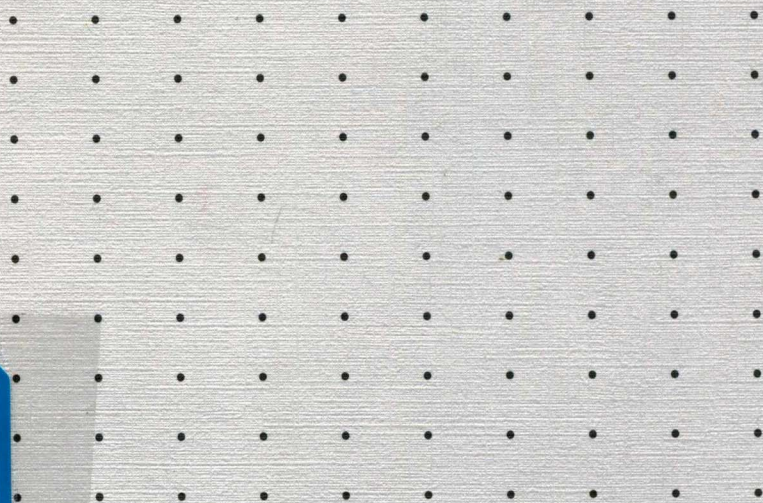


64

拓扑空间与 线性拓扑空间中的反例

■ 汪林



拓扑空间与 线性拓扑空间中的反例

■ 汪林

内容简介

本书汇集了拓扑空间与线性拓扑空间方面的大量反例. 主要内容为: 拓扑空间、可数性公理、分离性公理、连通性、紧性、局部凸空间、桶空间和囿空间、线性拓扑空间中的基.

本书可供高等院校理工科学生、研究生、教师参考.

图书在版编目(CIP)数据

拓扑空间与线性拓扑空间中的反例 / 汪林编. -- 北京: 高等教育出版社, 2018. 8

ISBN 978-7-04-049759-5

I. ①拓… II. ①汪… III. ①拓扑空间②拓扑线性空间 IV. ①O189.11 ②O177.3

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第107350号

策划编辑 赵天夫
责任校对 胡美萍

责任编辑 赵天夫
责任印制 田甜

封面设计 赵阳

版式设计 王艳红

出版发行 高等教育出版社
社址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
印刷 北京宏伟双华印刷有限公司

开本 787mm×1092mm 1/16
印张 16
字数 310千字
购书热线 010-58581118

咨询电话 400-810-0598
网址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.hepmall.com.cn>
<http://www.hepmall.com>
<http://www.hepmall.cn>
版次 2018年8月第1版
印次 2018年8月第1次印刷
定价 59.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题, 请到所购图书销售部门联系调换
版权所有 侵权必究
物料号 49759-00

序 言

在数学的教学和研究中,经常需要用反例来说明某个命题不真,而绝大多数的数学书籍,主要致力于证明在某些条件下某一结论是真,但很少谈到在另一些条件下某一结论是正确的还是错误的,即用来说明某些命题不真的反例较少,这不利于学习的深入.因此,比较系统地汇集某个数学分支的反例以弥补这方面的不足,无疑是十分有益的.基于这一想法,我们撰写了本书.

本书的取材,主要是从各种有关的书籍以及近几十年散见在国内外各种数学杂志上的反例中挑选出来的;也有一些反例是我们在长期的教学和研究实践中构造的.书中还提出了一系列尚待解决的问题,可供读者进一步探讨.

阅读本书所需的预备知识,假定读者已经掌握,因此,书中只准备了很少的说明.每一章都以引言开始,用来明确所用的记号、术语和定义,也陈述了一些有关的定理,这些定理或者是构造某些反例时要用到的,或者是为了衬托某个反例.各章引言部分一般未介绍实分析与泛函分析方面的术语与记号,有关这方面的内容,读者可参看 [9] 与 [10].此外,在许多例子的后面,以“注”的形式把这个反例与某个正面的命题相比较,以便读者更好地了解到这个命题的条件所起的作用和所举反例的意义.

中国科学院学部委员、业师程民德教授仔细地审阅了书稿并提出了许多具体而又十分宝贵的意见; A. C. Thompson 教授^①给作者以很大的鼓励,并提供了一些例子; 云南大学卫念祖教授始终关怀本书的编写; 杨富春、杨华康、丁彦恒、郑

^① A. C. Thompson 系加拿大数学教授, 1979 年 9 月至 1980 年 7 月曾在我国讲学, 并在南京大学主持了一个泛函分析讨论班.

喜印、李小娥等同志阅读了本书的部分手稿，并提出了许多有益的建议；本书责任编辑仔细地审读了书稿全文，对本书各个部分做了核对，并且提出了许多宝贵的意见，为提高本书的质量做了大量工作。

对上面提到的所有人，作者表示深深的谢意。

由于作者水平有限，因而一定存在不少缺点，殷切期望专家和读者予以批评指教。

汪林

2018年1月于昆明

目 录

第一章 拓扑空间.....	1
引言.....	1
1. 存在某个非离散的拓扑空间, 其中每个开集都是闭集, 而每个闭集也都是开集.....	6
2. 存在某个集 X 上的两个拓扑, 其并不是 X 上的拓扑.....	6
3. 存在某个 Hausdorff 空间中的基本有界集, 它不是紧有界的.....	7
4. 存在某个积空间 $X \times Y$ 中的不开的子集 A , 使 $A[x] = \{y (x, y) \in A\}$ 与 $A[y] = \{x (x, y) \in A\}$ 分别是 Y 与 X 的开集.....	8
5. 存在某个集 X 上的两个拓扑 τ_1 与 τ_2 , 使 $\tau_1 \subset \tau_2$, 但 (X, τ_1) 中的半开集未必是 (X, τ_2) 中的半开集.....	9
6. 存在某个集 X 上的两个不同的拓扑 τ_1 与 τ_2 , 使 A 是 (X, τ_1) 中的半开集当且仅当 A 是 (X, τ_2) 中的半开集.....	9
7. 存在某个 S 闭空间, 它的一个子空间不是 S 闭的.....	9
8. 存在某个 S 闭空间的连续像, 它不是 S 闭的.....	10
9. 存在某个集上的一族 Urysohn 拓扑, 其中不存在最弱的拓扑.....	10
10. 存在某个由拓扑空间 X 到 Y 上的半同胚映射 f , 它在 X 的某个子集 A 上的限制 $f _A$ 不是 A 到 $f(A)$ 上的半同胚映射.....	11
11. 存在某个拓扑空间的紧子集, 它不是 S 紧的.....	11

- iv ·
-
12. 存在两个正则开集, 其并不是正则开集. 12
 13. 存在两个正则闭集, 其交不是正则闭集. 12
 14. 存在某个拓朴空间 X , 其中每个非空子集在 X 中都是稠密的. 12
 15. 存在某个有限集, 其导集非空. 12
 16. 存在某个集的导集, 它不是闭集. 12
 17. 存在某个 T_1 空间中的紧集, 它不是闭的. 12
 18. 存在某个拓朴空间, 其中每个非空闭集都不是紧的. 13
 19. 存在某个非 Hausdorff 空间, 其中每个紧集都是闭的, 而每个闭集也都是紧的. 13
 20. 存在某个紧集, 其闭包不是紧集. 13
 21. 存在某个拓朴空间, 它的每个紧集都不包含非空开集. 14
 22. 存在某个无限拓朴空间, 其中每个子集都是紧的. 14
 23. 存在实数集上的一个 Hausdorff 拓扑, 它的任何有理数子集的导集都是空集. 14
 24. 存在某个无限拓朴空间, 其中不含有无限孤立点集. 14
 25. 存在某个非离散的拓朴空间, 其中每个紧集都是有限集. 15
 26. 存在集 X 上两个不可比较的拓扑 τ_1 与 τ_2 , 使 (X, τ_1) 与 (X, τ_2) 同胚. 15
 27. 存在两个拓朴空间 X 与 Y , 使 X 同胚于 Y 的一个子空间, 而 Y 同胚于 X 的一个子空间, 但 X 与 Y 并不同胚. 15
 28. 存在一维欧氏空间 R 的两个同胚的子空间 A 与 B , 而不存在 R 到 R 上的同胚映射 f , 使 $f(A) = B$ 15
 29. 存在某个非紧的度量空间 X , 使 X 上的每个实值连续函数都是一致连续的. 16
 30. R^2 中存在不同胚的子集. 16
 31. 存在两个同胚的度量空间 X 与 Y , 其中 X 中的有界集都是全有界的, 而 Y 中的有界集并不都是全有界的. 17
 32. 存在两个度量空间 X 与 Y , 使 X^2 与 Y^2 等距而 X 与 Y 并不等距. 18
 33. 存在某个非紧的度量空间, 它不能与其真子集等距. 19
 34. 存在某个拓朴空间 X , X 的点都是函数, 其拓朴相当于逐点收敛, 而 X 不是可度量化空间. 19

35. 存在某个函数序列 $\{f_n\}$, 其图像序列 $\{G(f_n)\}$ 收敛, 但 $\{f_n\}$ 并不一致收敛. 20

第二章 映射与极限 21

- 引言 21
1. 存在无界的收敛实数网. 22
 2. 存在某个序列的子网, 它不是子序列. 23
 3. 存在某个网 $\{x_\alpha | \alpha \in A\}$ 及 A 的一个无限子集 B , 使 $\{x_\beta | \beta \in B\}$ 不是子网. 23
 4. 存在某个序列闭集, 它不是闭集. 23
 5. 存在某个拓扑空间的序列, 它收敛于该空间的每一个点. 24
 6. 存在某个集 X 上的两个拓扑 τ_1 与 τ_2 , 凡 $\{x_n\}$ 依 τ_1 收敛于 x 必蕴涵 $\{x_n\}$ 依 τ_2 收敛于 x , 但 τ_1 并不强于 τ_2 24
 7. 至多有一个聚点的拓扑空间. 24
 8. 1° 子集 A 以点 x 为聚点; $2^\circ A \setminus \{x\}$ 中存在序列收敛于 x ; $3^\circ A \setminus \{x\}$ 中存在完全不同的点所成的序列收敛于 x . 上述三个命题彼此不等价. 24
 9. 存在某个具有聚点的可数集 S , 而在 S 中不存在收敛于该聚点的序列. 25
 10. 存在某个非第一可数空间, 使得每个集的每个聚点必是该集中某个序列的极限. 26
 11. 存在两个拓扑空间, 其中每个集的每个聚点必是该集中某个序列的极限, 但其积空间却无此性质. 27
 12. 聚点、 ω 聚点与凝聚点这三个概念两两相异. 27
 13. 一个非 Hausdorff 空间, 其中收敛序列的极限都是唯一的. 28
 14. 存在某个拓扑空间到另一个拓扑空间上的映射, 它是连续的, 但既不是开的也不是闭的. 29
 15. 存在某个拓扑空间到另一个拓扑空间上的映射, 它是开的和闭的, 但不是连续的. 29
 16. 存在某个拓扑空间到另一个拓扑空间上的映射, 它是闭的, 但既不是开的也不是连续的. 30
 17. 存在某个拓扑空间到另一个拓扑空间上的映射, 它是连续的和开的, 但不是闭的. 30

18. 存在某个拓扑空间到另一个拓扑空间上的映射, 它是开的, 但既不是连续的也不是闭的.	31
19. 存在某个拓扑空间到另一个拓扑空间上的映射, 它是连续的和闭的, 但不是开的.	31
20. 存在某个一对一的闭映射, 其逆映射不是闭映射.	31
21. 存在某个拓扑空间 X 到另一个拓扑空间 Y 的两个连续而不相等的映射, 它们在 X 的某个稠密子集上取值相同.	31
22. 存在某个不连续映射, 它把紧集映成紧集.	32
23. 存在两个连续闭映射 f 与 g , 使 $f \times g$ 不是闭映射.	32
24. 存在半连续而不连续的映射.	33
25. 存在两个半连续映射, 它们的和与积并不半连续.	33
26. 存在某个半连续映射序列的逐点极限, 它并不半连续.	33
27. 弱 * 连续映射与弱连续映射互不蕴涵.	34
28. 弱连续映射与序列连续映射互不蕴涵.	34
29. 序列连续且弱连续而不弱 * 连续的映射.	35
30. 序列连续且弱 * 连续而不弱连续的映射.	35
31. 弱连续且序列连续而不连续的映射.	35
32. 存在某个具有强闭图像的弱连续映射, 它并不连续.	36
33. 存在某个具有强闭图像的映射, 它并不弱连续.	36
34. 存在某个具有闭图像的映射, 它的图像并不强闭.	36
35. 存在某个 Darboux 映射, 它不是连续映射.	37
36. 闭映射、诱导闭映射与伪开映射之间的关系.	37
37. 存在某个闭包连续映射, 它却无处连续.	38
38. 存在拓扑空间 X, Y 及映射 $f: X \rightarrow Y$, 使 f 在某点连续而不闭包连续.	38
39. 存在某个正则空间 X 到拓扑空间 Y 的映射 f , 使 f 在某点闭包连续而不连续.	39
40. 存在弱连续而非 θ - s 连续的映射.	39
第三章 可分性与可数性	41
引言.	41
1. 存在某个不可分的拓扑空间, 它满足可数链条件.	42

2. 可分性与第一可数公理互不蕴涵.	42
3. 可分空间与紧空间互不蕴涵.	43
4. 可分空间与 Lindelöf 空间互不蕴涵.	43
5. 第一可数空间与 Lindelöf 空间互不蕴涵.	44
6. 第一可数空间与紧空间互不蕴涵.	44
7. 第一可数空间与 Hausdorff 空间互不蕴涵.	44
8. 存在不满足第一可数性公理的可数拓扑空间.	45
9. 存在某个 T_1 空间, 其中每个紧子集都是闭的, 但它不是 Hausdorff 空间.	47
10. 存在满足第一可数公理而不满足第二可数公理的拓扑空间.	47
11. 存在某个满足第一可数公理且可分的 Lindelöf 空间, 它不满足第二可 数公理.	47
12. 存在不满足第二可数公理的遗传可分空间.	48
13. 存在某个可分的紧空间, 它不是稠密可分的.	48
14. 存在某个不可分空间, 它有可分的 Stone-Čech 紧化.	49
15. 存在不可数个可分空间, 其积空间并不可分.	49
16. 存在某个可分空间的闭子空间, 它不是可分的.	50
17. 存在某个集 X 上的两个拓扑 τ_1 与 $\tau_2, \tau_1 < \tau_2$, 使 (X, τ_1) 可分而 (X, τ_2) 不可分.	50
18. 存在某个满足第一可数公理的拓扑空间, 它的一个商空间不满足第一 可数公理.	50
19. 存在不可数个满足第一可数公理的拓扑空间, 其积空间不满足第一可 数公理.	50
20. 存在某个满足第一可数公理的拓扑空间, 它的一个连续像不满足第一 可数公理.	51
21. 存在两个 Lindelöf 空间, 其积空间不是 Lindelöf 空间.	51
22. 存在某个 Lindelöf 空间的子空间, 它不是 Lindelöf 空间.	52
23. 存在某个可分的度量空间 X 及 Lindelöf 空间 Y , 使 $X \times Y$ 不是 Lindelöf 空间.	52
24. 存在不可度量化的满足第一可数公理的可分的紧 Hausdorff 空间.	53
25. 存在某个可分的度量空间, 它无处局部紧.	54
26. 存在一族可度量化的拓扑空间, 其积空间不可度量化.	56

27. 存在某个可度量化拓扑空间, 它的一个商空间不可度量化. 56

第四章 分离性 59

引言 59

1. 存在某个拓扑空间, 它不是 T_0 空间. 60
2. 存在 T_0 而非 T_1 的拓扑空间. 60
3. 存在 T_1 而非 T_2 的拓扑空间. 60
4. 存在 T_2 而非半正则的拓扑空间. 61
5. 存在半正则而非正则的拓扑空间. 61
6. 存在某个 Hausdorff 空间, 它不是完全 Hausdorff 空间. 63
7. 存在某个完全 Hausdorff 空间, 它不是正则空间. 64
8. 半正则空间与完全 Hausdorff 空间互不蕴涵. 64
9. 存在某个完全 Hausdorff 空间, 它不是 Urysohn 空间. 65
10. 存在某个 Urysohn 空间, 它不是完全正则空间. 66
11. Urysohn 空间与半正则空间互不蕴涵. 66
12. 存在完全正则而非正规的拓扑空间. 66
13. 存在正规而不完备正规的拓扑空间. 68
14. 存在正规而不完全正规的拓扑空间. 70
15. 正则而不完全正则的拓扑空间. 72
16. Urysohn 空间与正则空间互不蕴涵. 73
17. 完全正规而不完备正规的拓扑空间. 73
18. 存在某个正规空间的子空间, 它不是正规空间. 74
19. 存在某个非正规空间, 它的每个真子空间都是正规的. 74
20. 存在两个正规空间, 其积空间并不正规. 74
21. 存在不可数个可度量化的可数空间, 其积空间并不正规. 75
22. 存在两个完全正规空间, 其积空间并不完全正规. 76
23. 存在一族完备正规空间, 其积空间并不完备正规. 77
24. 存在某个正则空间的商空间, 它不是正则空间. 77
25. 存在某个由正则空间 X 到拓扑空间 Y 上的一对一的闭映射 f , 使 $f(X) = Y$ 不是正则空间. 78
26. 介于 T_0 与 T_1 之间的分离公理. 78

27. 介于 T_1 与 T_2 之间的分离公理.	79
28. 存在不可度量化的紧的完全正规空间.	81
29. 存在不可度量化的可数的完全正规空间.	82
第五章 连通性	85
引言.	85
1. 存在连通而非弧状连通的拓扑空间.	86
2. 存在弧状连通而非超连通的拓扑空间.	86
3. 存在局部连通而非局部弧状连通的拓扑空间.	86
4. 局部连通空间与连通空间互不蕴涵.	87
5. 弧状连通空间与局部连通空间互不蕴涵.	87
6. 超连通空间与局部连通空间互不蕴涵.	88
7. 局部弧状连通空间与超连通空间互不蕴涵.	89
8. 局部弧状连通空间与连通空间互不蕴涵.	89
9. 局部弧状连通空间与弧状连通空间互不蕴涵.	89
10. 存在连通而不强连通的拓扑空间.	89
11. 强局部连通空间与强连通空间互不蕴涵.	90
12. 存在某个拓扑空间的子集 A 与 B , 使 $A \cup B$ 与 $A \cap B$ 都是连通的, 但 A 与 B 并不都连通.	90
13. 闭包连通而本身并不连通的子集.	91
14. 存在某个拓扑空间, 其中每个无限集都是连通的.	91
15. 存在某个不连通的度量空间 (X, d) , 使得对每一 $x \in X, f_x(y) =$ $d(x, y)$ 都具有介值性质.	91
16. 存在某个度量空间 (X, d) 中的序列 S , 使 S 有子列 $Y = \{y_n\}$ 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} d(y_n, y_{n+1}) = 0, C(Y) = C(S)$, 而 $C(S)$ 不连通, 这里 $C(Z)$ 表示序列 Z 的聚点之集.	92
17. 存在不闭的弧状连通区.	93
18. 存在某个弧状连通集, 其闭包并不弧状连通.	93
19. R^2 中存在某个子集 B , 使 B 与 \bar{B} 都是连通的, 且 \bar{B} 还是弧状连通 的, 但 B 却不是弧状连通的.	94
20. 存在某个连通空间, 任意移走一点后仍为连通空间.	94
21. 存在完全不连通的非离散的拓扑空间.	95

22. 存在某个完全不连通的度量空间, 其中任意开球 $B(a, r)$ 的闭包都是闭球 $B[a, r]$ 95

23. 存在某个连通空间, 只移走一点后就变成完全不连通空间. 95

24. 存在可数 Hausdorff 连通空间. 97

25. 存在可数 Hausdorff 连通、局部连通空间. 98

26. 存在具有散点的可数 Hausdorff 连通空间. 99

27. 存在某个具有散点 p 的连通空间 X , 使得对每一连续的非常值映射 $f: X \rightarrow X$, 都有 $f(p) = p$ 100

28. 存在某个连通空间, 它是可数个两两不相交的连通紧集的并集. 101

29. 存在某个拓扑空间, 它是两个全断的闭子集的并, 但它本身却是连通的. 102

30. 存在可数个局部连通空间, 其积空间并不局部连通. 103

31. 存在某个局部连通空间的连续像, 它不是局部连通的. 104

32. 存在拓扑空间 X 与 Y 以及 X 到 Y 上的连续满射 f , 使 $f(X) = Y$ 是连通空间, 而 X 不是连通空间. 104

33. 箱拓扑与积拓扑之间的差异. 104

第六章 紧性. 107

引言. 107

1. 存在子集紧而不可数紧的拓扑空间. 109

2. 存在可数紧而不紧的拓扑空间. 110

3. 存在序列紧而不紧的拓扑空间. 110

4. 存在紧而不序列紧的拓扑空间. 110

5. 存在可数紧而不序列紧的拓扑空间. 110

6. 存在局部紧而不强局部紧的拓扑空间. 110

7. 三种不同的局部紧空间的定义之间的关系. 111

8. 存在某个强局部紧空间, 它不是紧的. 113

9. 存在某个 Lindelöf 空间, 它不是 σ 紧的. 113

10. 存在某个 σ 紧而不紧的拓扑空间. 113

11. R^2 中存在两个局部紧的子空间, 其并不是局部紧的. 113

12. 存在可数个局部紧空间, 其积不是局部紧的. 113

13. 存在某个局部紧空间的子空间, 它不是局部紧的. 114

14. 存在某个局部紧空间的商空间, 它不是局部紧的. 114
15. 存在某个局部紧空间的连续像, 它不是局部紧的. 114
16. 存在某个强局部紧空间 X 和开映射 f , 使 $f(X)$ 不是强局部紧的. 115
17. 存在某个强局部紧空间的开连续像, 它不是强局部紧的. 115
18. 存在可数个 σ 紧空间, 其积不是 σ 紧的. 116
19. 存在某个 σ 紧空间的子空间, 它不是 σ 紧的. 116
20. 存在某个拓扑空间中的两个紧集, 其交不是紧集. 116
21. 存在不可数个序列紧空间, 其积空间并不序列紧. 117
22. 存在两个可数紧空间, 其积空间并不可数紧. 117
23. 存在某个子集紧空间的连续像, 它不是子集紧的. 117
24. 存在某个 Hausdorff 空间, 它的一点紧化不是 Hausdorff 空间. 118
25. 任给自然数 n , 可构造一个具有 n 点紧化的拓扑空间, 但对 $m > n$,
不存在 m 点紧化空间. 118
26. 存在两个 Hausdorff 空间, 它们都有 n 点紧化空间, 而其积空间没有
 n 点紧化空间. 119
27. 存在某个最强的紧拓扑, 它不是 Hausdorff 拓扑. 119
28. 存在某个最弱的 Hausdorff 拓扑, 它不是紧拓扑. 120
29. 存在某个可度量化局部紧空间, 其一点紧化不可度量化. 122
30. 存在可数亚紧而非亚紧的拓扑空间. 122
31. 存在亚紧而不仿紧的拓扑空间. 123
32. 存在一个仿紧空间, 它不是紧空间. 124
33. 存在可数亚紧而不可数仿紧的拓扑空间. 124
34. 存在可数仿紧而不可数紧的拓扑空间. 124
35. 存在可数仿紧而不仿紧的拓扑空间. 124
36. 亚紧空间与可数仿紧空间互不蕴涵. 124
37. 存在仿紧而不全体正规的拓扑空间. 125
38. 存在正规而不全体正规的拓扑空间. 125
39. 存在全体正规而不超全体正规的拓扑空间. 125
40. 存在正规而不族正规的拓扑空间. 126
41. 存在族正规而不完全族正规的拓扑空间. 127
42. 存在 σ_f 仿紧而非正规的拓扑空间. 127

- 43. 存在某个可数亚紧空间的开连续像, 它不是可数亚紧的. 128
- 44. 存在两个仿紧空间, 其积空间并不仿紧. 129
- 45. 存在某个仿紧空间的子空间, 它不是仿紧空间. 130
- 46. 存在某个完全正规的仿紧空间与某个可分的度量空间, 其积空间不是
正规空间. 130
- 47. 存在某个亚紧的 Moore 空间, 它不是可遮空间. 131
- 48. 存在某个可遮的 Moore 空间, 它并不正规. 131
- 49. 存在不可度量化完全正规的仿紧空间. 132
- 50. 存在不可度量化的 Moore 空间. 133
- 51. 存在某个仿紧的遗传可分的半度量空间, 它不是可展的. 133

第七章 线性拓扑空间 135

- 引言 135
- 1. 线性度量空间中的一个度量有界集, 它不有界. 139
- 2. 一个非局部凸的线性度量空间, 其中度量有界集与有界集是一致的. . . 140
- 3. 存在某个有界集, 它的凸包不是有界的. 141
- 4. 存在某个相对紧集, 它的平衡凸包不是相对紧的. 141
- 5. 局部有界而不局部凸的线性拓扑空间. 142
- 6. 局部凸而非局部有界的线性拓扑空间. 142
- 7. $x_n \rightarrow o$ 并不蕴涵 $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \rightarrow o$ 的线性拓扑空间. 143
- 8. 存在某个线性空间上的两个不同拓扑, 它们具有相同的有界集. 144
- 9. 存在某个线性空间上的两个不同拓扑, 它们具有相同的连续线性泛函. . 144
- 10. 存在某个线性空间上的两个不同拓扑, 它们具有
相同的闭子空间. 144
- 11. 有界集必为全有界集的无穷维线性拓扑空间. 145
- 12. 存在某个赋范线性空间 X 的子集 B , 使 B 是 $\sigma(X, X')$ 全有界而不
范数拓扑全有界. 145
- 13. 存在某个无穷维线性拓扑空间, 其中的有界闭集都是紧的. 145
- 14. 存在某个线性拓扑空间, 其中存在紧而不序列紧的子集. 145
- 15. 一个线性空间上的两种不同的拓扑, 在这两种拓扑下收敛序列是相同
的, 但紧集并不相同. 146
- 16. Mackey 相对紧而非 Mackey 相对序列紧的子集. 146

17. 有界而不连续的线性映射.	147
18. 连续而不强有界的线性映射.	147
19. 无处连续的自反开映射.	147
20. 非线性的等距映射.	149
21. 不存在非零连续线性泛函的线性拓扑空间.	149
22. 一个非局部凸空间, 在它上面存在非零连续线性泛函.	150
23. 一个线性拓扑空间中的两个闭子空间, 其和不闭.	151
24. 代数相补而不拓扑相补的闭子空间.	151
25. 一个线性拓扑空间, 其中每个有限维子空间都没有相补子空间.	152
26. 存在某个最强的线性拓扑, 它不是局部凸的.	152
27. 存在两个线性拓扑, 其交不是线性拓扑.	153
第八章 局部凸空间	155
引言.	155
1. 一个局部凸的 Fréchet 空间, 它不是 Banach 空间.	157
2. 不可度量化完备的局部凸空间.	157
3. 序列完备而不有界完备的局部凸空间.	158
4. 有界完备而不完备的局部凸空间.	158
5. 完备而不 B_r 完备的局部凸空间.	158
6. 全完备而不超完备的线性拓扑空间.	159
7. 不可度量化的超完备的局部凸空间.	159
8. 不完备的 G 空间.	160
9. 两个相容的拓扑, 其中一个完备而另一个不完备.	160
10. 存在某个不可分的局部凸空间, 它的每个有界子集都是可分的.	160
11. 存在某个完备空间的稠密的真子空间, 它是序列完备的.	160
12. 一个局部凸空间的偶对空间中的弱 $*$ 紧集, 它并不强 $*$ 有界.	161
13. 一个局部凸空间中的凸紧集, 它不是其端点集的凸包.	161
14. 一个局部凸空间中的平衡闭凸集, 它没有端点.	161
15. 具有稠密端点的凸集.	162
16. 一个线性拓扑空间中的紧凸集, 它没有端点.	163

17. 一个局部凸 Hausdorff 空间中的两个凸紧集 A 与 B , 使 $\text{ext}(A+B) \neq \text{ext}(A) + \text{ext}(B)$ 163
18. 存在某个紧集, 其绝对凸闭包不是紧的. 164
19. 一个对偶空间 $\langle X, Y \rangle$, 使 X 上的一个相容拓扑并不位于 $\sigma(X, Y)$ 与 $m(X, Y)$ 之间. 164
20. 一个线性空间, 在它上面的所有相容局部凸拓扑都是相同的. 164
21. 一族局部凸空间 X_α 的归纳极限 X , 使 X 的某个有界集不包含于任何一个 X_α 内. 165
22. 一个局部凸空间族 X_α 的归纳极限 X , 使在某个 X_α 上由 X 诱导出来的拓扑不等于 X_α 的原拓扑. 165
23. 存在某个局部凸空间中的两个赋范子空间的代数直接和, 它不可度量化. 165
24. 非局部凸的几乎弱 * 拓扑. 167
25. 几乎弱 * 闭而不弱 * 闭的集合. 167
26. 存在某个全完备空间到另一个全完备空间上的连续线性映射, 它不是开的. 167
27. 伪完备而不完备的线性拓扑空间. 168
28. 一个线性拓扑空间上的平移不变的距离, 它不能连续扩张成为完备化空间上的距离. 168
29. 一个局部凸空间的凸紧子集, 它关于度量空间有绝对扩张, 而关于紧 Hausdorff 空间没有绝对扩张. 169
30. 准上半连续而不上半连续的映射. 170
31. 弱上半连续而不准上半连续的映射. 171
32. 一个可分的线性拓扑空间, 它有不可分的闭线性子空间. 172
33. 可分而不序列可分的线性拓扑空间. 173
34. 一个可度量化空间序列的严格归纳极限, 它不可度量化. 173
35. 一个完备的局部凸空间, 它的一个商空间并不完备. 173
36. 存在两个全完备空间, 其积并不全完备. 173
37. 存在一族全完备空间, 其直接和并不全完备. 174
38. 存在一族超完备空间, 其直接和并不超完备. 175
39. 一个全完备空间序列的严格归纳极限, 它不是全完备空间. 175
40. 一个完备局部凸空间族的归纳极限, 它并不完备. 175