21世纪高等院校系列规划教材

高等数学

GAODENGSHUXUE

主编 裴东林 赵大一

南开大学出版社

21世纪高等院校系列规划教材

高等数学

GAODENGSHUXUE

主　编　裴东林　赵大一
副主编　李　旭　魏　嘉　王秀焕
　　　　苗宝军　牛裕琪
编　委　冀燕钊

南开大学出版社
天津

本书内容包括：

一元函数的极限与连续、导数与微分、微分学的应用、不定积分、定积分及其应用、常微分方程、向量代数与空间解析几何初步、多元函数微分学、多元函数积分学、无穷级数共十章，同时在每章末都安排了相应的实验。另外，在本书末编写了两个附录。

本书可作为本、专科院校、高等职业学校、成人高等学校及本科院校举办的二级职业技术学院工科各专业高等数学课程教材，也可作为工程技术人员的高等数学知识更新教材。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/ 裴东林 . 赵大一编著,-天津：南开大学出版社,
2009.9 ISBN 978-7-310-03178-8
I.计… II.①裴…②赵… III. 高等数学-高等学校-教材 IV.013
中国版本图书馆CIP数据核字（2009）第161692号

南开大学出版社出版发行
出版人：肖占鹏
地址：天津市南开区卫津路94号 邮政编码：300071
营销部电话：（022）23508339 23500755
营销部传真：（022）23508542 邮购部电话（022）23502200
*
四川五洲彩印有限责任公司
全国各地新华书店经销
*
2009年9月第1版 2017年8月第4次印刷
787×1092毫米 16开 22.75印张 510千字
定价:36.00元
如遇图书印装质量有问题,请与本社营销部联系调换,电话: (022)23507125

出版说明

随着我国经济建设的快速发展，社会对技术型应用人才的需求日趋紧迫，这也促进了高等院校教育的迅猛发展，我国的高等教育已经进入了平稳、持续、有序的发展阶段。教育部对高等教育进行了卓有成效的改革，颁布了高等教育专业设置目录，为高等院校专业设置提供了有力依据。作为知识传承载体的教材，在高等院校的发展过程中起着至关重要的作用，但目前教材建设却远远滞后于应用型人才培养的步伐，许多院校一直沿用偏重于研究型的教材，应用型教材比较缺乏，这势必影响应用型人才的培养。

为了顺应高等院校教育普及化迅速发展的趋势，配合高等院校的教学改革和教材建设，坚持“因材施教”的教学原则，注重理论联系实际，全面促进高等院校教材建设，进一步提高我国高等教材的质量，为此，我们在全国范围内组织并成立“21世纪高等院校系列规划教材研究与编审委员会”，集全国各地的优秀专家、教授于一体，他们所在单位皆为教学成效较大、办学实力较强、办学特色鲜明的高等本专科学校、成人高等学校、高等职业学校及高等院校主办的二级职业技术学院。

为了保证高职高专教育教材的出版质量，我们在全国范围征集从事高等教育教学第一线的优秀教师和专家编写的教材。此外，“21世纪高等院校系列规划教材研究与编审委员会”还组织各专业的专家、教授对所所征集的教材进行筛选和审定。

此次教材按照教育部制定的“高等教育基础课程教学基本要求”而编写。以“实用、够用”为度，淡化理论、注重实践、内容体系更趋合理，尽量体现新知识、新技术、新方法和新材料，注重技术与应用的结合，以利于学生综合素质的形成和科学思维方法与创兴能力的培养。

为了使此套教材更具有广泛性、科学性、先进性和代表性，我们也真心希望从事高等教育的老师和专家积极推荐有特色、有创新的教材。同时，希望将教育实践的意见和建议，及时反馈我们。以便对出版的教材不断修订、完善，不断提高教材质量，完善教材体系，为社会奉献更多更新的与高职高专教育配套的高质量教材。

21世纪高等院校系列规划教材研究与编审委员会

参加教材编写单位名单

（排名不分先后）

北京财贸职业学院
北京科技职业学院
中央财经大学
天津体育学院
太原师范学院
辽宁工程技术大学
大连交通大学
洛阳高级技工学校
山东滨州职业技术学院
郑州职业技术学院
河南许昌学院
西安交通职业技术学院
南京工业职业技术学院
连云港职业技术学院
徐州建筑职业技术学院
江西电力职业技术学院
江西宜春职业技术学院
山东商业职业技术学院
曲阜远东职业技术学院
四川纺织高等专科学校
川音绵阳艺术学院
四川水利职业技术学院
南充职业技术学院
四川航天职业技术学院
重庆机电职业技术学院
重庆工贸职业技术学院
重庆建筑工程职业学院
重庆城市管理者职业学院
重庆海联职业技术学院
陕西纺织服装职业技术学院
陕西电子科技职业学院
贵州电力职业技术学院
甘肃平凉医学高等专科学校
济南铁道职业技术学院
云南经济管理学院
甘肃交通职业技术学院
甘肃建筑职业技术学院
甘肃联合大学

前　言

自 1999 年高等院校扩招至今，已经历了十年的历程，为了适应高等教育的发展，甘肃联合大学将《高等数学》课程列为精品课程进行建设，经过几年的课程建设，我们在教学内容，教学方法以及教学手段等方面都取得了一定的成绩。本书就是在此基础上编写而成的。

本书主要介绍一元函数的极限与连续、导数与微分、微分学的应用、不定积分、定积分及其应用、常微分方程、向量代数与空间解析几何初步、多元函数微分学、多元函数积分学、无穷级数。另外，我们在每章末都安排了相应的实验，使读者能更好地理解所学内容并为今后使用数学软件（MATLAB）打下良好的基础，同时，我们在本书末尾编写了两个附录，为读者更好地理解本书内容以及应用微积分解决实际问题提供了一定帮助。

为了适应高职高专教育的发展需要，我们对传统的高等数学教学内容进行了必要的调整。略去了一些较为抽象的内容，同时将数学实验的思想和方法以实验的形式加入到教学内容之中，使学生能够利用数学软件更好地理解所学的知识。另外，为了增强学生应用所学知识解决实际问题的意识，我们在附录 II 中对数学模型进行了简单的介绍。

限于编者水平，同时编写时间也比较仓促，因而教材中一定存在错误和不妥之处，希望广大读者提出批评和指正。

目　录

第 1 章

一元函数的极限与连续

微积分是一门以变量作为研究对象、以极限方法作为基本研究手段的数学学科. 应用极限方法研究各类变化率问题和几何学中曲线的切线问题,就产生了微分学;应用极限方法研究诸如曲边图形的面积等这类涉及到微小量无穷积累的问题,就产生了积分学. 可以说,整个微积分学是建立在极限理论的基础之上的.

在本章我们将在复习映射与函数等初等数学内容的基础上,介绍极限的概念、性质和运算法则;介绍与极限概念密切相关、且在微积分运算中扮演重要角色的无穷小量;我们还将求得两个应用非常广泛的重要极限. 学好这些内容,准确理解极限概念,熟练掌握极限运算方法,是学好微积分的基础.

本章的最后部分将通过极限引入函数的一类重要性质——连续性,连续性是对客观世界广泛存在的连续变动现象的数学描述. 由于连续函数具有良好的性质,不论在理论上还是在应用中都十分重要,故本课程主要讨论连续函数.

第一节　映射与函数

一、区间和邻域

在微积分中最常用的一类实数集是区间. 设 a 和 b 都是实数且 $a<b$, 实数集 $\{x \mid a<x<b\}$ 称为开区间并记作 (a,b), 即

$$(a,b)=\{x \mid a<x<b\}.$$

a 和 b 称为区间的端点,它们均不属于 (a,b). 类似地可定义以 a 、b 为端点的闭区间、半开区间等. 它们的记号和定义如下所列:

闭区间　　$[a,b]=\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\}$,

半开区间　　$[a,b)=\{x \mid a\leqslant x<b\}$, $(a,b]=\{x \mid a<x\leqslant b\}$.

以上这些区间都称为有限区间(或有界区间),它们都可以用数轴上长度有限的线段来表示,如图 1—1 (a)、(b)分别表示闭区间 $[a,b]$ 与开区间 (a,b). 此外还有无限区间(或无穷区间),引进记号 $+\infty$(读作正无穷大)及 $-\infty$(读作负无穷大)后,则可用类似的记号表示无限区间,例如:

$$[a,+\infty)=\{x \mid x\geqslant a\},\ (-\infty,b)=\{x \mid x<b\}.$$

$$(-\infty,+\infty)=\{x \mid x\in \mathbf{R}\}.$$

前两个无限区间在数轴上的表示如图 1—1 (c)、(d)所示.

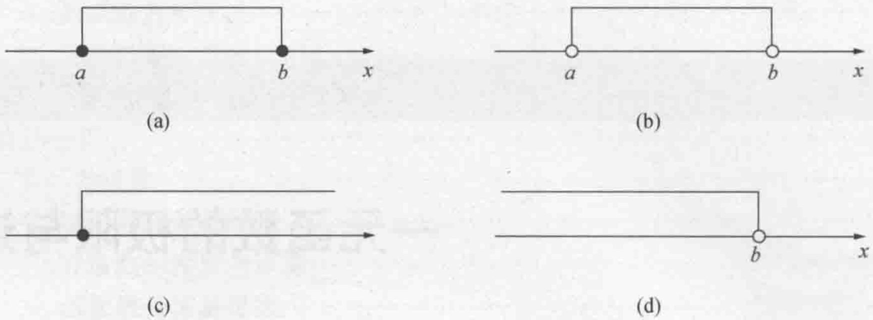

图 1-1

邻域是一种常用的集合. 设 a 、δ 是实数且 $\delta > 0$, 则定义点 a 的 δ 邻域(记作 $U(a,\delta)$) 为下列集合:

$$U(a,\delta) = \{x \mid |x-a| < \delta\},$$

或写作

$$U(a,\delta) = \{x \mid a-\delta < x < a+\delta\},$$

可见 $U(a,\delta)$ 就是开区间 $(a-\delta,a+\delta)$. 点 a 叫做邻域的中心, δ 叫做邻域的半径(图 1-2). 如果把邻域的中心去掉,所得到的集合称为点 a 的去心 δ 邻域,记作 $\mathring{U}(a,\delta)$, 即

$$\mathring{U}(a,\delta) = \{x \mid 0 < |x-a| < \delta\}.$$

为了方便,有时把开区间 $(a-\delta,a)$ 称为 a 的左 δ 邻域,把开区间 $(a,a+\delta)$ 称为 a 的右 δ 邻域.

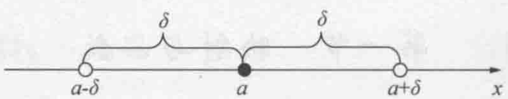

图 1-2

两个闭区间的直积表示 xOy 平面上的矩形区域,例如:

$$[a,b] \times [c,d] = \{(x,y) \mid x \in [a,b], y \in [c,d]\},$$

即为 xOy 平面上的一个矩形区域,其相邻两边各自平行于 x 轴与 y 轴,并且在 x 轴与 y 轴上的投影分别为区间 $[a,b]$ 和 $[c,d]$.

二、映射

1. 映射的概念

设 X 和 Y 是两个非空集合,如果存在一个法则 T, 使得 X 中的每个元素 x 按法则 T 在 Y 中有唯一的元素 y 与之对应,那么称 T 为从 x 到 y 的映射,记作

$$T: X \to Y,$$

元素 y 称为元素 x (在映射 T 下)的像,并记作 $T(x)$, 即

$$y = T(x),$$

而元素 x 称为元素 y (在映射 T 下)的一个原像.

集合 X 称为映射 T 的定义域, T 的定义域常记作 $d(T)$. X 中所有元素的像所组成

的集合称为映射T的值域，T的值域常记作$R(T)$. T的值域有时也称为集合X（在映射T下）的像并记作$T(X)$，即

$$R(T)=T(X)=\{T(x)\mid x\in X\}.$$

2. 几类重要映射

设T是从集合X到集合Y的映射，若$T(X)=Y$，即Y中任一元素均是X中某元素的像，则称T为X到Y上的满射；若对任意的x_1、$x_2\in X$，$x_1\neq x_2$，必有$T(x_1)\neq T(x_2)$，则称T为X到Y的单射；若T既是满射又是单射，则称T为X到Y上的一一映射，或称T为X与Y之间的一一对应.

例1 设$X_1=(-\infty,+\infty)$，$X_2=\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$，$Y_1=(-\infty,+\infty)$，$Y_2=[-1,1]$.考虑$f_1:X_1\to Y_1$，$f_2:X_1\to Y_2$，$f_3:X_2\to Y_1$，$f_4:X_2\to Y_2$，其中$f_i(i=1,2,3,4)$均为如下的对应规则：对定义域内的任一$x$，$f_i(x)=\sin x$. 易知$f_1$是$X_1$到$Y_1$的映射，但既非满射，又非单射；$f_2$是$X_1$到$Y_2$上的满射，但非单射；$f_3$是$X_2$到$Y_1$的单射，但非满射；$f_4$是$X_2$到$Y_2$上的满射，又是单射，即为一一映射.

3. 逆映射与复合映射

逆映射 设映射T为X到Y上的一一映射，则由定义，对每个$y\in Y$，有唯一的$x\in X$适合$T(x)=y$，于是我们可得到一个从Y到X的映射，它将每个$y\in Y$映为X中的元素x，这里的x满足$T(x)=y$. 我们把这个映射称为T的逆映射，记作T^{-1}. 即，T^{-1}为从Y到X的映射，对每个$y\in Y$，如果$T(x)=y$，则$T^{-1}(y)=x$.

注意，只有一一映射才存在逆映射，因此也把一一映射称为可逆映射. 比如在例1中，只有f_4才存在逆映射f_4^{-1}，f_4^{-1}即为大家熟悉的反正弦函数：$f_4^{-1}(x)=\arcsin x$，其定义域为$[-1,1]$，值域为$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$.

复合映射 设有映射$T_1:X\to Y_1$，$T_2:Y_2\to Z$，且$T_1(x)\subset Y_2$，由T_1和T_2可确定从X到Z的一个对应规则，它将每个元素$x\in X$，映为Z中的元素$z=T_2[T_1(x)]$，显然这个对应规则是从X到Z的一个映射，我们把这个映射称为由T_1、T_2构成的复合映射，并记作$T_2\circ T_1$，即

$$T_2\circ T_1:X\to Z,\text{ 对每个元素 }x\in X,\ (T_2\circ T_1)(x)=T_2[T_1(x)].$$

例如，设有映射$T_1:\mathbf{R}\to[-1,1]$，$u=T_1(x)=\sin x$，和映射$T_2:[-1,1]\to[0,1]$，$y=T_2(u)=u^2$，则可构成复合映射$T_2\circ T_1:\mathbf{R}\to[0,1]$，对$\mathbf{R}$中的任一元素$x$，

$$(T_2\circ T_1)(x)=T_2[T_1(x)]=T_2(\sin x)=\sin^2 x.$$

三、函数

1. 函数概念

设数集$D\subset\mathbf{R}$，则D到$\mathbf{R}$的任一映射，称为定义在D上的一元函数，简称为函数，通常简记为$y=f(x)$，$x\in D$. $x(x\in D)$称为函数的自变量，$y(y\in f(D))$称为函数的因变量，习惯上也称y为x的函数. 前面定义的与映射有关的一些概念，如定义域、值域等，也适用于函数. 对于函数$y=f(x)$，$x\in D$，我们把$\mathbf{R}\times\mathbf{R}$中的集合$\{(x,y)\mid y=f(x),$

$x \in D\}$ 称为函数 $y = f(x)$ 的图形(或图像).

表示函数的符号是任意选取的,除了常用的 f 外,还可以用其他的英文或希腊字母,如“g”、“F”、“φ”、“Φ”等等.如果在同一个问题中讨论到几个不同的函数,则必须用不同的记号分别表示这些函数,以示区别.

在一些实际问题中,函数的定义域是根据问题的实际意义确定的.例如自由落体运动中,设物体下落的时间为 t,下落的距离为 s.如果开始下落的时刻是 $t = 0$,落地时刻是 $t = T$,那么 s 与 t 之间的对应关系是

$$s = s(t) = \frac{1}{2}gt^2,\ t \in [0,T].$$

这个函数的定义域是区间 $[0,T]$.

在数学中,有时不考虑函数的实际意义,而抽象地研究用算式表达的函数,这时约定函数的定义域就是使得算式有意义的一切实数组成的集合,称为函数的自然定义域.例如 $s = \frac{1}{2}gt^2$ 的自然定义域是 $(-\infty,+\infty)$,$y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的自然定义域是区间 $(-1,1)$.

我们定义的函数是指在确定的对应法则下,定义域内的每个元素只对应一个数值,即所谓的“单值函数”.但是往往会有这样的情况,即在某种对应规则下,变元 x 的一个值对应变元 y 的多于一个的值.例如在 xOy 平面上,圆心在原点,半径为 a 的圆方程是 $x^2 + y^2 = a^2$.如果将“满足这个方程”作为 x 与 y 之间的对应法则,那么当 $x = a$ 或 $-a$ 时,对应 $y = 0$ 一个值;但当 x 取开区间 $(-a,a)$ 内任一个值时,对应的 y 有两个值.因此当 $x \in (-a,a)$ 时,若仅仅以“满足方程 $x^2 + y^2 = a^2$”作为 x 与 y 之间的对应法则,那么这个法则就不符合函数的定义.但是我们只要把对应法则稍作补充,比如规定当 $x \in [-a,a]$ 时,以“满足方程 $x^2 + y^2 = a^2$,并且 $y \geqslant 0$”作为对应法则,那么我们就得到了一个确定的(单值)函数,将它记为 $y = y_1(x)$,这时函数有算式表示 $y_1(x) = \sqrt{a - x^2}$.同样,对应规则“满足方程 $x^2 + y^2 = a^2$,并且 $y \leqslant 0$”也确定了一个函数,将它记作 $y = y_2(x)$,$y_2(x) = -\sqrt{a - x^2}$.有时为了叙述的方便,我们说方程 $x^2 + y^2 = a^2$ 确定了多值函数,并把 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 称为这个多值函数的两个单值分支.

具体表示一个函数时,可以用表格法、图形法、解析法(即算式表示法),有时也可用语言描述,这些是大家在中学里已熟悉的内容,这里就不再详细说明了.

下面举几个函数的例子,例中的定义域均指自然定义域.

例 2 (1)常数函数 $y = 3$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$,值域是 $\{3\}$;

(2)绝对值函数 $y = |x|$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$,值域是 $[0,+\infty)$.

例 3 符号函数

$$y = \mathrm{Sgn}x = \begin{cases} 1\ , & x > 0, \\ 0\ , & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

的定义域是 $(-\infty,+\infty)$,值域是 $\{-1,0,1\}$.它的图形如图 1-3 所示.对任何 $x \in \mathbf{R}$,有 $x = \mathrm{Sgn}x \cdot |x|$ 或 $|x| = x\mathrm{Sgn}x$.

例 4 取整函数

对任意的 $x \in \mathbf{R}$,用记号 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数,从而得到定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数

$$y=[x],$$

称此函数为取整函数,$[x]$ 称为 x 的整数部分. 例如 $\left[\frac{5}{7}\right]=0$, $[\sqrt{2}]=1$, $[\pi]=3$, $[-1]=-1$, $[-3.5]=-4$.

$y=[x]$ 的定义域是 $\mathbf{R}$,值域是 Z. 图 1－4 是它的图形. 取整函数还可以表示成

$$y=[x]=n,\ 当\ x\in[n,n+1),\ n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots.$$

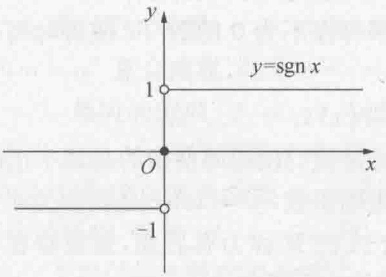

图 1－3

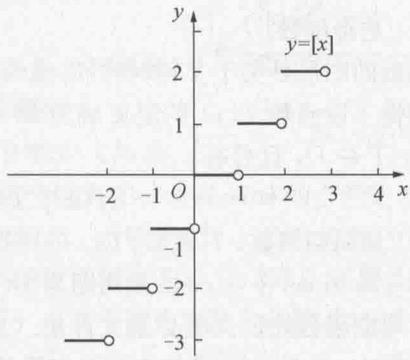

图 1－4

从例 3、例 4 中看到,有些函数在其定义域的不同部分,对应法则由不同的算式表达,这种函数叫作分段函数. 在科学技术和日常生活中,经常会遇到分段函数.

2. 函数的几种特性

有界性　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D, 数集 $X\subset D$. 如果存在正数 M, 使对任一数 $x\in X$, 都满足

$$|f(x)|\leqslant M,$$

就称函数 f 在 X 上有界.

如果这样的 M 不存在,就称 f 在 X 上无界. 换言之,若对任意给定的一个正数 M(不论它多么大),总有某个 $x\in X$, 使得 $|f(x)|>M$, 那么称 f 在 X 上无界.

函数有界的定义也可以这样表述:如果存在常数 M_1 和 M_2, 使得对任一 $x\in X$, 都有 $M_1<f(x)<M_2$, 就称 f 在 X 上有界,并分别称 M_1 和 M_2 为 $f(x)$ 在 X 上的一个下界和一个上界,通常把在 X 上全体有界函数所成之集记作 $B(X)$. 于是, f 在 X 上有界就可表示为 $f\in B(X)$.

容易知道,若 $f(x)$ 在 X 上有界,则它在 X 上的上界和下界均不是唯一的.

单调性　设函数 $f(x)$ 的定义域是 D, 区间 $I\subset D$. 如果对任意的 $x_1, x_2\in I$, 当 $x_1<x_2$ 时总有

$$f(x_1)<f(x_2),$$

就称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是增加(或称递增)的;如果当 $x_1<x_2$ 时,总有

$$f(x_1)>f(x_2),$$

就称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是减少(或称递减)的.