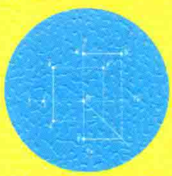
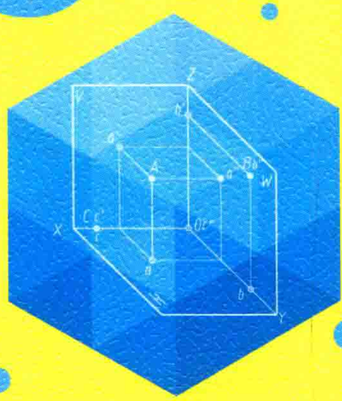
高等数学

习题解析（下）

程晓亮　张　平　主　编
张国芳　冯志新　副主编





清华大学出版社

高等数学习题解析

（下）

程晓亮　张　平　主　编
张国芳　冯志新　副主编

清华大学出版社
北　京

内容简介

本书是高等院校数学课程《高等数学(下)》(ISBN：978-7-302-47530-9)一书相配套的习题解析。本书严格按照配套教材的章节的顺序，以节为单位进行编写。每小节内容有知识点概括和习题解答。知识点概括精炼、全面，帮助学生加深教材所学知识，明确学习重点和难点。习题解答对较难的习题给出题前分析、详尽的解答步骤和题后注释，还对某些典型题的分析方法和技巧作了详细说明，切实帮助学生检验教材内容的掌握程度，查漏补缺。本书期望能够通过知识点概括帮助学生理清知识的脉络，加深读者对新知识的理解和掌握；通过习题解答为学生提供分析问题和解决问题的方法，从而更好地学习高等数学的基本知识和理论，掌握相应的方法和技巧。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学习题解析．下／程晓亮，张平　主编．—北京：清华大学出版社，2018
ISBN 978-7-302-47577-4

Ⅰ．①高…　Ⅱ．①程…　②张…　Ⅲ．①高等数学—高等学校—解题　Ⅳ．①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 150776 号

责任编辑：王　定　程　琪
封面设计：周晓亮
版式设计：思创景点
责任校对：曹　阳
责任印制：沈　露

出版发行：清华大学出版社
网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地　　址：北京清华大学学研大厦 A 座　　邮　　编：100084
社 总 机：010-62770175　　邮　　购：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：北京密云胶印厂
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×260mm　　印　　张：11　　字　　数：240 千字
版　　次：2018 年 1 月第 1 版　　印　　次：2018 年 1 月第 1 次印刷
印　　数：1～3000
定　　价：45.00 元

产品编号：071018-01

前　言

"高等数学"是高等院校的一门重要的基础理论课程。为了适应普通高等院校学生学习高等数学课程的需要，我们参照《高等数学课程教学基本要求》，并结合多年的教学实践和经验，精心组织编写了本套教材和相应的习题解析。

本套教材在编写过程中，力求结构严谨、逻辑清晰，尽可能以通俗易懂的语言介绍"高等数学"课程中最为基础的，也是最主要的知识点。同时也注重体现时代的特点，吸收了国内外同类教材的精华，本着打好基础、够用为度、服务专业、学以致用的原则，重视理论产生、发展及演变，加强应用，力争做到科学性、系统性和可行性的统一，使传授数学知识和培养数学素养得到较好的结合。期望读者通过学习能在较短时间内掌握"高等数学"课程的基本概念、基本原理、基本技能和基本方法，从而为学习其他基础课程和专业课程打下必要的基础。

本套教材包括如下书目：

《高等数学（上）》	ISBN：978-7-302-47529-3	定价：45.00 元
《高等数学习题解析（上）》	ISBN：978-7-302-47810-2	定价：45.00 元
《高等数学（下）》	ISBN：978-7-302-47530-9	定价：45.00 元
《高等数学习题解析（下）》	ISBN：978-7-302-47577-4	定价：45.00 元

本书是高等院校数学课程《高等数学（下）》（ISBN：978-7-302-47530-9）一书相配套的习题解析，严格按照配套教材的章节的顺序，以节为单位进行编写。每小节内容有知识点概括和习题解答。知识点概括精炼、全面，帮助学生加深教材所学知识，明确学习重点和难点。习题解答对较难的习题给出题前分析、详尽的解答步骤和题后注释，还对某些典型题的分析方法和技巧作了详细说明，切实帮助学生检验教材内容的掌握程度，查漏补缺。本书期望能够通过知识点概括帮助学生理清知识的脉络，加深读者对新知识的理解和掌握；通过分析解答为学生提供分析问题和解决问题的方法，从而更好地学习高等数学的基本知识和理论、掌握相应的方法和技巧。

本书可以作为普通高等院校各专业基础课程"高等数学"的学习辅助材料，以及其他数学教育工作者的参考资料。

由于编者水平有限，书中难免有不妥之处，恳请同行、专家及读者指正。

编著者

2017 年 8 月

目　录

第1章 空间解析几何初步

空间解析几何与平面解析几何的思想方法类似，都是利用代数方法研究几何问题，其重要的工具是向量代数．平面解析几何的基本对象是直线与曲线，空间解析几何的基本对象是平面和直线，以及几种特殊的曲面和曲线．这些内容对学习多元函数微积分将起到重要的作用．

1.1 向量及线性运算

1.1.1 知识点概况

1. 向量的概念

(1) 既有大小又有方向的量叫做向量，记作 $\boldsymbol{a}$，向量的大小叫做向量的模，记作 $|\boldsymbol{a}|$．

(2) 非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与三个坐标轴的夹角称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向角．方向角的余弦值称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦．

若非零向量 $\boldsymbol{a}=(x_1, y_1, z_1)$ 的方向角为 α，β，γ，则其方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{x_1}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}},$$

$$\cos\beta=\frac{y_1}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{y_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{z_1}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{z_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}},$$

且

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

2. 向量的线性运算

(1) 向量的加法：对向量 $\boldsymbol{a}$，b，从同一起点 O 作有向线段$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$分别表示 $\boldsymbol{a}$ 与 b，然后以$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$为邻边作平行四边形 $OACB$，则把平行四边形的对角线向量$\overrightarrow{OC}$称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

(2) 向量的减法：当向量 $\boldsymbol{b}$ 与向量 $\boldsymbol{c}$ 的和等于向量 $\boldsymbol{a}$，即 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}$ 时，我们把向量 $\boldsymbol{c}$ 叫做 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差，并记作 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

(3) 数乘：实数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积是一个向量，记作 $\lambda\boldsymbol{a}$. 其模是 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$. $\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向：当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向；当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向；当 $\lambda=0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$. 我们把这种运算叫做数量与向量的乘法，简称数乘.

3. 向量的位置关系

(1) 两向量的夹角：非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，从同一起点 O 作有向线段$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$分别表示 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，把由射线 OA 和 OB 构成的角度在$[0, \pi]$的角称为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角，记作$\langle\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle$.

(2) 两向量共线：平行于同一直线的一组向量叫做共线向量. 零向量与任何共线的向量组共线.

(3) 三向量共面：平行于同一平面的一组向量，叫做共面向量. 零向量与任何共线的向量组共面.

4. 空间直角坐标系

(1) 建立：过空间一点 O，作三条两两互相垂直的数轴 x 轴、y 轴和 z 轴，这样就构成了空间直角坐标系，记作 $O-xyz$.

(2) 向量的坐标表示：若 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 分别是 x 轴、y 轴、z 轴上与坐标轴同向的单位向量，且 $\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$. 我们把 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 系数组成的有序数组(x, y, z)叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 的直角坐标.

(3) 两点之间的距离：设 $M(x_1, y_1, z_1)$，$N(x_2, y_2, z_2)$为空间两点，则得到空间两点 M 与 N 之间的距离公式：

$$d=|\overrightarrow{MN}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

(4) 线性运算的坐标表示：向量 $\boldsymbol{a}=(x_1, y_1, z_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2, y_2, z_2)$，则

$$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=(x_1\pm x_2, y_1\pm y_2, z_1\pm z_2),$$

$$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1).$$

1.1.2 习题解答

1. 设向量 $\boldsymbol{u}=2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}+5\boldsymbol{c}$，试用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 表示 $3\boldsymbol{u}-4\boldsymbol{v}$.

解：$3\boldsymbol{u}-4\boldsymbol{v}=3\cdot(2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})-4\cdot(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}+5\boldsymbol{c})$

$=2\boldsymbol{a}+17\boldsymbol{b}-23\boldsymbol{c}$.

2. 在空间直角坐标系中，指出下列各点在哪个卦限：

$A(1,-1,1)$，$B(1,1,-1)$，$C(1,-1,-1)$，$D(-1,-1,1)$.

解：A 在第四卦限，B 在第五卦限，C 在第八卦限，D 在第三卦限.

3. 求证：以 $M_1(4,3,1)$，$M_2(7,1,2)$，$M_3(5,2,3)$三点为顶点的三角形是一个等腰三角形.

证明：$|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(7-4)^2+(1-3)^2+(2-1)^2}=\sqrt{14}$，

$|\overrightarrow{M_1M_3}|=\sqrt{(5-4)^2+(2-3)^2+(3-1)^2}=\sqrt{6}$，

$|\overrightarrow{M_2M_3}|=\sqrt{(5-7)^2+(2-1)^2+(3-2)^2}=\sqrt{6}$，

$|\overrightarrow{M_1M_3}|=|\overrightarrow{M_2M_3}|$，

故为等腰三角形.

4. 在平行四边形 $ABCD$ 中，设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，$M$ 为对角线 AC 与 BD 的交点，试用向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 表示向量$\overrightarrow{MA}$，$\overrightarrow{MC}$，$\overrightarrow{MB}$，$\overrightarrow{MD}$.

解：$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AC}$，

$\overrightarrow{MC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{2}$，$\overrightarrow{MA}=-\frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{2}$，

$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\overrightarrow{DB}$，

$\overrightarrow{MB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}=\frac{\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}}{2}$，$\overrightarrow{MD}=-\frac{\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}}{2}$.

5. 求点 $P(2,-5,4)$到原点及各坐标轴和各坐标面的距离.

解：$|\overrightarrow{PO}|=\sqrt{(2-0)^2+(-5-0)^2+(4-0)^2}=3\sqrt{5}$.

P 在 x 轴上的投影为 2，P 到 x 轴的距离即 P 与$(2,0,0)$的距离，即

$\sqrt{(2-2)^2+(-5-0)^2+(4-0)^2}=\sqrt{41}$.

同理，P 到 y 轴的距离为$\sqrt{(2-0)^2+(-5-(-5))^2+(4-0)^2}=2\sqrt{5}$.

P 到 z 轴的距离为$\sqrt{(2-0)^2+(-5-0)^2+(4-4)^2}=\sqrt{29}$.

P 到 xOy 平面的距离为 4，P 到 xOz 平面的距离为 5，P 到 yOz 平面的距离为 2.

6. 在 yOz 平面上，求与三个已知点(3, 1, 2), (4, −2, −2), (0, 5, 1)等距离的点．

解：设点为(x, y, z)，已知点在 yOz 平面上，故 $x=0$，点为$(0, y, z)$，故

$$\begin{cases}\sqrt{(3-0)^2+(1-y)^2+(2-z)^2}=\sqrt{(4-0)^2+(-2-y)^2+(-2-z)^2}\\ \sqrt{(3-0)^2+(1-y)^2+(2-z)^2}=\sqrt{(0-0)^2+(5-y)^2+(1-z)^2}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}10+6y+8z=0\\ 12-8y+2z=0\end{cases},$$

解得 $y=1$，$z=-2$，故点为$(0, 1, -2)$.

7. 设点 P 在 x 轴上，它到点 $P_1(0, \sqrt{2}, 3)$的距离为到点 $P_2(0, 1, -1)$的距离的两倍，求点 P 的坐标．

解：因为点 P 在 x 轴上，故可设点 P 的坐标为$(x, 0, 0)$，则

$|\overrightarrow{PP_1}|=\sqrt{x^2+(\sqrt{2})^2+3^2}=\sqrt{x^2+11}$,

$|\overrightarrow{PP_2}|=\sqrt{x^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{x^2+2}$.

由于$|\overrightarrow{PP_1}|=2|\overrightarrow{PP_2}|$，即 $\sqrt{x^2+11}=2\sqrt{x^2+2}$，解得 $x=\pm1$，从而所求点 P 的坐标为$(1, 0, 0)$或$(-1, 0, 0)$.

8. 已知两点 $M_1(0, 1, 2)$和 $M_2(1, -1, 0)$，试用坐标表示向量$\overrightarrow{M_1M_2}$及$-2\overrightarrow{M_1M_2}$.

解：$\overrightarrow{M_1M_2}=(1-0, -1-1, 0-2)=(1, -2, -2)$,

$-2\overrightarrow{M_1M_2}=-2(1, -2, -2)=(-2, 4, 4)$.

9. 设 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$，求：(1)$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，(2)$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，(3)$2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$.

解：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{k}$,

$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}$,

$2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}=-4\boldsymbol{i}+10\boldsymbol{k}-3\boldsymbol{k}$.

10. 求平行于向量 $\boldsymbol{a}=(1, 1, 1)$的单位向量．

解：$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}$,

$\boldsymbol{e}_a=\pm\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$.

11. 求 λ 使向量 $\boldsymbol{a}=(\lambda, 1, 5)$与向量 $\boldsymbol{b}=(2, 10, 50)$平行．

解：$\dfrac{\lambda}{2}=\dfrac{1}{10}=\dfrac{5}{50}$，故 $\lambda=\dfrac{1}{5}$.

12. 设点 $A(1, -1, 2)$，$B(4, 1, 3)$，求：

（1）$\overrightarrow{AB}$在三个坐标轴上的坐标和分向量；

（2）$\overrightarrow{AB}$的方向余弦．

解：$\overrightarrow{AB}=(3,2,1)$，在三个坐标轴上的坐标分别为 3，2，1，分向量分别为

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{3^2+2^2+1^2}=\sqrt{14}$，$\cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{14}}$，$\cos\beta=\frac{2}{\sqrt{14}}$，$\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{14}}$.

13. 已知两点 $A(2,\sqrt{2},5)$，$B(3,0,4)$，求向量$\overrightarrow{AB}$的模、方向余弦和方向角．

解：$\overrightarrow{AB}=(1,-\sqrt{2},-1)$，$\overrightarrow{AB}$的模为$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{1^2+(-\sqrt{2})^2+(-1)^2}=2$.

方向余弦为 $\cos\alpha=\frac{1}{2}$，$\cos\beta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\cos\gamma=-\frac{1}{2}$.

方向角为 $\alpha=\frac{\pi}{3}$，$\beta=\frac{3\pi}{4}$，$\gamma=\frac{2\pi}{3}$.

14. 设向量的方向角为 α，β，γ，若已知 $\alpha=\frac{\pi}{3}$，$\beta=\frac{2\pi}{3}$，求 γ.

解：$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$，

$\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cos^2\gamma=1$，

解得：$\cos\gamma=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\gamma=\frac{\pi}{4}$或$\frac{3\pi}{4}$.

15. 设向量的方向余弦分别满足：(1)$\cos\alpha=0$；(2)$\cos\beta=1$；(3)$\cos\alpha=\cos\beta=0$.
问这些向量与坐标轴或坐标面的关系如何？

解：(1) 垂直于 x 轴，平行于 yOz 平面；

(2) 平行于 y 轴，垂直于 xOz 平面；

(3) 平行于 z 轴，垂直于 xOy 平面．

16. 设 $M_1(1,-2,-3)$，$M_2(2,-4,-1)$，求与$\overrightarrow{M_1M_2}$平行的单位向量．

解：$\overrightarrow{M_1M_2}=(1,-2,2)$，

$|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}=3$，

$\boldsymbol{e}_{\overrightarrow{M_1M_2}}=\pm\left(\frac{1}{3},-\frac{3}{2},\frac{2}{3}\right)$.

17. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(-1,3,2)$，$\boldsymbol{b}=(2,5,-1)$，$\boldsymbol{c}=(6,4,-6)$，证明 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 平行．

解：$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(-3,-2,3)$，

$\frac{-3}{6}=\frac{-2}{4}=\frac{3}{-6}-=-\frac{1}{2}$，

对应坐标成比例，故平行.

18. 设向量 $\boldsymbol{r}$ 的模是 4，它与 u 轴的夹角是$\frac{\pi}{3}$，求 $\boldsymbol{r}$ 在 u 轴上的投影.

解： $4\times\cos\frac{\pi}{3}=2$，投影为 2.

1.2　数量积与向量积

1.2.1　知识点概况

1. 数量积

(1) 定义：设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 是两个向量，则数量 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积(也称内积或点积)，记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，读作"$\boldsymbol{a}$ 点乘 $\boldsymbol{b}$"，即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle.$$

(2) 坐标运算：在空间直角坐标系下，设

$$\boldsymbol{a}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k}=(x_1,y_1,z_1),\ \boldsymbol{b}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}=(x_2,y_2,z_2),$$

则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$.

(3) 运算律：对于任意向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 及任意实数 λ，有

① 交换律：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$;

② 分配律：$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$;

③ 关于数因子的结合律：$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})$.

2. 向量积

(1) 定义：两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$（夹角为 θ）的向量积(也称外积或叉积)是一个向量，记作 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，读作"$\boldsymbol{a}$ 叉乘 $\boldsymbol{b}$"，其模为

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta.$$

其方向与 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 均垂直，且按 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 这个顺序构成右手系.

其模的几何意义是以 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积.

(2) 坐标运算：在空间直角坐标系下，设

$\boldsymbol{a}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k}=(x_1,y_1,z_1)$,

$\boldsymbol{b}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}=(x_2,y_2,z_2)$,

则 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}y_1&z_1\\y_2&z_2\end{vmatrix}\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix}x_1&z_1\\x_2&z_2\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\end{vmatrix}\boldsymbol{k}$ 或 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{vmatrix}$.

(3) 运算律：对任意向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 及任意实数 λ，有

① 反交换律：$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$；

② 分配律：$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$，$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$；

③ 与数乘的结合律：$(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})$.

3. 向量的位置关系的判定

(1) 两向量垂直的判定：设 $\boldsymbol{a}=(x_1, y_1, z_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2, y_2, z_2)$，则

$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0$.

(2) 两向量平行的判定：设非零向量 $\boldsymbol{a}=(x_1, y_1, z_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2, y_2, z_2)$，则

$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow$ 存在实数 λ，使 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$

$$\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$$

$$\Leftrightarrow\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}.$$

(3) 三向量共面的判定：向量 $\boldsymbol{a}=(x_1, y_1, z_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2, y_2, z_2)$，$\boldsymbol{c}=(x_3, y_3, z_3)$，则

$$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\text{ 共面}\Leftrightarrow(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}=0.$$

4. 两向量的夹角公式：向量 $\boldsymbol{a}=(x_1, y_1, z_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2, y_2, z_2)$，则

$$\cos\langle\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\times\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}.$$

1.2.2 习题解答

1. 已知 $\boldsymbol{a}=(1, 0, 0)$，$\boldsymbol{b}=(0, 1, 0)$，$\boldsymbol{c}=(0, 0, 1)$，求：

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$；(2) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$.

解：(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=0$，$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=0$.

(2) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}=-\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}$.

2. 已知 $\boldsymbol{a}=(1, 0, 0)$，$\boldsymbol{b}=(2, 2, 1)$，求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 及 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角余弦.

解：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1\times2+0\times2+0\times1=2$，

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & 0 & 0\\ 2 & 2 & 1\end{vmatrix}=(0, -1, 2),$$

可计算：$|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=3$，$\cos\theta=\frac{2}{3}$.

3. 计算：(1)$(2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j})\cdot\boldsymbol{j}$；(2)$(2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{k}$；(3)$(\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j})\cdot\boldsymbol{i}$.

解：(1)$(2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j})\cdot\boldsymbol{j}=2\times0+(-1)\times1+0\times0=-1$；

(2)$(2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{k}=2\times0+3\times0+4\times1=4$；

(3)$(\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j})\cdot\boldsymbol{i}=1\times1+5\times0+0\times0=1$.

4. 设 $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=7\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$，计算：

(1)$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 及 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$；(2)$(-2\boldsymbol{a})\cdot3\boldsymbol{b}$ 及 $\boldsymbol{a}\times2\boldsymbol{b}$；(3)$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的夹角余弦 .

解：(1)$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(-1)\times7+2\times2+5\times(-1)=-8$；

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\-1&2&5\\7&2&-1\end{vmatrix}=(-12,34,-16).$$

(2)$-2\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-10\boldsymbol{k}$，$3\boldsymbol{b}=21\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$，

$(-2\boldsymbol{a})\cdot3\boldsymbol{b}=2\times21+(-4)\times6+(-10)\times(-3)=48$；

$$\boldsymbol{a}\times2\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\-1&2&5\\14&4&-2\end{vmatrix}=-24\boldsymbol{i}+68\boldsymbol{j}-32\boldsymbol{k}.$$

(3)$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{30}$，$|\boldsymbol{b}|=3\sqrt{6}$，

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\frac{-8}{\sqrt{30}\times3\sqrt{6}}=-\frac{4}{9\sqrt{5}}.$$

5. 已知点 $A(-1,2,3)$，$B(1,2,1)$，$C(0,0,3)$，求$\angle ABC$.

解：$\overrightarrow{BC}=(0-1,0-2,3-1)=(-1,-2,2)$，$|\overrightarrow{BC}|=3$，

$\overrightarrow{BA}=(-1-1,2-2,3-1)=(-2,0,2)$，$|\overrightarrow{BA}|=2\sqrt{2}$，

$$\cos\angle ABC=\frac{\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}}{|\overrightarrow{BC}|\cdot|\overrightarrow{BA}|}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

6. 求点 $M(1,\sqrt{2},1)$的向径$\overrightarrow{OM}$与坐标轴之间的夹角 .

解：$\overrightarrow{OM}=(1,\sqrt{2},1)$，$|\overrightarrow{OM}|=2$，$\boldsymbol{e}_{\overrightarrow{OM}}=\frac{1}{2}(1,\sqrt{2},1)$.

故 $\cos\alpha=\frac{1}{2}$，$\cos\beta=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\cos\gamma=\frac{1}{2}$.

所以夹角分别为 $\alpha=\frac{\pi}{3}$，$\beta=\frac{\pi}{4}$，$\gamma=\frac{\pi}{3}$.

7. 验证 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$ 与 $\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$ 垂直.

证明： $1\times2+3\times(-1)+(-1)\times(-1)=0$，故垂直.

8. 已知 $M_1(1,-1,2)$，$M_2(3,3,1)$，$M_3(3,1,3)$，求与 $\overrightarrow{M_1M_2}$，$\overrightarrow{M_2M_3}$ 同时垂直的单位向量.

解： $\overrightarrow{M_1M_2}=(2,4,-1)$，$\overrightarrow{M_2M_3}=(0,-2,2)$，

$$\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_2M_3}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 2 & 4 & -1\\ 0 & -2 & 2\end{vmatrix}=6\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}.$$

所以，所求向量为 $\frac{(6,-4,-4)}{\sqrt{6^2+(-4)^2+(-4)^2}}=\frac{\sqrt{17}}{17}(3,-2,-2)$.

9. 求同时垂直于向量 $\boldsymbol{a}=(-3,6,8)$ 和 y 轴的单位向量.

解： 设所求向量为 (a,b,c)，则依题意有：

$(-3)\cdot a+6\cdot b+8\cdot c=0$，$a\cdot0+b\cdot1+c\cdot0=0$，得 $b=0$，$a=\frac{8c}{3}$.

又因所求为单位向量，故模为 1，有 $\sqrt{\left(\frac{8c}{3}\right)^2+c^2}=1$，解得 $c=\frac{3}{\sqrt{73}}$.

所求向量为 $\left(\frac{8}{\sqrt{73}},0,\frac{3}{\sqrt{73}}\right)$.

10. 已知 $|\boldsymbol{a}|=5$，$|\boldsymbol{b}|=2$，$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\pi}{3}$，求 $\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$ 的模.

解：
$$\begin{aligned}|2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}|^2&=(2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})\\&=|2\boldsymbol{a}|^2+|3\boldsymbol{b}|^2+2\cdot|2\boldsymbol{a}|\cdot|3\boldsymbol{b}|\cdot\cos\frac{\pi}{3}=196,\end{aligned}$$

故 $|2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}|=14$.

11. 求以点 $A(1,2,3)$，$B(3,4,5)$，$C(2,4,7)$ 为顶点的三角形的面积.

解： $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sin\angle A=\frac{1}{2}\cdot|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$.

由于 $\overrightarrow{AB}=(2,2,2)$，$\overrightarrow{AC}=(1,2,4)$，

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 2 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 4\end{vmatrix}=4\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k},$$

于是 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|4\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}|=\frac{1}{2}\sqrt{4^2+(-6)^2+2^2}=\sqrt{14}$.

12. 设向量 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$，计算 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，并计算以 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积．

解：$S=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$，故 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & 2 & -1\\ 0 & 2 & 3\end{vmatrix}=8\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$，

$S=|8\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}|=\sqrt{8^2+(-3)^2+2^2}=\sqrt{77}$.

13. 用向量方法证明三角形的正弦定理：$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$.

证明：设 $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$，且 $|\boldsymbol{a}|=a$，$|\boldsymbol{b}|=b$，$|\boldsymbol{c}|=c$，知 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，从而 $\boldsymbol{c}=-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$，因此，

$$\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}=-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}.$$

同理可得 $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，所以

$$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}.$$

故 $|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$，即 $bc\sin A=ca\sin B=ab\sin C$，于是

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

14. 求与向量 $\boldsymbol{a}=(2,-1,2)$ 共线且满足 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-18$ 的向量 $\boldsymbol{b}$.

解：依题意可设向量 $\boldsymbol{b}$ 为 $(2\lambda,-\lambda,2\lambda)$，故

$2\cdot 2\lambda+(-1)\cdot(-\lambda)+2\cdot 2\lambda=-18$，解得 $\lambda=-2$.

所求向量为 $\boldsymbol{b}=(-4,2,-4)$.