l^3} v_i^{(e)} + \frac{6EI}{l^2} \varphi_i^{(e)} - \frac{12EI}{l^3} v_j^{(e)} + \frac{6EI}{l^2} \varphi_j^{(e)} \\ \bar{M}_i^{(e)} &= \frac{6EI}{l^2} v_i^{(e)} + \frac{4EI}{l} \varphi_i^{(e)} - \frac{6EI}{l^2} v_j^{(e)} + \frac{2EI}{l} \varphi_j^{(e)} \\ \bar{F}_{xj}^{(e)} &= -\frac{EA}{l} u_i^{(e)} + \frac{EA}{l} u_j^{(e)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{F}_{yj}^{(e)} &= -\frac{12EI}{l^3}\bar{v}_i^{(e)} - \frac{6EI}{l^2}\bar{\varphi}_i^{(e)} + \frac{12EI}{l^3}\bar{v}_j^{(e)} - \frac{6EI}{l^2}\bar{\varphi}_j^{(e)} \\ \bar{M}_j^{(e)} &= \frac{6EI}{l^2}\bar{v}_i^{(e)} + \frac{2EI}{l}\bar{\varphi}_i^{(e)} - \frac{6EI}{l^2}\bar{v}_j^{(e)} + \frac{4EI}{l}\bar{\varphi}_j^{(e)}\end{aligned}$$

将其写成矩阵形式, 则有

$$\begin{bmatrix} \bar{F}_{xi} \\ \bar{F}_{yi} \\ \bar{M}_i \\ \bar{F}_{xj} \\ \bar{F}_{yj} \\ \bar{M}_j \end{bmatrix}^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix}^{(e)} \begin{bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \\ \bar{\varphi}_i \\ \bar{u}_j \\ \bar{v}_j \\ \bar{\varphi}_j \end{bmatrix}^{(e)} \quad (2-1)$$

或简写为

$$\bar{\mathbf{F}}^{(e)} = \bar{\mathbf{k}}^{(e)} \bar{\boldsymbol{\delta}}^{(e)} \quad (2-2)$$

式中,

$$\bar{\mathbf{F}}^{(e)} = \begin{bmatrix} \bar{F}_{xi} \\ \bar{F}_{yi} \\ \bar{M}_i \\ \bar{F}_{xj} \\ \bar{F}_{yj} \\ \bar{M}_j \end{bmatrix}^{(e)} \quad \text{和} \quad \bar{\boldsymbol{\delta}}^{(e)} = \begin{bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \\ \bar{\varphi}_i \\ \bar{u}_j \\ \bar{v}_j \\ \bar{\varphi}_j \end{bmatrix}^{(e)} \quad (2-3), (2-4)$$

分别称为平面杆系结构一般单元的杆端力列向量和杆端位移列向量, 而

$$\bar{\mathbf{k}}^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix}^{(e)} \quad (2-5)$$

即为平面杆系结构一般单元的单元刚度矩阵, 简称单刚。由于杆端力和杆端位移分量一一对应, 数目相等, 所以单元刚度矩阵为一方阵。

这里需要注意的是, 由于不考虑轴向受力状态与弯曲受力状态之间的相互影响, 即轴

力仅由杆端轴向位移引起,而剪力和弯矩仅由杆端横向位移和角位移引起,也就是说图 2-6 (a)、(b)与图 2-6 (c)、(d)、(e)、(f) 之间相互独立,所以式 (2-1) 只是轴向受力状态单元(称轴力单元,或桁架单元)和弯曲受力状态单元(称梁单元)的简单联合。

单元刚度矩阵有如下性质和特点:

(1) 单元刚度矩阵元素的物理意义

由上述单元刚度方程的推导过程不难看出,单元刚度矩阵中每个元素的物理意义为:其所在列对应的杆端位移分量为 1(而其余杆端位移分量为零)时所引起的其所在行对应的杆端力分量的数值。

(2) 对称性

依据单元刚度矩阵元素的物理意义及反力互等定理可以知道,线弹性体系的单元刚度矩阵为一关于主对角线的对称矩阵,即有 $\bar{k}_{mn}^{(e)} = \bar{k}_{nm}^{(e)}$ ($m, n=1, 2, \dots, 6$)。

(3) 奇异性

计算可知,一般单元的单元刚度矩阵所对应的行列式值为零。因此,一般单元的单元刚度矩阵式 (2-5) 为一奇异矩阵,其逆矩阵不存在。也就是说,若给定了杆端位移分量,可以由单元刚度方程式 (2-1) 唯一确定杆端力分量,而反之则不成立。其原因如下:当给定杆端位移时,杆件的变形即可唯一确定,因而其对应的杆端力也可唯一确定;而当给定杆端力时,满足平衡条件(即发生同样变形形式)的杆端位移却不是唯一的,如果不给定边界约束条件,它们之间可以相差任意的刚体位移。例如,在图 2-6 (a) 中,当 $\bar{u}_i^{(e)} = 2$ 和 $\bar{u}_j^{(e)} = 1$ 时,所对应的杆端力和图 2-6 (a) 是一样的。

事实上,如果将“依据杆端位移求解杆端力”称为正问题,那么“依据杆端力求解杆端位移”则称为反问题,正反两个问题的力学模型是不一样的。正问题的力学模型如前所述,可采用对杆端位移分量施加相应附加约束的方法来确定,即所谓基本结构。而反问题的力学模型对于一般单元来说如图 2-5 所示,即为一自由单元,在自由端施加指定的杆端力求解杆端位移。所以当指定的杆端力为不平衡力系时,杆端位移无解,而当指定的杆端力为平衡力系时,杆端位移有解,但不唯一,可相差任意的刚体位移。

2.1.2 特殊单元

在平面杆系结构中,对于不同受力性质和不同约束性质的杆件,可以采用一些特殊单元来进行计算。特殊单元可以通过对一般单元做一些处理来得到。下面就来列举一些常见的特殊单元。

1. 桁架单元

桁架单元也称轴力单元,用于模拟仅受轴力作用的杆件。在局部坐标系下,桁架单元的杆端力列向量和杆端位移列向量分别为

$$\bar{\mathbf{F}}^{(e)} = \begin{bmatrix} \bar{F}_{xi} \\ \bar{F}_{xj} \end{bmatrix}^{(e)} \quad \text{和} \quad \bar{\boldsymbol{\delta}}^{(e)} = \begin{bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{u}_j \end{bmatrix}^{(e)} \quad (2-6), (2-7)$$

其单元刚度矩阵可由图 2-6 (a)、(b) 得到,或在式 (2-5) 中划去第 2、3、5、6 行和列得到

$$\bar{\mathbf{k}}^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} \\ -\frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} \end{bmatrix}^{(e)} \quad (2-8)$$

为便于以后进行坐标变换, 即得到整体坐标系下的单元刚度矩阵, 可以考虑将杆端力列向量和杆端位移列向量分别写为

$$\bar{\mathbf{F}}^{(e)} = \begin{bmatrix} \bar{F}_{xi} \\ \bar{F}_{yi} \\ \bar{F}_{xj} \\ \bar{F}_{yj} \end{bmatrix}^{(e)} \quad \text{和} \quad \bar{\boldsymbol{\delta}}^{(e)} = \begin{bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \\ \bar{u}_j \\ \bar{v}_j \end{bmatrix}^{(e)} \quad (2-9), (2-10)$$

而在单元刚度矩阵中添加零元素的行和列, 即将式 (2-8) 扩展为

$$\bar{\mathbf{k}}^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{l} & 0 & \frac{EA}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{(e)} \quad (2-11)$$

2. 连续梁单元

在计算连续梁时, 通常忽略轴向变形。如取每跨梁作为一个单元, 如图 2-7 所示, 则单元的杆端位移分量只有 $\bar{\varphi}_i^{(e)}$ 和 $\bar{\varphi}_j^{(e)}$, 而其余四个分量均为零。



图 2-7 连续梁单元划分

因此, 对连续梁单元, 杆端力列向量和杆端位移列向量分别为

$$\bar{\mathbf{F}}^{(e)} = \begin{bmatrix} \bar{M}_i \\ \bar{M}_j \end{bmatrix}^{(e)} \quad \text{和} \quad \bar{\boldsymbol{\delta}}^{(e)} = \begin{bmatrix} \bar{\varphi}_i \\ \bar{\varphi}_j \end{bmatrix}^{(e)} \quad (2-12), (2-13)$$

其单元刚度矩阵可由图 2-6 (e)、(f) 得到, 或在式 (2-5) 中划去第 1、2、4、5 行和列得到

$$\bar{\mathbf{k}}^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{l} & \frac{2EI}{l} \\ \frac{2EI}{l} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix}^{(e)} \quad (2-14)$$

值得注意的是, 连续梁单元的杆端剪力可由平衡条件得到。

连续梁单元的刚度矩阵可逆, 即式 (2-14) 为非奇异矩阵。这是因为, 连续梁单元问题的力学模型如图 2-8 所示, 即已指定杆端位移分量 $\bar{u}_i^{(e)}$ 、 $\bar{v}_i^{(e)}$ 、 $\bar{u}_j^{(e)}$ 、 $\bar{v}_j^{(e)}$ 为零, 故为一几何不变体系。所以, 当指定 $\bar{M}_i^{(e)}$ 和 $\bar{M}_j^{(e)}$ 时, $\bar{\varphi}_i^{(e)}$ 和 $\bar{\varphi}_j^{(e)}$ 有唯一解。

3. 一端铰结的刚架单元

在梁或者刚架中, 经常会遇到杆件一端为铰结的情况, 此时可以采用一端铰结的刚架单元。假设单元的 j 端为铰结, 这样就有 $\bar{M}_j^{(e)} = 0$ 。将此条件代入式 (2-1), 可

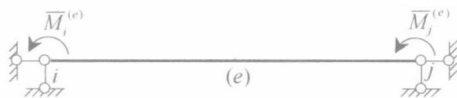


图 2-8 连续梁单元反问题的力学模型

以得到

$$\bar{\varphi}_j^{(e)} = -\frac{3}{2l}\bar{v}_i^{(e)} - \frac{1}{2}\bar{\varphi}_i^{(e)} + \frac{3}{2l}\bar{v}_j^{(e)} \quad (2-15)$$

再将其代入式 (2-1) 的其余表达式中, 即可得到 j 端铰结刚架单元的刚度方程为

$$\begin{aligned} \bar{F}_{xi}^{(e)} &= \frac{EA}{l}\bar{u}_i^{(e)} - \frac{EA}{l}\bar{u}_j^{(e)} \\ \bar{F}_{yi}^{(e)} &= \frac{3EI}{l^3}\bar{v}_i^{(e)} + \frac{3EI}{l^2}\bar{\varphi}_i^{(e)} - \frac{3EI}{l^3}\bar{v}_j^{(e)} \\ \bar{M}_i^{(e)} &= \frac{3EI}{l^2}\bar{v}_i^{(e)} + \frac{3EI}{l}\bar{\varphi}_i^{(e)} - \frac{3EI}{l^2}\bar{v}_j^{(e)} \\ \bar{F}_{xj}^{(e)} &= -\frac{EA}{l}\bar{u}_i^{(e)} + \frac{EA}{l}\bar{u}_j^{(e)} \\ \bar{F}_{yj}^{(e)} &= -\frac{3EI}{l^3}\bar{v}_i^{(e)} - \frac{3EI}{l^2}\bar{\varphi}_i^{(e)} + \frac{3EI}{l^3}\bar{v}_j^{(e)} \end{aligned}$$

所以, j 端铰结刚架单元的杆端力和杆端位移列向量分别为

$$\bar{\mathbf{F}}^{(e)} = \begin{bmatrix} \bar{F}_{xi} \\ \bar{F}_{yi} \\ \bar{M}_i \\ \bar{F}_{xj} \\ \bar{F}_{yj} \end{bmatrix}^{(e)} \quad \text{和} \quad \bar{\boldsymbol{\delta}}^{(e)} = \begin{bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \\ \bar{\varphi}_i \\ \bar{u}_j \\ \bar{v}_j \end{bmatrix}^{(e)} \quad (2-16), (2-17)$$

单元刚度矩阵为

$$\bar{\mathbf{k}}^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{l^3} & \frac{3EI}{l^2} & 0 & -\frac{3EI}{l^3} \\ 0 & \frac{3EI}{l^2} & \frac{3EI}{l} & 0 & -\frac{3EI}{l^2} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{l^3} & -\frac{3EI}{l^2} & 0 & \frac{3EI}{l^3} \end{bmatrix}^{(e)} \quad (2-18)$$

由以上推导过程可以看出, 在 j 端铰结的刚架单元中, j 端的角位移不独立, 是由其他位移分量确定的。事实上, 注意到 j 端铰结刚架单元的正问题力学模型为 i 端固定端, j 端固定铰支座的单跨超静定梁, 以上单元刚度方程也可由结构力学中此种支座形式梁的转角位移方程直接写出。

4. 一端竖向自由 (即滑动结点或定向结点) 的刚架单元

在梁或刚架中, 还会遇到杆件的一端为竖向自由滑动结点的情况。假设单元的 j 端竖

向自由 (即 $\bar{v}_j^{(e)}$ 自由), 这样就有 $\bar{F}_{yj}^{(e)}=0$ 。将此条件代入式 (2-1), 可以得到

$$\bar{v}_j^{(e)} = \bar{v}_i^{(e)} + \frac{l}{2}\bar{\varphi}_i^{(e)} + \frac{l}{2}\bar{\varphi}_j^{(e)} \quad (2-19)$$

再将其代入式 (2-1) 的其余表达式中, 即可得到 j 端竖向自由刚架单元的刚度方程为

$$\begin{aligned} \bar{F}_{xi}^{(e)} &= \frac{EA}{l}\bar{u}_i^{(e)} - \frac{EA}{l}\bar{u}_j^{(e)} \\ \bar{F}_{yj}^{(e)} &= 0 \\ \bar{M}_i^{(e)} &= \frac{EI}{l}\bar{\varphi}_i^{(e)} - \frac{EI}{l}\bar{\varphi}_j^{(e)} \\ \bar{F}_{xj}^{(e)} &= -\frac{EA}{l}\bar{u}_i^{(e)} + \frac{EA}{l}\bar{u}_j^{(e)} \\ \bar{M}_j^{(e)} &= -\frac{EI}{l}\bar{\varphi}_i^{(e)} + \frac{EI}{l}\bar{\varphi}_j^{(e)} \end{aligned}$$

不计为零的杆端力, j 端竖向自由刚架单元的杆端力和杆端位移列向量分别为

$$\bar{\mathbf{F}}^{(e)} = \begin{bmatrix} \bar{F}_{xi} \\ \bar{M}_i \\ \bar{F}_{xj} \\ \bar{M}_j \end{bmatrix}^{(e)} \quad \text{和} \quad \bar{\boldsymbol{\delta}}^{(e)} = \begin{bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{\varphi}_i \\ \bar{u}_j \\ \bar{\varphi}_j \end{bmatrix}^{(e)} \quad (2-20), (2-21)$$

单元刚度矩阵为

$$\bar{\mathbf{k}}^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 \\ 0 & \frac{EI}{l} & 0 & -\frac{EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & \frac{EA}{l} & 0 \\ 0 & -\frac{EI}{l} & 0 & \frac{EI}{l} \end{bmatrix}^{(e)} \quad (2-22)$$

和桁架单元一样, 为便于以后进行坐标变换, 可以将式 (2-20)、(2-21) 及 (2-22) 进行扩展, 补充与 $\bar{F}_{yi}^{(e)}$ 、 $\bar{F}_{yj}^{(e)}$ 相对应的零元素行和列。

2.2 利用虚功原理推导单元刚度矩阵

在 2.1 节中, 我们利用胡克定律和结构力学中基于力法求解出的形常数推导了一般单元的单元刚度矩阵, 这种方法可称为静力法。除了静力法, 还可以用能量法推导单元刚度矩阵, 这其中包括虚功原理、最小势能原理等。本节将介绍利用虚功原理中的虚位移原理推导杆件单元刚度矩阵的方法。

由于在线弹性小变形问题中不考虑轴向受力状态与弯曲受力状态之间的相互影响, 所以下面分别推导这两种受力状态杆件的单元刚度矩阵。

2.2.1 桁架单元

采用虚功原理推导单元刚度矩阵时, 需要先假设单位内部任意一点的位移与其坐标之

间的函数关系,这称为位移模式(或位移函数)。由材料力学可知,在单元局部坐标系下,桁架单元轴线上任意点的轴向位移 $\bar{u}^{(e)}$ 为其坐标 $\bar{x}$ 的线性函数,设为

$$\bar{u}^{(e)} = \alpha_1 + \alpha_2 \bar{x} \quad (2-23)$$

在正问题中, i 、 j 结点指定的杆端位移分别为 $\bar{u}_i^{(e)}$ 和 $\bar{u}_j^{(e)}$, 将其代入式 (2-23) 有

$$\begin{cases} \bar{u}_i^{(e)} = \alpha_1 \\ \bar{u}_j^{(e)} = \alpha_1 + \alpha_2 l \end{cases} \quad (2-24)$$

求解式 (2-24), 可以得到

$$\begin{cases} \alpha_1 = \bar{u}_i^{(e)} \\ \alpha_2 = \frac{\bar{u}_j^{(e)} - \bar{u}_i^{(e)}}{l} \end{cases} \quad (2-25)$$

将其代入式 (2-23), 并写成矩阵的形式就有

$$\bar{u}^{(e)} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\bar{x}}{l} & \frac{\bar{x}}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{u}_j \end{bmatrix}^{(e)} \quad (2-26)$$

其中, 可以记

$$\mathbf{N} = [N_1 \quad N_2] = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\bar{x}}{l} & \frac{\bar{x}}{l} \end{bmatrix} \quad (2-27)$$

式 (2-26) 表明, 可以将单元位移表达成杆端位移的插值函数, 式 (2-27) 中 N_1 、 N_2 即反映了这种插值关系, 或者说反映了单元的位移形态。所以, 我们将 N_1 、 N_2 称为形函数, 而 $\mathbf{N}$ 称为形函数矩阵。

由材料力学可知, 单元的应变和单元位移之间有如下关系:

$$\bar{\epsilon}^{(e)} = \frac{d\bar{u}^{(e)}}{d\bar{x}} \quad (2-28)$$

应变和位移之间的关系称为几何方程。将式 (2-26) 代入几何方程有

$$\bar{\epsilon}^{(e)} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{l} & \frac{1}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{u}_j \end{bmatrix}^{(e)} \quad (2-29)$$

其中, 可以记

$$\mathbf{B} = [B_1 \quad B_2] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{l} & \frac{1}{l} \end{bmatrix} \quad (2-30)$$

矩阵 $\mathbf{B}$ 反映了单元应变与杆端位移的插值关系, 称为应变矩阵。

再考虑一维弹性问题的物理方程, 即胡克定律

$$\bar{\sigma}^{(e)} = E\bar{\epsilon}^{(e)} \quad (2-31)$$

就可以得到

$$\bar{\sigma}^{(e)} = \begin{bmatrix} -\frac{E}{l} & \frac{E}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{u}_j \end{bmatrix}^{(e)} \quad (2-32)$$

其中, 可以记

$$\mathbf{S} = [S_1 \quad S_2] = \begin{bmatrix} -\frac{E}{l} & \frac{E}{l} \end{bmatrix} \quad (2-33)$$

矩阵 $\mathbf{S}$ 反映了单元应力与杆端位移的插值关系, 称为应力矩阵。

依据虚功原理, 设在杆端力 $\bar{F}_i^{(e)}$ 、 $\bar{F}_j^{(e)}$ 作用下的状态为力状态, 而在杆端虚位移 $\bar{u}_i^{*(e)}$ 、 $\bar{u}_j^{*(e)}$ 作用下的状态为位移状态, 如图 2-9 所示, 则有力状态在位移状态上所作的