·普通高等学校经济管理类系列教材·经济数学基础·

线性代数

主编 蔺 琳 李庆娟 杨 鑫

辽宁大学出版社
Liaoning University Press

·普通高等学校经济管理类系列教材·经济数学基础·

线性代数

主编 蔺 琳 李庆娟 杨 鑫

辽宁大学出版社
Liaoning University Press

图书在版编目（CIP）数据

线性代数/蔺琳，李庆娟，杨鑫主编. 一沈阳：辽宁大学出版社，2016.6（2017.6 重印）
（经济数学基础）
普通高等学校经济管理类系列教材
ISBN 978-7-5610-8286-7

Ⅰ.①经… Ⅱ.①蔺…②李…③杨… Ⅲ.①经济数学－高等学校－教材②线性代数－高等学校－教材 Ⅳ.①F224.0②O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 126184 号

出 版 者：辽宁大学出版社有限责任公司
（地址：沈阳市皇姑区崇山中路 66 号　邮政编码：110036）
印 刷 者：沈阳海世达印务有限公司
发 行 者：辽宁大学出版社有限责任公司
幅面尺寸：185mm×260mm
印　　张：12.5
字　　数：280 千字
出版时间：2016 年 6 月第 1 版
印刷时间：2017 年 6 月第 2 次印刷
责任编辑：祝恩民
封面设计：韩　实
责任校对：李　佳

书　　号：ISBN 978-7-5610-8286-7
定　　价：30.00 元

联系电话：024－86864613
邮购热线：024－86830665
网　　址：http://press.lnu.edu.cn
电子邮件：lnupress@vip.163.com

普通高等学校经济管理类系列教材

编 委 会

前 言

线性代数是19世纪后期发展起来的数学分支，主要研究线性理论和方法，是高等院校教学计划中的一门重要基础理论课程，是经管类专业学生必修的公共基础课之一。随着计算机的日益普及，该课程的地位与作用也更为重要，已成为全国工学、经济学硕士研究生入学考试的必考内容。

线性代数的理论是计算技术的基础，同系统工程，优化理论及稳定性理论等有着密切联系，线性代数的计算方法是计算数学里一个很重要的内容。这门课程的特点是概念较多，有些内容比较抽象，具有较强的逻辑性和广泛的实用性。线性代数在工程技术和国民经济的许多领域都有着广泛的应用，尤其在计算机日益普及的今天，解大型线性方程组、求矩阵的特征值等已成为技术人员经常遇到的课题。通过学习本课程，学生应掌握线性代数课程的基本理论与方法，培养解决实际问题的能力，并为学习相关课程及进一步扩大数学知识面奠定必要的数学基础。

本书根据高等院校经管类本科专业线性代数课程的教学大纲与考研大纲编写而成，可作为高等院校经济管理类相关专业学生所使用的教材。本书内容涵盖了行列式、矩阵、线性方程组、向量空间、矩阵的特征值与特征向量、二次型及其标准形等知识。

在本书的编写过程中，作者对内容的取舍、结构的安排进行了认真的分析和研究，既考虑到了经管类专业对数学知识的直接或间接需要，又考虑到了学习数学对培养学生逻辑思维能力的重要性，力求做到科学性和通俗性相结合，内容上由直观到抽象，由具体到一般，由浅入深，循序渐进，做到突出重点，详略得当。对基本概念、基本定理和重要公式加强解释与说明，以加深学生对它们的理解和印象；对某些较难的证明则略去，只讲清理论的意义及如何应用，避免内容过深而脱离学生的实际情况。本书中配备了大量的典型例题和丰富的习题，学生通过这些习题可以更好地掌握线性代数的基本

概念和基本方法，提高分析和解决问题的能力。

本书分为6章，由大连财经学院蔺琳、李庆娟、杨鑫任主编。全书编写分工如下：第1、2章由蔺琳编写；第3、4章由李庆娟编写；第5、6章由杨鑫编写。全书由蔺琳负责章节设计、组织编写和统稿定稿等工作。

本书在编写过程中，参考了大量的书籍和文献资料，在此向其作者表示衷心的感谢；本书的编写出版还得到了大连财经学院院领导的大力支持，在此表示衷心的感谢；同时，也向支持和帮助我们的全体同事表示诚挚的感谢。

由于编者的经验和水平有限，我们虽然尽了很大的努力，但难免有错误和不妥之处，真诚地欢迎同行、读者和专家提出不同的见解，并希望广大读者对教材中的错误、缺点和不足之处提出批评和指正。

编　者

2016年2月

目　录

MULU

第 1 章　行列式

历史上，行列式的概念是在研究线性方程组的解的过程中产生的．如今它在数学的许多分支中都有着非常广泛的应用，是常用的一种计算工具．特别是在本门课程中，它是研究后面线性方程组、矩阵及向量的线性相关性的一种重要工具．在这一章将从行列式的概念出发，介绍行列式的性质和计算方法以及求解线性方程组的著名法则 —— 克莱姆法则．

§1.1　n 阶行列式

一、二阶行列式

行列式实质上是由一些数排列成的数表按一定的法则计算得到的一个数．行列式的概念来源于线性方程组的求解过程，因此，我们先回顾初等代数中二元线性方程组的求解过程．

用消元法解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1.1}$$

以 a_{22} 与 a_{12} 分别乘以方程组(1.1)的第一个方程与第二个方程的两端，然后两个方程相减，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}$$

类似地，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21}$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，方程组(1.1)有唯一解

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}},\ x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \tag{1.2}$$

为便于记忆与研究上述解的公式，引入二阶行列式的定义．

定义 1.1　记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$，称为二阶行列式．

其中数 a_{11}，a_{12}，a_{21}，a_{22} 称为二阶行列式的元素，横排称为行，纵排称为列．元素 a_{ij}

的第一个下标 i 叫做行标，表明该元素位于第 i 行，第二个下标叫做列标，表明该元素位于第 j 列. 二阶行列式中从左上角到右下角的对角线称为行列式的主对角线，从右上角到左下角的对角线称为行列式的副对角线.

由上述定义可知，二阶行列式是由 4 个数按一定的规律运算所得的代数和，即二阶行列式的值就等于主对角线上两个元素之积减去副对角线上两个元素之积.

计算方法可用图 1.1 来帮助记忆.

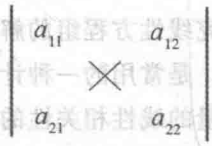

图 1.1

利用二阶行列式的定义，记

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1 a_{22} - b_2 a_{12}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = b_2 a_{11} - b_1 a_{21}$$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

因此，在行列式 $D \neq 0$ 时，(1.2) 式可以写成

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \tag{1.3}$$

上式为二元线性方程组(1.1) 的求解公式. 值得注意的是，分母 D 是由线性方程组(1.1) 的系数所确定的二阶行列式(称为系数行列式)，x_1 的分子 D_1 是用常数项 b_1，b_2 替换 D 中 x_1 的系数 a_{11}，a_{21} 所得的二阶行列式，x_2 的分子 D_2 是用常数项 b_1，b_2 替换 D 中 x_2 的系数 a_{12}，a_{22} 所得的二阶行列式. 故当 $D \neq 0$ 时，线性方程组(1.1) 有唯一解(1.3).

例 1 解二元线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 8 \\ x_1 - 2x_2 = -3 \end{cases}$$

解 因为方程组的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2 \times (-2) - 3 \times 1 = -7 \neq 0,$$

所以二元线性方程组有唯一解，且

$$\boldsymbol{D}_1=\begin{vmatrix}8 & 3\\ -3 & -2\end{vmatrix}=8\times(-2)-3\times(-3)=-7,$$

$$\boldsymbol{D}_2=\begin{vmatrix}2 & 8\\ 1 & -3\end{vmatrix}=2\times(-3)-8\times1=-14$$

于是方程组的解为

$$x_1=\frac{\boldsymbol{D}_1}{\boldsymbol{D}}=\frac{-7}{-7}=1,\ x_2=\frac{\boldsymbol{D}_2}{\boldsymbol{D}}=\frac{-14}{-7}=2.$$

二、三阶行列式

类似地，对于含有三个未知变量 x_1，x_2，x_3 的三元线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3\end{cases}\tag{1.4}$$

可以进行类似的讨论.

定义 1.2　记号 $\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=\begin{matrix}a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}\\ -a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}\end{matrix}$，称为三阶行列式.

由定义可见，三阶行列式有 6 项，每一项均为不同行不同列的三个元素之积再冠以正负号，其计算方法可用图 1.2 来帮助记忆．图中，沿各实线相连的三个数的积取正号；沿各虚线相连的三个数的积取负号．它们的代数和就是三阶行列式.

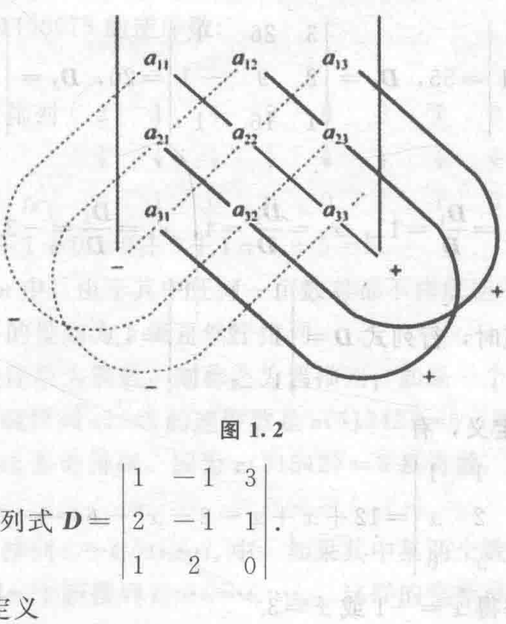

图 1.2

例 2　计算三阶行列式 $\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 0\end{vmatrix}$.

解　由行列式的定义

$\boldsymbol{D}=1\times(-1)\times0+(-1)\times1\times1+3\times2\times2-3\times(-1)\times1-1\times1\times2-(-1)\times2\times0$

$=-1+12+3-2=12$

对三元线性方程组(1.4)，

记

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix},\ \boldsymbol{D}_1=\begin{vmatrix}b_1&a_{12}&a_{13}\\b_2&a_{22}&a_{23}\\b_3&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix},$$

$$\boldsymbol{D}_2=\begin{vmatrix}a_{11}&b_1&a_{13}\\a_{21}&b_2&a_{23}\\a_{31}&b_3&a_{33}\end{vmatrix},\ \boldsymbol{D}_3=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&b_1\\a_{21}&a_{22}&b_2\\a_{31}&a_{32}&b_3\end{vmatrix},$$

当系数行列式 $\boldsymbol{D}\neq0$ 时，方程组(1.4)有唯一解

$$x_1=\frac{\boldsymbol{D}_1}{\boldsymbol{D}},\ x_2=\frac{\boldsymbol{D}_2}{\boldsymbol{D}},\ x_3=\frac{\boldsymbol{D}_3}{\boldsymbol{D}} \tag{1.5}$$

例 3 解线性方程组$\begin{cases}3x_1-x_2+x_3=26\\2x_1-4x_2-x_3=9\\x_1+2x_2+x_3=16\end{cases}$

解 系数行列式

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix}3&-1&1\\2&-4&-1\\1&2&1\end{vmatrix}=5\neq0$$

而

$$\boldsymbol{D}_1=\begin{vmatrix}26&-1&1\\9&-4&-1\\16&2&1\end{vmatrix}=55,\ \boldsymbol{D}_2=\begin{vmatrix}3&26&1\\2&9&-1\\1&16&1\end{vmatrix}=20,\ \boldsymbol{D}_3=\begin{vmatrix}3&-1&26\\2&-4&9\\1&2&16\end{vmatrix}=-15$$

所以方程组的解为

$$x_1=\frac{\boldsymbol{D}_1}{\boldsymbol{D}}=11,\ x_2=\frac{\boldsymbol{D}_2}{\boldsymbol{D}}=4,\ x_3=\frac{\boldsymbol{D}_3}{\boldsymbol{D}}=-3.$$

例 4 当 x 为何值时，行列式 $\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&x\\1&x&6\end{vmatrix}=1.$

解 由行列式的定义，有

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&x\\1&x&6\end{vmatrix}=12+x+x-2-x^2-6=4+2x-x^2$$

由 $4+2x-x^2=1$，解得 $x=-1$ 或 $x=3$.

三、排列及其逆序数

为了把二阶、三阶行列式的概念推广到 n 阶行列式，我们需要先引入排列及其逆序数的概念.

定义 1.3　由 n 个不同的自然数 1，2，…，n 排成的一个有序数组 $i_1 i_2 \cdots i_n$，称为一个 n 级排列，简称排列.

例如，12345 和 51342 都是 5 级排列，21458673 是 8 级排列.

一般地，n 级排列的总数为 $n!$ 个. 例如，由自然数 1，2，3 组成的 3 级排列共有 $3!=6$ 个，即

$$123;\ 132;\ 213;\ 231;\ 312;\ 321.$$

定义 1.4　在一个 n 级排列 $i_1 \cdots i_s \cdots i_t \cdots i_n$ 中，如果较大的数 i_s 排在较小的数 i_t 的前面，即 $s<t$ 时，$i_s>i_t$，称数 i_s 与 i_t 构成一个逆序，一个 n 级排列中逆序的总数，称为该排列的逆序数，记为 $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)$.

例如，在 5 级排列 51342 中，构成逆序的数对有 51，53，54，52，32，42 共 6 个，因此

$$\tau(51342)=6.$$

根据上述定义，可按如下方法计算排列的逆序数：

设在一个 n 级排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 中，比 $i_k(k=1,2,\cdots,n)$ 大的且排在 i_k 前面的数共有 t_k 个，则 i_k 的逆序的个数为 t_k，而该排列中所有自然数的逆序的个数之和就是这个排列的逆序数，即

$$\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)=t_1+t_2+\cdots+t_n=\sum_{k=1}^{n} t_k. \tag{1.6}$$

例 5　计算排列 21458673 的逆序数.

解

$$\begin{array}{ccccccccc} \text{排列} & 2 & 1 & 4 & 5 & 8 & 6 & 7 & 3 \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ t_k & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 5 \end{array}$$

因此 $\tau(21458673)=0+1+0+0+0+1+1+5=8$.

在 n 级排列 $123\cdots n$ 中，由于其中任何一个数对都不构成逆序，故 $\tau(123\cdots n)=0$. 我们称这种逆序数为零的排列为 n 级自然序排列.

如果一个排列的逆序数为偶数，则称之为偶排列；如果一个排列的逆序数为奇数，则称之为奇排列. 如 5 级排列 51342 的逆序数是 $\tau(51342)=6$，所以 5 级排列 51342 是偶排列，而 5 级排列 31542 是奇排列，因为 $\tau(31542)=5$ 是奇数. 逆序数为零的排列，我们规定它是偶排列.

定义 1.5　在一个排列 $i_1 \cdots i_s \cdots i_t \cdots i_n$ 中，如果其中某两个数 i_s 和 i_t 互换位置，其余各数位置不变，就得到一个新排列 $i_1 \cdots i_t \cdots i_s \cdots i_n$，这样的变换称为排列的一次对换，记

为(i_s,i_t). 特别地，若互换的是相邻的两个元素，则称为相邻对换.

例如，$51342 \xrightarrow{(5,\ 3)} 31542$.

定理 1.1 任意一个排列经过一次对换后，改变其奇偶性.

证 (1) 如果对换是相邻对换，在排列

$$i_1 i_2 \cdots i_s i_t \cdots i_n$$

中，将 i_s 与 i_t 对换，得

$$i_1 i_2 \cdots i_t i_s \cdots i_n$$

因为对换后除了 i_s 与 i_t 外，其余任意两数间的序数都未动，所以当 $i_s < i_t$ 时，对换后排列仅增加一个逆序，当 $i_s > i_t$ 时，对换后排列仅减少一个逆序. 因此经相邻对换后排列的逆序数增加或减少 1 个，故相邻对换改变排列的奇偶性.

(2) 如果对换不是相邻对换，在排列

$$i_1 i_2 \cdots i_s a_1 a_2 \cdots a_k i_t \cdots i_n$$

中，将 i_s 与 i_t 对换，得

$$i_1 i_2 \cdots i_t a_1 a_2 \cdots a_k i_s \cdots i_n$$

可以看成由原排列中的 i_t 依次和前面的数作 $k+1$ 次相邻对换，变成

$$i_1 i_2 \cdots i_t i_s a_1 a_2 \cdots a_k \cdots i_n$$

后，再让 i_s 依次和它后面的数作 k 次相邻对换得到的，即对换后的排列可由原排列经 $2k+1$ 次相邻对换得到，所以非相邻对换也改变了排列的奇偶性.

故 对换改变排列的奇偶性.

利用定理 1.1 可以进一步证明：

(1) 任意一个 n 级排列，经过有限次对换总可以变成自然序排列.

(2) 在所有 n 级排列中，奇排列和偶排列的个数相同，各为$\frac{n!}{2}$个.

四、n 阶行列式

为了定义更具普遍意义的 n 阶行列式，我们先分析下三阶行列式的特点，三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

可以看出：(1) 三阶行列式共有 6(=3!) 项；(2) 三阶行列式的值是所有位于不同行不同列的三个元素乘积的代数和. 其中每一项都可以表示为 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$，其中 $j_1j_2j_3$ 为 3 级排列，当 $j_1j_2j_3$ 取遍了所有 3 级排列时，即得到三阶行列式的所有项(不包含符号)；(3) 展开式中每一项的符号：当项中的行下标成自然序排列时，若其对应的列下标 $j_1j_2j_3$ 为偶排列，则该项取正号；若 $j_1j_2j_3$ 为奇排列，则该项取负号. 因此，每一项