高等学校“十三五”重点规划
数学系列丛书

复变函数与积分变换（第2版）

主编◇孙广毅　张晓威　赵景霞

HEUP 哈尔滨工程大学出版社

复变函数与积分变换

（第 2 版）

主编　孙广毅　张晓威　赵景霞

安徽建筑大学
藏書
图书馆

HEUP 哈尔滨工程大学出版社

内容简介

本书是按照“工程数学课程教学基本要求”编写的，包括复变函数与积分变换两部分内容。全书共八章，包括复数与复变函数、解析函数、复变函数的积分、级数、留数理论及其应用、保形映射、傅里叶变换、拉普拉斯变换。每章末有小结，帮助学生掌握要点，并配有课后习题供学生练习。本书叙述由浅入深，通俗易懂，例题适当，习题面广。书中加 * 号的为选讲内容。

本书可作为理工科院校非数学专业的复变函数与积分变换课程的教材或教学参考书，也可供有关科技人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

复变函数与积分变换 / 孙广毅，张晓威，赵景霞主编. —2 版. —哈尔滨：哈尔滨工程大学出版社，2017.8
ISBN 978-7-5661-1618-5

Ⅰ.①复… Ⅱ.①孙… ②张… ③赵… Ⅲ.①复变函数-高等学校-教材②积分变换-高等学校-教材 Ⅳ.①O174.5②O177.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 188550 号

选题策划 石 岭
责任编辑 马佳佳
封面设计 博鑫设计

出版发行 哈尔滨工程大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区东大直街 124 号
邮政编码 150001
发行电话 0451-82519328
传 真 0451-82519699
经 销 新华书店
印 刷 黑龙江龙江传媒有限责任公司
开 本 787 mm×960 mm 1/16
印 张 15.5
字 数 375 千字
版 次 2017 年 8 月第 2 版
印 次 2017 年 8 月第 1 次印刷
定 价 32.80 元
http://www.hrbeupress.com
E-mail:heupress@hrbeu.edu.cn

高等学校工科数学系列丛书编审委员会

（以姓氏笔画为序）

于　涛　王　锋　王晓莺　王淑娟　孙广毅
邱　威　沈　艳　沈继红　李　斌　张雨馨
张晓威　林　锰　范崇金　罗跃生　赵景霞
施久玉　贾念念　柴艳有　高振滨　凌焕章
隋　然　董衍习　樊赵兵

前　言

本书是为了适应高等教育改革发展的需要，为满足各类专业及不同层次的需求，依据“工程数学课程教学基本要求”而编写的。

复变函数与积分变换是理工科专业的一门重要的基础课程，在自然科学和各种工程领域有着广泛的应用。本书在编写过程中吸收了国内外同类教材的优点，本着能力培养和素质教育的原则，力争做到传授数学知识和培养数学素养的同时，加强学生应用能力的开发。本书在叙述时，力求由浅入深，通俗易懂，每章后附有小结，对本章内容进行简略概括总结，并配有大量习题，这些都有助于学生课后自学，并可起到帮助学生深入理解，牢固掌握的作用。本书可作为高等院校非数学类理工科各专业复变函数与积分变换课程教材或教学参考书。

本书分两部分，复变函数部分（第 1 章至第 6 章）主要介绍了复变函数论的基本理论；积分变换部分（第 7 章和第 8 章）介绍了傅里叶变换和拉普拉斯变换。与原《复变函数》教材相比，本书更注重复变函数与工科专业课程的结合，对积分变换部分的内容也进行了大量的扩充，加强了本书的实用性。

根据这几年的教学反馈，第 2 版的修正工作主要是纠正了第 1 版出现的错误；因为 1.7 节的多值函数与第 2 章的初等函数部分有重叠，所以我们把这一部分内容进行了删减；第 5 章在文字和内容上作了较大改动，强化了一些定义、定理，使内容更有调理，更适合教学；为了更方便同学们使用本教材，在第 2 版中我们给出了书后习题的答案；本书对不属于一般教学内容的部分加上 * 号，教师及同学们在可能的情况下可以选讲或参阅。

参加第 1 版编写的有国萃、葛斌、杨丽宏、陈涛、徐新军、姜劲、郑雄波、王淑娟。全书由孙广毅主编并统稿，张晓威主审，姜劲和郑雄波也做了较多的统稿和审稿工作。

第 2 版的修订由吴红梅、王珏、张雨馨、赵景霞、王淑娟完成。

本书的编写受到了哈尔滨工程大学本科教材立项的资助，得到了哈尔滨工程大学应用数学系广大教师的关心和支持，编者在此表示衷心的感谢。

由于编者水平有限，书中难免仍有不妥之处，希望广大读者给以批评指正。

编　者

2017 年 7 月

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

目　　录

第1章　复数与复变函数

本章主要学习复数的概念、性质及运算,并引入平面点集的概念,复变函数的概念及其连续与极限的概念,为以后各章的学习奠定基础.

1.1　复数及其运算

1.1.1　复数的概念

1. 复数的定义

如同实数 x 可以看成实数轴上的点一样,复数也可以看成是直角坐标系 xOy 上的点,通常由有序数对 (x,y) 定义,其中 x,y 均为实数. 这样,实数 x 就可以用实轴上的点 $(x,0)$ 表示,所以实数集合是复数集合的子集. y 轴上的点可以用复数 $(0,y)$ 来表示,当 $y\neq0$ 时,我们把这些数称为纯虚数.

复数一般用 z 来表示,记为

$$z = (x,y) \tag{1-1}$$

其中,x 称为复数 z 的实部,y 称为复数 z 的虚部,分别记为

$$x = \mathrm{Re}z,\quad y = \mathrm{Im}z \tag{1-2}$$

两个复数 $z_1=(x_1,y_1)$ 和 $z_2=(x_2,y_2)$,当且仅当它们的实部和虚部分别对应相等时,即 $x_1=x_2$ 且 $y_1=y_2$,那么这两个复数相等.

2. 复数的运算

两个复数 $z_1=(x_1,y_1)$ 和 $z_2=(x_2,y_2)$ 加法与乘法的定义如下:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \tag{1-3}$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1) \tag{1-4}$$

当限制为实数时,式(1-3)式(1-4)定义的运算就是我们熟知的加法与乘法运算,即

$$(x_1,0)+(x_2,0)=(x_1+x_2,0)$$

$$(x_1,0)\cdot(x_2,0)=(x_1\cdot x_2,0)$$

因此,我们可以说复数系统是实数系统的一个扩充.

任何复数 $z=(x,y)$ 都可以写成

$$z=(x,0)+(0,y)$$

显然有

$$(0,1)\cdot(y,0)=(0,y)$$

因此

$$z=(x,0)+(0,1)\cdot(y,0)$$

如前所述,把实数 x 看成复数 $(x,0)$,并且让 i 代表虚数 $(0,1)$,如图 1.1 所示. 所以,复数 z 通常记为

$$z = x + \mathrm{i}y \tag{1-5}$$

因此复数系统可以写为

$$C=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbf{R}\}=\{x+\mathrm{i}y\mid x,y\in\mathbf{R}\}$$

并且,利用 $z^2=z\cdot z,z^3=z\cdot z^2$ 等,我们发现

$$\mathrm{i}^2=(0,1)\cdot(0,1)=(-1,0)=-1$$

因此 $z^2=-1$ 在复数域上有解 $z=\pm\mathrm{i}$.

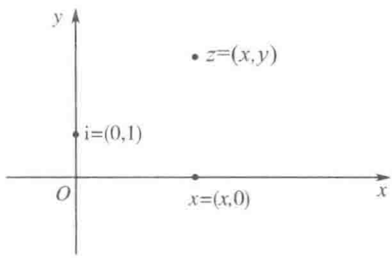

图 1.1 复平面内的点 $z(x,y)$

向量 $\boldsymbol{Oz}$ 的长度称为复数的 z 模,记为

$$r=|z|=\sqrt{x^2+y^2} \tag{1-6}$$

显然,对于任意复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 有

$$|x|\leqslant|z|,|y|\leqslant|z| \tag{1-7}$$

$$|z|\leqslant|x|+|y| \tag{1-8}$$

另外,根据向量的运算及几何知识,我们可以得到两个重要的不等式,即

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2| \tag{1-9}$$

$$|z_1-z_2|\leqslant|z_1|-|z_2| \tag{1-10}$$

如图 1.2 所示.

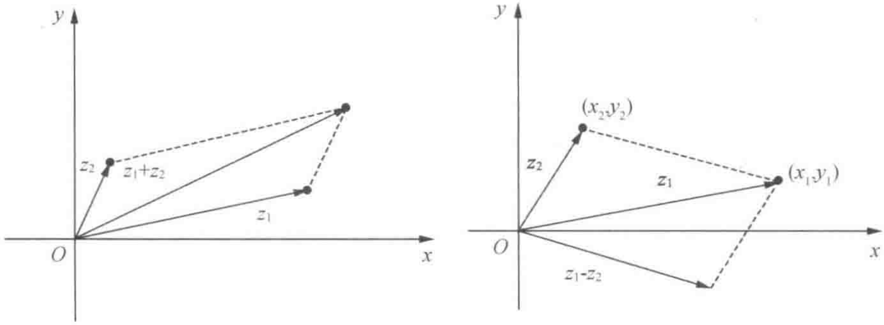

图 1.2 复数的和与差

1.1.2 复数的四则运算

利用表达式 $z=x+\mathrm{i}y$,有

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2)$$
$$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}\right) \quad (z_2 \neq 0)$$

可以变换成

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + \mathrm{i}(y_1 \pm y_2) \tag{1-11}$$
$$z_1z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + \mathrm{i}(x_1y_2 + x_2y_1) \tag{1-12}$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \mathrm{i}\,\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \quad (z_2 \neq 0) \tag{1-13}$$

显然,在进行等式左边运算时,只需把 i^2 换成 -1 就可以得到等式右边的结果.

需要特别指出的是,在复数域中复数是不能比较大小的.

容易验证复数的四则运算满足与实数四则运算相应的运算规律. 同时还可以证明,复数的四则运算也满足交换律、结合律和分配律,并且复数经过四则运算得到的仍旧是复数.

1.1.3 复数的共轭运算

实部相同而虚部互为相反数的两个复数 $x+\mathrm{i}y$ 和 $x-\mathrm{i}y$ 称为互为共轭复数,复数 z 的共轭复数用 $\bar{z}$ 表示,如果 $z=x+\mathrm{i}y$,则

$$\bar{z} = \overline{(x + \mathrm{i}y)} = x - \mathrm{i}y \tag{1-14}$$

互为共轭的两个复数关系如图 1.3 所示.

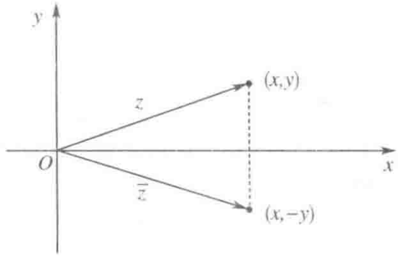

图 1.3　共轭复数

由定义可知，$\bar{\bar{z}}=z$. 特别地，实数的共轭复数还是该实数本身；反之，如果复数 z 与它的共轭复数 $\bar{z}$ 相等，则这个复数一定是一个实数.

共轭复数的性质如下：

(1) $\overline{z_1 \pm z_2}=\bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$，$\overline{z_1 \cdot z_2}=\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$，$\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}\quad (z_2\neq 0)$；

(2) $\bar{\bar{z}}=z$；

(3) $|z|=|\bar{z}|$；

(4) $|z^2|=z\cdot\bar{z}=(\mathrm{Re}z)^2+(\mathrm{Im}z)^2$；

(5) $z+\bar{z}=2\mathrm{Re}z$，$z-\bar{z}=2\mathrm{i}\mathrm{Im}z$

类似的结果也可以推广到 n 个复数的运算上.

例 1.1　化简 i^3，i^4，$\dfrac{\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}+\dfrac{1-\mathrm{i}}{\mathrm{i}}$ 和 $\dfrac{\mathrm{i}}{(\mathrm{i}-1)(\mathrm{i}-2)(\mathrm{i}-3)}$.

解　$\mathrm{i}^3=\mathrm{i}^2\cdot\mathrm{i}=-\mathrm{i}$

$$\mathrm{i}^4=\mathrm{i}^2\cdot\mathrm{i}^2=(-1)\cdot(-1)=1$$

$$\frac{\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}+\frac{1-\mathrm{i}}{\mathrm{i}}=\frac{\mathrm{i}^2+(1-\mathrm{i})^2}{(1-\mathrm{i})\cdot\mathrm{i}}=\frac{-1-2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\frac{(1-\mathrm{i})(-1-2\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=\frac{-3-\mathrm{i}}{2}$$

$$\frac{\mathrm{i}}{(\mathrm{i}-1)(\mathrm{i}-2)(\mathrm{i}-3)}=\frac{\mathrm{i}}{(1-3\mathrm{i})(\mathrm{i}-3)}=\frac{\mathrm{i}}{10\mathrm{i}}=\frac{1}{10}$$

例 1.2　设 $z_1=1+2\mathrm{i}$，$z_2=3-4\mathrm{i}$，求：

(1) $\bar{z}_1+\bar{z}_2$；　　(2) $\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$；　　(3) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}$.

解　(1) $\bar{z}_1+\bar{z}_2=\overline{1+2\mathrm{i}}+\overline{3-4\mathrm{i}}=1-2\mathrm{i}+3+4\mathrm{i}=4+2\mathrm{i}$；

(2) $\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2=(1-2\mathrm{i})\cdot(3+4\mathrm{i})=11-2\mathrm{i}$；

(3) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}=\dfrac{1-2\mathrm{i}}{3+4\mathrm{i}}=\dfrac{(1-2\mathrm{i})(3-4\mathrm{i})}{(3+4\mathrm{i})(3-4\mathrm{i})}=\dfrac{-1-2\mathrm{i}}{5}$.

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

例 1.3 已知 $x+\mathrm{i}y=(2x-1)+y^2\mathrm{i}$，求 $z=x+\mathrm{i}y$.

解 由 $x=2x-1$ 可知 $x=1$. 又由于 $y=y^2$，则 $y=1$ 或 $y=0$. 所以 $z=1$ 或 $z=1+\mathrm{i}$.

1.2 复数的几何表示

1.2.1 复平面及复数的表示法

1. 复数的点表示法

一个复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 实际上是由一对有序实数 (x,y) 唯一确定的. 因此，如果我们把平面上的点 (x,y) 与复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 对应，就建立了平面上全部的点和全体复数间的一一对应关系.

由于 x 轴上的点和 y 轴上非原点的点分别对应着实数和纯虚数，因而通常称 x 轴为实轴，称 y 轴为虚轴，这样表示复数 z 的平面称为复平面或 z 平面.

引进复平面后，我们在“数”与“点”之间建立了一一对应关系，为了方便起见，今后我们就不再区分“数”和“点”及“数集”和“点集”的概念.

2. 复数的向量表示法

复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 与复平面上的点 $z(x,y)$ 一一对应，这样复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 就与从原点 O 到点 z 所引的向量 $\boldsymbol{Oz}$ 也构成一一对应关系，如图 1.4 所示. 因此也可以用向量 $\boldsymbol{Oz}$ 来表示复数 $z=x+\mathrm{i}y$，其中 x,y 顺次等于 $\boldsymbol{Oz}$ 沿 x 轴与 y 轴的分量，如图 1.5 所示.

注：把“复数 z”与其对应的“向量 z”也视为同义词.

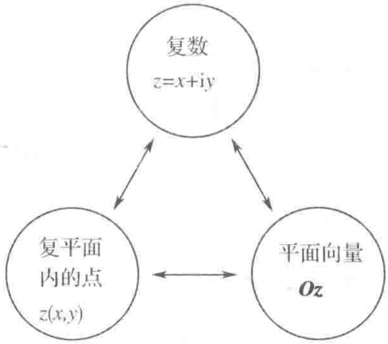

图 1.4 复数与复平面内的点，以及平面向量的对应关系

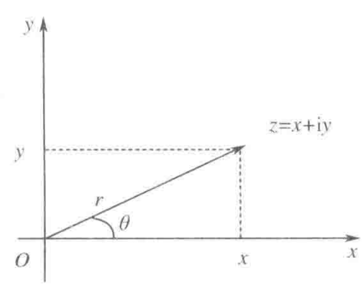

图 1.5 复数的向量表示

这样,我们在处理和复数相关的问题时,就会更具有直观性,更灵活方便.

在物理学中,如力、速度、加速度等物理量都是用向量来表示的,说明复数也可以用来表示实际的物理量.

3. 复数的三角表示法

如图 1.5 所示,首先,复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 与从原点到点 z 所引的向量 $\boldsymbol{Oz}$ 构成一一对应关系,从而,我们能够借助于点 z 的极坐标 r 和 θ 来确定点 $z=x+\mathrm{i}y$.

向量 $\boldsymbol{Oz}$ 与实轴正向的夹角 θ 满足 $\tan\theta=\dfrac{y}{x}$,称为复数 z 的辐角(Argument),记为

$$\theta=\mathrm{Arg}z$$

其满足

$$\tan(\mathrm{Arg}z)=\tan\theta=\frac{y}{x}$$

对于任一非零复数 z,均有无穷多个辐角 Arg$z$,它们彼此相差 2π 的整数倍. 可是满足条件 $-\pi<\mathrm{Arg}z\leqslant\pi$ 的辐角却只有一个,我们称该值为 Arg$z$ 的主值或 z 的辐角主值,记为 arg$z$. 于是有

$$-\pi<\arg z\leqslant\pi$$

$$\mathrm{Arg}z=\arg z+2k\pi\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)\tag{1-15}$$

值得注意的是,当 $z=0$ 时,其模为零,辐角无意义.

当 $z\neq0$ 时,其辐角主值 arg$z$ 可以由 $\arctan\dfrac{y}{x}$ 按如下关系来确定,即

$$\arg z=\begin{cases}\arctan\dfrac{y}{x}, & (x>0)\\ \dfrac{\pi}{2}, & (x=0,y>0)\\ \arctan\dfrac{y}{x}+\pi, & (x<0,y\geqslant0)\\ \arctan\dfrac{y}{x}-\pi, & (x<0,y<0)\\ -\dfrac{\pi}{2}, & (x=0,y<0)\end{cases}$$

特别地,一对共轭复数 z 和 $\bar{z}$ 在复平面的位置是关于实轴对称的,所以若 z 不在原点和负实轴上,就有

$$\arg\bar{z}=-\arg z$$

最后,通过直角坐标与极坐标的关系,我们可以用复数的模与辐角来表示非零复数 z,即有

$$z=x+\mathrm{i}y=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)\tag{1-16}$$

则称式(1－16)为非零复数 z 的三角表示式.

其中

$$\begin{cases} r=|z|=\sqrt{x^2+y^2} \\ \tan\theta=\tan(\mathrm{Arg}z)=\dfrac{y}{x} \\ x=r\cos\theta, y=r\sin\theta \end{cases}$$

4. 复数的指数表示式

在公式 $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$ 的基础上,我们引进著名的欧拉(Euler)公式,即

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\exp\{\mathrm{i}\theta\}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta \tag{1-17}$$

则 z 又可以表示为

$$z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \tag{1-18}$$

称式(1－18)为非零复数 z 的指数表示式,如图 1.6 所示.

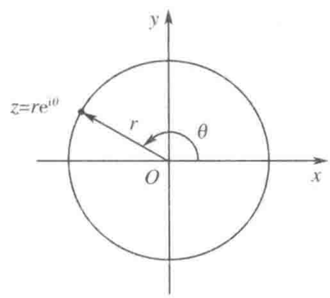

图 1.6　复数的指数表示

在 1.1 节中提过:两个复数的实部与虚部分别相等,则称两个复数相等. 由这节知识,可知两个复数相等,其模必定相等,其辐角可以相差 2π 的整数倍;反之,如果两个复数的模及辐角分别相等,则这两个复数必然相等.

例 1.4　求下列复数的模与辐角:

(1) 3;　　(2) $-\mathrm{i}$;　　(3) $-3-4\mathrm{i}$;　　(4) $\dfrac{2\mathrm{i}}{\mathrm{i}-1}$.

解　(1) $|3|=3, \arg 3=0, \mathrm{Arg}3=2k\pi \quad (k=0, \pm1, \pm2, \cdots)$.

(2) $|-\mathrm{i}|=1, \arg(-\mathrm{i})=-\dfrac{\pi}{2}, \mathrm{Arg}(-\mathrm{i})=-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi \quad (k=0, \pm1, \pm2, \cdots)$.

(3) $|-3-4\mathrm{i}|=5, \arg(-3-4\mathrm{i})=\arctan\dfrac{4}{3}-\pi, \mathrm{Arg}(-3-4\mathrm{i})=\arctan\dfrac{4}{3}+(2k-1)\pi \quad (k=0, \pm1, \pm2, \cdots)$.

(4) $\left|\dfrac{2i}{i-1}\right| = \left|\dfrac{2i(i+1)}{(i-1)(i+1)}\right| = |-i(i+1)| = |-i+1| = \sqrt{2}$,

$\arg\dfrac{2i}{i-1} = \arg(-i+1) = -\dfrac{\pi}{4}$, $\operatorname{Arg}\dfrac{2i}{i-1} = \operatorname{Arg}(-i+1) = -\dfrac{\pi}{4}+2k\pi$

$(k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$.

例 1.5 将下列复数化为三角表示式和指数表示式:

(1) $-1+\sqrt{3}i$; (2) $z=\sin\dfrac{\pi}{10}+i\cos\dfrac{\pi}{10}$.

解 (1) $|z|=\sqrt{1+3}=2$, $\arg z=\arctan\dfrac{\sqrt{3}}{-1}+\pi=\dfrac{2}{3}\pi$,因此

$$z=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)=2e^{\frac{2}{3}\pi i}$$

(2) $|z|=\sqrt{\left(\sin\dfrac{\pi}{10}\right)^2+\left(\cos\dfrac{\pi}{10}\right)^2}=1$,又

$$\sin\frac{\pi}{10}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{10}\right)=\cos\frac{2\pi}{5}, \cos\frac{\pi}{10}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{10}\right)=\sin\frac{2\pi}{5}$$

因此

$$z=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}=e^{\frac{2}{5}\pi i}$$

例 1.6 设 z_1, z_2 是两个复数,求证:

$$|z_1+z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2+2\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2)$$

证明 $$\begin{aligned}|z_1+z_2|^2 &= (z_1+z_2)\overline{(z_1+z_2)}=(z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2)\\ &= |z_1|^2+|z_2|^2+z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1 z_2=|z_1|^2+|z_2|^2+2\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2)\end{aligned}$$

1.2.2 无穷远点与复球面

前面,我们建立了复数与复平面上点一一对应的关系,下面我们借用地图制图学中的将地球投影到平面上的测地投影法,建立复平面与球面上点的对应,以此来合理地引入无穷远点(图 1.7).具体做法如下:

(1) 取一个在原点 O 与复平面相切的球面.

(2) 过原点作一条垂直于复平面的直线与球面交于另一点 N,N 称为北极,原点 O 记为点 S,S 称为南极.

(3) 在复平面上任取一点 z,将 N 与复平面上的一点 z 相连,此线段交球面于 P. 这样,球面上(不包括北极 N)的点与复平面上的点就建立了一一对应的关系.

(4) 北极 N 可以看成与复平面上一个模为无穷大的假想点相对应,这个假想点称为无穷

远点,并记为∞.

(5) 复平面加上点∞后称为扩充复平面,与它对应的就是整个球面,称为复球面.

值得注意的是,复平面上的无穷远点是一个点,它与微积分中的∞是不同的概念.我们这里的无穷远点∞,它的实部、虚部与辐角都没有意义,我们规定它的模是正无穷,即

$$|\infty| = +\infty$$

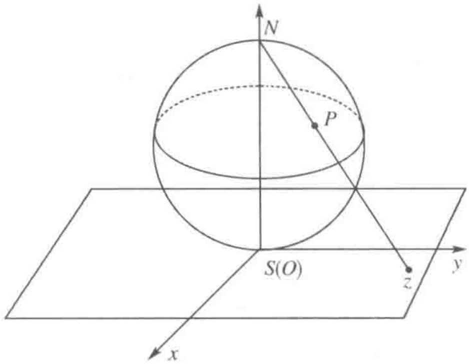

图 1.7 复平面与球面上点的对应

显然,复平面上的每一条线都经过无穷远点.关于数∞的四则运算规定如下:

(1) $\infty \pm \infty, 0 \cdot \infty, \dfrac{\infty}{\infty}, \dfrac{0}{0}$无意义;

(2) $\infty \pm a = a \pm \infty = \infty$;

(3) 当 $a \neq 0$ 时,$a \cdot \infty = \infty \cdot a = \infty \cdot \infty = \infty, \dfrac{a}{0} = \infty, \dfrac{\infty}{a} = \infty$.

1.3 复数的乘幂与方根

1.3.1 复数的乘积与商

由欧拉(Euler)公式,$e^{i\theta} = \exp\{i\theta\} = \cos\theta + i\sin\theta$,容易验证

$$\begin{aligned}
e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} &= (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \cdot (\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\
&= (\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2) \\
&= \cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2) \\
&= e^{i(\theta_1 + \theta_2)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}}&=\frac{\cos\theta_1+i\sin\theta_1}{\cos\theta_2+i\sin\theta_2}=\frac{(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\cdot(\cos\theta_2-i\sin\theta_2)}{(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)\cdot(\cos\theta_2-i\sin\theta_2)}\\&=(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\cdot(\cos\theta_2-i\sin\theta_2)\\&=\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)\\&=e^{i(\theta_1-\theta_2)}\end{aligned}$$

因此,利用复数 z 的指数表示式即可得到复数的乘除,有

$$z_1z_2=r_1e^{i\theta_1}r_2e^{i\theta_2}=r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1e^{i\theta_1}}{r_2e^{i\theta_2}}=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}\quad(z_2\neq0)$$

于是有

$$|z_1z_2|=|z_1||z_2|,\quad\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}\quad(z_2\neq0)$$

$$\mathrm{Arg}(z_1z_2)=\mathrm{Arg}z_1+\mathrm{Arg}z_2\tag{1-19}$$

$$\mathrm{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\mathrm{Arg}z_1-\mathrm{Arg}z_2\tag{1-20}$$

如图 1. 8 所示.

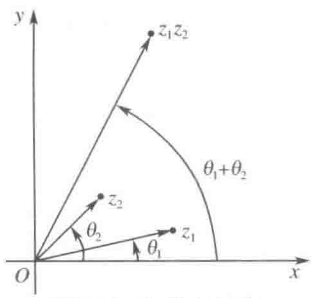

图 1.8　复数的乘积

由于辐角的多值性,等式的两端均表示由无穷多个数(角度)构成的数集,因此式(1－19)和式(1－20)应理解为等式两端可能取值的全体是相同的.

特别当 $|z_2|=1$ 时可得 $z_1z_2=r_1e^{i(\theta_1+\theta_2)}$,此即说明单位复数($|z_2|=1$)乘任何数,几何上相当于将此数所对应的向量逆时针旋转一个角度 $\mathrm{Arg}z_2$.

例 1.7　已知正三角形的两个顶点为 $z_1=1$ 和 $z_2=2+i$,求它的另一个顶点.

解　将向量 z_2-z_1 逆时针旋转$\frac{\pi}{3}$或$-\frac{\pi}{3}$后得到的向量 z_3-z_1 或 $z_3'-z_1$ 的终点即为所求.根据复数乘法,有

$$z_3-z_1=\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)(z_2-z_1)$$

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com