财 政 部 规 划 教 材
“十三五”普通高等教育规划教材

白淑敏 崔红卫 主 编

概率论与数理统计

GAILüLUN YU SHULI TONGJI

中国财经出版传媒集团
中国财政经济出版社

财政部规划教材
“十三五”普通高等教育规划教材

概率论与数理统计

主　编　白淑敏　崔红卫
副主编　王合玲

中国财经出版传媒集团
中国财政经济出版社

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计/白淑敏，崔红卫主编.—北京：中国财政经济出版社，2016.8（2017.6重印）

财政部规划教材　“十三五”普通高等教育规划教材

ISBN 978-7-5095-6876-7

Ⅰ.①概…　Ⅱ.①白…②崔…　Ⅲ.①概率论—高等学校—教材②数理统计—高等学校—教材　Ⅳ.①O21

中国版本图书馆CIP数据核字（2016）第166693号

责任编辑：王　芳　王晓敏　　　　责任校对：李　静

封面设计：赫　健　　　　　　　　版式设计：王志强

中国财经出版传媒集团
中国财政经济出版社 出版

URL：http：//www.cfeph.cn

E-mail：jiaoyu@cfeph.cn

社址：北京市海淀区阜成路甲28号　邮政编码：100142

营销中心电话：010-82333010　编辑部门电话：010-88190670

北京时捷印刷有限公司印刷　各地新华书店经销

787×960毫米　16开　15印张　334 000字

2016年8月第1版　2017年6月北京第3次印刷

定价：32.00元

ISBN 978-7-5095-6876-7/O·0051

（图书出现印装问题，本社负责调换）

本社质量投诉电话：010-88190744

打击盗版举报热线：010-88190414、QQ：447268889

经济应用基础数学系列精品教材

概率论与数理统计编委会

前　　言

概率论与数理统计是研究和揭示随机现象的数量特征及其统计规律性的一门学科.在经济管理及决策分析中,大量的问题都具有一定的不确定性,即所谓随机性,因此,对于经济管理类各专业的本科学生来说,掌握概率论与数理统计的知识是十分必要的.同时,概率论与数理统计这门课程也是学生学习金融、财经等理论的基础课程.

本书依据经济管理类各专业对概率论与数理统计课程的教学要求并结合作者多年来在财经类大学数学教学实践中积累的经验而编写.在该教材的编写中,作者自始至终贯彻大纲所要求的与学生实际相结合,抽象概念与直观描述相结合的基本思想.在内容的选取上,作者力求内容全面、深广适中,同时参考了近年来经济管理类硕士研究生入学考试数学考试大纲的要求.考虑到经济管理类数学课程的要求与特点,本书仅以普通的微积分和少量的线性代数知识为基础,更加注重有关概率和数理统计的基本概念、基本理论和基本方法的阐释,而相对削减了一些定理的详细证明和某些性质的冗长推导.同时,在符合教学大纲规定的内容和学时要求的前提下,书中尽可能多地在例题的选取和习题的配备上体现概率论与数理统计知识在经济管理方面的应用.

本书配备习题的原则是由浅入深、层次分明、题型全面,旨在培养学生的理解能力和应用能力.为此,在每节后面,配有一定数量的习题;在每章后面还配有一定数量的综合习题,以供教师和学生选用.书末给出了习题参考答案,供教师和学生参考.另外,本教材配有《概率论与数理统计学习指导》以及电子课件,供教师教学与学生学习参考使用.

为了满足不同的需要,我们把书中部分内容标注*号,教师可根据各学校所给定的课时数对这些内容进行取舍,在教学中跳过这些内容,不影响本书的体系.

本书由白淑敏、崔红卫担任主编,王合玲担任副主编,向开理、涂晓青、朱文莉、吴曦、邵荣霞、杨冰、代红霞、方敏、苏远琳、刘忻梅、陈鲁夫、崔嘉瑛、陈嘉璐、熊明辉、张紫莎等老师参与了编写工作.

感谢西南财经大学经济数学学院和中国财政经济出版社对本教材出版的关心和支持,他们为本书的出版付出了辛勤劳动并提出了许多宝贵意见.由于水平所限,书中不妥或错误之处在所难免,恳请广大读者批评指正.

编　者

2016 年 6 月

目　　录

第一章

probability & statistics

随机事件及其概率

概率是什么?其实概率并不陌生,它与我们日常生活是分不开的,我们说话通常带的某些词语,如“大概”、“可能”、“也许”等就具备概率意义,因为将这些词进一步量化说明我们是用百分比来回答的.如掷一枚硬币,其出现正面与反面的可能性有多大呢?大家都会说,可能是50%.由于此方法显示出公平性,故人们经常用掷硬币的方法打赌.实际上掷一枚硬币其正、反面出现的概率均为50%.为了给出概率及概率论严格的定义,我们首先必须了解自然界现象的分类.

在客观世界和人类的生活、生产实践中,人们发现有许多现象在一定的条件下或者一定发生,或者一定不发生.例如,长为a、宽为b的矩形,其面积就是$a\times b$;在没有外力作用下,作匀速直线运动的物体必将继续作匀速直线运动;在标准大气压下,水加热到100 ℃时必然会沸腾,若只加热到80 ℃,则沸腾现象绝不可能发生.这些现象,我们称之为**确定性现象**或**必然现象**.

在自然界和社会生活中,也广泛存在着与确定性现象有着本质区别的另一类现象,即所谓**随机现象**或**非确定现象**.这种现象的特点是,在一定条件下,可能出现多种不同的结果,而究竟出现哪一种结果,事先又不能完全确定.比如,掷一枚硬币,事先无法断言它是正面朝上还是反面朝上;又如,下一个交易日的上海证券交易所综合指数可能比上一个交易日的高些,也可能低些;在抽样检查产品质量时,如果任意从被检产品中抽取100件,那么其中的次品可能有5件,可能有10件,也可能只有1件;再如,某保险公司的年保费收入既可以大于年赔付额,也可以是小于年赔付额,等等.

随机现象的这种不确定性是否表明随机现象就完全杂乱无章、不可捉摸呢?人们经过长期的实践和研究发现,如果重复地进行大量的观察或实验,任何随机现象都会呈现出一定的规律性,我们称之为**统计规律性**.

概率论与数理统计,就是揭示和研究随机现象的统计规律性的一门学科,它是近代数学的一个重要分支,它起源于17世纪,发展到现在,已深入到各个科学领域.它是研究自然现象,同时也是我们探讨与研究经济问题的重要数学工具.本章将介绍概率论的一些基本概念,并讨论某些特殊场合下的概率计算问题.

第一节 随机事件及其关系与运算

一、随机试验与随机事件

对随机现象的研究必然要联系到对客观事物进行观察或实验. 为了叙述的方便,我们把对自然现象进行观察或进行一次科学实验,统称为一个**试验**. 若这个试验满足:

(1) 在相同条件下可重复进行;

(2) 每次试验的可能结果不止一个,且事先明确知道可能会出现的所有结果;

(3) 每次试验都会出现上述结果中的某一个,但具体哪一个结果出现却事先无法预知,则称这一试验为**随机试验**(random trial),简称试验,记为 E.

由随机试验的可能结果组成的集合称为**随机事件**(random event),简称**事件**,用大写英文字母"$A,B,C,\cdots$"来表示.

对于一个随机试验,我们不仅关心它有哪些可能结果,而且更为关心的是在一次试验中某个结果是否出现.

下面,我们所说的试验都是指随机试验.

例 1 掷一颗骰子,观察其出现的点数,则:

$A=$"出现 1 点",$B=$"出现 2 点",$C=$"出现 3 点",$D=$"出现 4 点",$E=$"出现 6 点",$F=$"出现偶数点",$G=$"点数不超过 2"等都是随机事件.

我们把试验中最简单的、不可再分解的随机事件,称为**基本事件**. 比如在例 1 中,A,B,C,D,E 都是基本事件. 由若干基本事件组合而成的事件称为**复合事件**,比如在例 1 中,F 则是复合事件,它由 B,D,E 组合而成;G 也是复合事件,它由 A 和 B 组合而成.

此外,我们将试验中必定要发生的事件称为**必然事件**,而将试验中必定不会发生的事件称作**不可能事件**. 虽然从本质上说它们已不具有随机性,但为了讨论起来方便,通常把它们视作两个特殊的随机事件,分别用希腊字母 Ω 和 $\varnothing$ 表示. 在例 1 的试验中,"点数小于 7"显然是必然事件,而"点数大于 6"则显然为不可能事件.

二、样本空间

为了用数学方法描述随机现象及随机事件,也为了使我们将要讨论的事件间的关系和运算比较直观而易于理解,我们引入样本点和样本空间的概念.

称试验 E 的每一个可能结果为一个**样本点**，并以小写希腊字母 ω 记之；称全体样本点所构成的集合为试验 E 的**样本空间**(sample space)，记为 Ω. 显然，基本事件是由一个样本点组成的单点集；随机事件是样本空间 E 的子集.

在例 1 中，令 $\omega_i =$ "出现 i 点"$(i = 1,2,3,4,5,6)$，则有

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$$

或简记为

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$$

于是，事件 A 就由一个样本点 ω_1 组成，即 $A = \{\omega_1\}$ 或 $A = \{1\}$；而因为当且仅当掷出 2,4,6 三种点数的任何一种时，事件 $F =$ "出现偶数点" 发生，所以 F 含有 3 个样本点 $\omega_2, \omega_4, \omega_6$，即 $F = \{2,4,6\}$. 若说 F 发生了，则意味着出现了 2,4,6 三个点数中的某一点数；反之若出现了 2,4,6 中的某一点数，则 F 就发生了.

例 2　将一枚硬币连掷两次，观察所出现的正反面的情况，则该试验有 4 个样本点，样本空间为

$$\Omega = \{(\text{正},\text{正}),(\text{正},\text{反}),(\text{反},\text{正}),(\text{反},\text{反})\}$$

若以 A 表示"两次掷出相同的一面"这一事件，则 A 包含两个样本点(正，正)、(反，反)；而事件 C 表示"至少掷出一个正面"，则包含了 3 个样本点(正，正)、(正，反)、(反，正).

例 3　一名射手向某目标射击，直至命中目标为止，观察其命中目标所进行的射击次数(从理论上讲，只要没击中目标，射手就会一直射击下去)，则样本空间为

$$\Omega = \{1,2,\cdots,n,\cdots\}$$

若以 A 表示事件"至少射击 3 次才命中目标"，则 A 发生即意味着射击次数为 3，或 4，或 5，…，而若射击次数为 3，或 4，或 5，…，则意味着事件 A 发生了. 这表明事件 A 由样本点 3,4,5,… 构成.

例 4　设某公共汽车站每 5 分钟有一辆公共汽车通过，观察某人到达汽车站后的等车时间，则样本空间为

$$\Omega = \{x \mid 0 \leqslant x \leqslant 5\}$$

若令 A 表示"等车时间在 1 分钟到 2 分钟内"这一事件，则 $A = \{x \mid 1 < x < 2\}$，A 显然也是 Ω 的一个子集.

例 5　向数轴上投掷一个质点，观察其落点的坐标，由于实数集中任何一个数都是一个样本点，所以

$$\Omega = \{x \mid x \in \mathbf{R}\}$$

对上述问题的分析表明，作为试验结果的事件，其实就是试验的样本空间的子集.

事实上，对于含有有限个或可列个样本点的样本空间(称为离散样本空间)，可以将其任意一个子集称作事件. 而对于含有不可列个样本点的样本空间而言，由于其子集的复杂性，人们不能够将其任意子集都称作事件，而是将满足某种条件的那些子集称为事件. 因此，我们一般

讲，事件是样本空间的满足某种条件的子集，事件发生当且仅当该子集中某个样本点在试验中出现.

样本空间Ω本身也是一个事件，它是一个必然事件，这是因为每次试验总会出现全部基本事件的某一个，即样本点之一总会出现.基于此，样本空间与必然事件使用了同一个记号Ω.

三、事件的关系和运算

如上所说，事件即是样本点的集合.因此，集合的关系及诸种运算也同样适用于事件.为此，我们引进事件之间的一些重要关系和运算，这将有利于今后对事件及其概率的叙述和研究.

设试验E的样本空间为$\Omega, A, B, C, A_i (i = 1, 2, \cdots)$是$\Omega$的子集，即为$E$的随机事件.

1. 事件的包含

如果属于A的样本点必属于B，或用概率论的语言表达为“事件A的发生必然导致事件B的发生”，则称B包含A，或称A含于B，记作$B \supset A$或$A \subset B$.

例 6 在掷一颗骰子的试验中，设事件：$A = \{1,2,3\}, B = \{2,3,4\}, C = \{1,2,3,4\}$，则有$A \subset C$且$B \subset C$.

对任何事件A，显然总有$A \subset \Omega$.为了以后讨论的方便，我们约定不可能事件$\varnothing$包含于任何事件A中，即$\varnothing \subset A$.于是，总有$\varnothing \subset A \subset \Omega$.

2. 事件相等

如果属于A的样本点必属于B，而且属于B的样本点也必属于A，即$A \subset B$且$B \subset A$，则称事件A与B相等，记为$A = B$.用概率论的语言表达为“事件A的发生必导致事件B的发生，同时事件B的发生也必导致事件A的发生”.

3. 事件的并(和)

事件A与B中所有的样本点(相同的只计入一次)组成的事件，用概率论的语言表达为“事件A或B至少有一个发生的事件”，称为A与B的并，记作$A \cup B$.

例如，在例 6 中，$A \cup B = \{1,2,3,4\} = C$.

4. 事件的交(或乘积)

事件A与B中公共的样本点组成的事件，用概率论的语言表达为“事件A与B同时发生的事件”，称为事件A与B的交(或积)，记作$A \cap B$(或AB).

例如，在例 6 中，$A \cap B = \{2,3\}$.

事件的并和交的概念可以推广到有限个和可列个事件的情形：

n个事件$A_i (i = 1, 2, \cdots, n)$的并$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$为一个新事件，简记为$\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$，当且仅当“$A_1, A_2, \cdots, A_n$中至少有一个发生”时，该事件发生；

n 个事件 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的交 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$ 为一个新事件,简记为 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$,当且仅当"$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生"时,该事件发生.

类似地,可定义可列个事件的并 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 及可列个事件的交 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$.

5. 逆事件(对立事件)

由在 Ω 中而不在 A 中的样本点组成的事件,用概率论的语言表达为"事件 A 不发生的事件",称为事件 A 的逆事件,或称 A 的对立事件,记作 $\overline{A}$.

利用上述事件的并和交的运算符号,有

$$A\cup\overline{A}=\Omega \quad 及 \quad A\overline{A}=\varnothing$$

显然,A 与 $\overline{A}$ 互为逆事件.

例如,在掷骰子的试验中,若 $A=\{1,3\}$,则 $\overline{A}=\{2,4,5,6\}$;若 $A=$"点数小于 3",则 $\overline{A}=$"点数不小于 3".

6. 事件的差

由在事件 A 中而不在 B 中的样本点组成的事件,用概率论的语言表达为"事件 A 发生而 B 不发生的事件",称为事件 A 与 B 之差,记为 $A-B$. 显然有 $A-B=A\cap\overline{B}$.

例如,在例 6 中 $A-B=\{1\}$.

7. 互斥事件(不相容)

若两个事件 A,B 满足关系 $A\cap B=\varnothing$,也就是说,如果事件 A,B 不能同时发生,就称 A 与 B 互斥(或不相容).

显然,若 A 与 B 互为逆事件,则 A,B 一定互斥,但互斥事件不一定互为逆事件.

例如,在电视机寿命试验中,"寿命小于 1 万小时"与"寿命大于 5 万小时"是两互斥事件,因为它们不可能同时发生. 但不为互逆事件.

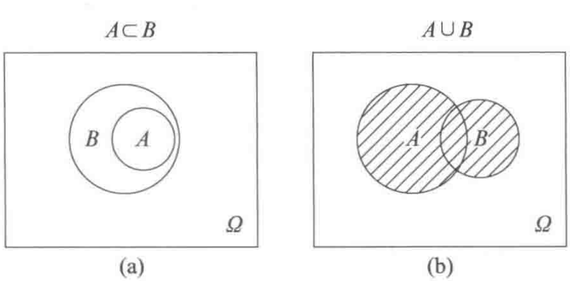
事件的关系与运算,可用集合论中的文氏(Venn)图直观地予以表示(见图 1-1).

事件间的运算规律与集合的运算规律一致,亦具备如下规律:

(1) 交换律:$A\cup B=B\cup A$,$A\cap B=B\cap A$;

(2) 结合律:$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$,$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$;

(3) 分配律:$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$,$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$;



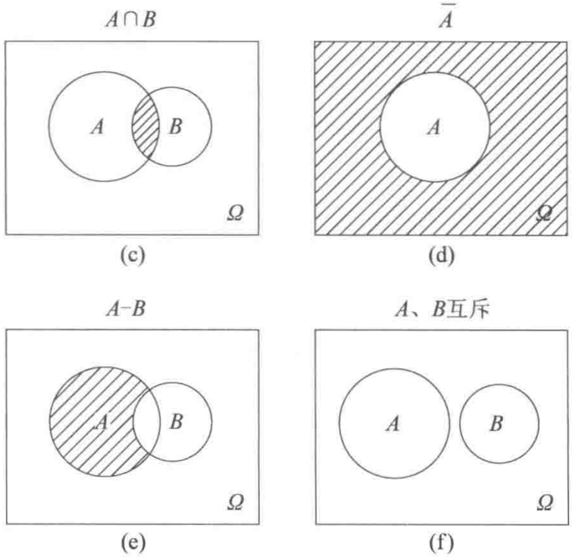


图 1-1

(4) 对偶律:$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$,$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

上述运算律也可以推广到任意有限个或可列个事件的情形.例如,对可列个事件 $A_i(i=1,2,\cdots,n,\cdots)$,有对偶律

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i}=\bigcap_{i=1}^{\infty}\overline{A}_i,\quad \overline{\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i}=\bigcup_{i=1}^{\infty}\overline{A}_i$$

例 7 从某厂的产品中随机抽取三件产品.设 A 表示"三件产品中至少有一件是废品",B 表示"三件产品中至少有两件是废品",C 表示"三件产品都是正品",问:$\overline{A}$,$\overline{B}$,$A\cup B$,$A\cap B$,$A\cup C$,$A\cap C$,$A-B$ 各表示什么事件?

解 $\overline{A}=C$ 表示三件产品都是正品;$\overline{B}$ 表示三件产品中至多有一件是废品;$A\cup B=A$ 表示至少有一件是废品;$A\cap B=B$ 表示至少有两件是废品;$A\cup C=\Omega$ 为必然事件;$A\cap C=\varnothing$ 为不可能事件;$A-B$ 表示恰有一件废品.

例 8 某人连续三次购买彩票,每次一张.令 A,B,C 分别表示其第一、第二、第三次所买的彩票中奖的事件,试用 A,B,C 及其运算表示下列事件:

(1) 三次都中奖;(2) 恰有一次中奖;(3) 不止一次中奖;(4) 只有第二次中奖;(5) 一次奖也未中;(6) 至多中奖两次;(7) 不多于一次中奖.

解 (1) 三次都中奖可表示为:ABC;

(2) 恰有一次中奖可表示为:$A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C$;

(3) 不止一次中奖可表示为:$AB\cup BC\cup AC$;

(4) 只有第二次中奖可表示为:$\overline{A}B\overline{C}$;

(5) 一次奖也未中可表示为：$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$ 或 $\overline{A \cup B \cup C}$；

(6) 至多中奖两次可表示为：$\overline{ABC}$ 或 $\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$；

(7) 不多于一次中奖可表示为：$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} \cup A\overline{B}\,\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\,\overline{B}C$ 或 $\overline{AB \cup BC \cup AC}$.

习题 1.1

1. 试判断下列试验是否为随机试验：

(1) 在恒力的作用下一质点作匀加速运动；

(2) 在 5 个同样的球(标号 1,2,3,4,5) 中，任意取 1 个，观察所取球的标号；

(3) 在分析天平上称量一小包白糖，并记录称量结果.

2. 写出下列试验的样本空间：

(1) 将 1 枚硬币连掷 3 次；

(2) 观察在时间 $[0,t]$ 内进入某一商店的顾客人数；

(3) 将 1 颗骰子掷若干次，直至掷出的点数之和超过 2 为止；

(4) 在单位圆内任取一点，记录它的坐标.

3. 将 1 颗骰子连掷两次，观察其掷出的点数. 令 $A=$“两次掷出的点数相同”，$B=$“点数之和为 10”，$C=$“最小点数为 4”. 试分别指出事件 A,B,C 以及 $A \cup B, ABC, A-C, C-A, B\overline{C}$ 各自含有的样本点.

4. 在一段时间内，某电话交换台接到呼唤的次数可能是 0 次，1 次，2 次，…. 记事件 $A_k(k=1,2,\cdots)$ 表示“接到的呼唤次数小于 k”，试用 $A_k(k=1,2,\cdots)$ 间的运算表示下列事件：

(1) 呼唤次数大于 2；

(2) 呼唤次数在 5 到 10 次范围内；

(3) 呼唤次数与 8 之差的绝对值大于 2.

5. 试用事件 A,B,C 及其运算关系式表示下列事件：

(1) A 发生而 B 不发生；

(2) A 不发生但 B,C 至少有一个发生；

(3) A,B,C 中只有一个发生；

(4) A,B,C 中至多有一个发生；

(5) A,B,C 中至少有两个发生；

(6) A,B,C 不同时发生.

6. 在某大学金融学院的学生中任选一名学生. 若事件 A 表示被选学生是女生，事件 B 表示该生是大学二年级学生，事件 C 表示该生是运动员. 请回答下列问题：

(1) 叙述 $AB\overline{C}$ 的意义.

(2) 在什么条件下 $ABC=C$ 成立？

(3) 在什么条件下 $\overline{A} \subset B$ 成立?

7. 化简下列各事件:

(1) $(A-B) \cup A$;

(2) $(A-B) \cup B$;

(3) $(A-B)A$;

(4) $(A-B)B$;

(5) $(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup B)$.

第二节 概 率

对于一个随机试验,除必然事件与不可能事件外,任一事件都有可能发生,也有可能不发生.人们不仅关心可能发生的有哪些事件,更常常希望了解某些事件在一次试验中发生的可能性的大小.对此,我们希望用一个数字来度量试验中某事件 A 发生的可能性大小,并将这个表征可能性大小的数字称为事件 A 的概率,记作 $P(A)$.

如何选择这种度量呢?什么数字能够准确地描述事件发生的可能性大小?为此,首先引入频率的概念.

一、频率与概率

考虑这样一个问题,设 A 是试验 E 的一个可能结果,若在相同条件下将试验 E 连做 100 次,结果事件 A 发生了 90 次,一般人们会自然地据此认为,事件 A 发生的可能性是比较大的,因为在总的 100 次试验中,A 发生的次数占了 90%,如果 A 发生的可能性不大,似乎不应该出现这种结果.就是说,人们会认同,在 n 次试验中 A 发生的次数 n_A 与 n 的比值在一定程度上反映了事件 A 发生的可能性的大小.

定义 1.1 称在相同条件下进行的 n 次试验中事件 A 发生的次数 n_A 为 A 发生的频数,并称比值 $\frac{n_A}{n}$ 为 A 发生的**频率**(frequency),记作 $f_n(A)=\frac{n_A}{n}$.

由定义 1.1,可得频率具有如下性质:

(1) 对任何事件 A,有 $0 \leqslant f_n(A) \leqslant 1$;

(2) $f_n(\Omega)=1$,Ω 为必然事件;

(3) 若 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 为两两互斥的 m 个事件,则有

$$f_n\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right)=\sum_{i=1}^{m} f_n(A_i)$$

证明　(1)、(2) 显然成立,现在证明(3).

设在 n 次试验中,事件 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 发生的频数分别是 $n_{A_1},n_{A_2},\cdots,n_{A_m}$,由于 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 两两互斥,因此在 n 次试验中事件 $\bigcup\limits_{i=1}^{m}A_i$ 发生的频数等于诸 $A_i(i=1,2,\cdots,m)$ 各自发生的频数之和,即 $n_{A_1}+n_{A_2}+\cdots+n_{A_m}$,从而

$$f_n\left(\bigcup_{i=1}^{m}A_i\right)=\frac{n_{A_1}+n_{A_2}+\cdots+n_{A_m}}{n}=\sum_{i=1}^{m}f_n(A_i)$$

试验表明,事件 A 的频率不是一个固定的数,它会随着试验次数 n 的变化而变化. 即使 n 不变,在不同的两轮 n 次试验中,由于 n_A 可能不同,$f_n(A)$ 也不一定相同. 只不过频率越大,事件 A 的发生就越频繁,在一次试验中,A 发生的可能性也就越大. 因而,直观的想法是用 $f_n(A)$ 表示 A 在一次试验中发生可能性的大小. 但反映事件 A 发生可能性大小的概率 $P(A)$ 应是客观存在的一个数,它应和所进行试验的次数无关. 因此,将 $f_n(A)$ 作为 A 发生的可能性大小的度量是有缺陷的.

但是,人们通过大量的实践观察到,当试验的次数不断增大时,事件 A 的频率会逐步趋于稳定. 在概率论的发展历史上,我们的前人曾做了大量的有关频率稳定性的试验. 表 1-1 列举了历史上一些著名学者掷硬币试验的记录. 记录表明,当掷币次数 n 足够大时,掷出正面的频率稳定地在常数 0.5 的上下摆动,而且随着 n 的不断增大,频率摆动的幅度在逐渐减小. 频率的这种稳定性,正是随机现象统计规律性的典型表现.

表 1-1

试验者	掷币次数	频数 n_A	频率 $f_n(A)$
蒲丰	4 040	2 048	0.506 9
费勒	10 000	4 979	0.497 9
皮尔逊	12 000	6 019	0.501 6
皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5
维尼	30 000	14 994	0.499 8

从实践中观察到的频率的稳定性令人们推测,对任何事件 A,都存在着一个这样的常数与之对应,因而可将频率 $f_n(A)$ 在 n 无限增大时逐渐稳定的这个常数 p 定义为事件 A 发生的概率. 常数 p 的客观存在性以及频率的稳定性有待严格的理论证明,我们将在第四章第三节中对此问题做进一步讨论.

定义 1.2(**概率的统计定义**)　在相同条件下所做的 n 次试验中,若事件 A 发生的频率 $f_n(A)$ 当 $n\to\infty$ 时稳定在常数 p 的附近,称此常数 p 为事件 A 发生的**概率**(probability),记作 $P(A)=p$.

定义 1.2 的重要性在于,它提供了一种估计概率的方法,即当 n 充分大时,可以取频率作

为概率的估计值.在许多实用问题中,当概率不易求出时,往往就是这样做的.

概率的统计定义虽然直观,但不符合数学的严密性,况且要通过此定义确切计算出事件 A 发生的概率是困难的.在实际中,我们不可能对每一个事件都做大量的试验,况且我们不知道 n 要取多大才行,因此有必要寻找更好的定义概率的方法.

对事件的概率给出一般定义的最好方法是用一组公理来确定其真实含义.下面将给出的概率定义是前苏联数学家柯尔莫哥洛夫(1903—1987)于 1933 年首次提出的概率的公理化定义.这个定义明确了概率的基本概念,使概率论成为一个严谨的数学分支,并得以迅速发展.

二、概率的公理化定义

定义 1.3 设试验 E 的样本空间为 Ω,对于 Ω 中每一个事件 A 都赋予一个实数 $P(A)$,若 $P(A)$ 满足如下三个条件:

(1)(**非负性公理**)对任意事件 A,有 $P(A) \geqslant 0$;

(2)(**规范性公理**)$P(\Omega) = 1$;

(3)(**可列可加性公理**)对于 Ω 中任意一列两两互斥的事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$,有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

则称 $P(A)$ 为 A 的**概率**.

注 在定义 1.3 中,三个条件作为概率公理化的定义,是必须具备的基本属性.但我们看到该定义并未具体给出计算概率的公式或方法.同时,之所以规定概率要满足这三个与频率的基本性质相类似的条件,正是基于我们前面对概率与频率的关系的讨论.随着后面讨论的逐步展开,我们会看到,如此定义的事件 A 的概率,确实恰好能表示事件 A 发生的可能性大小.

三、概率的性质

在概率的三条公理的基础上,可以推导出概率的另外一些性质:

(1) 不可能事件的概率为 0,即 $P(\varnothing) = 0$.

证明 因为可列个不可能事件的并仍是不可能事件,所以,有

$$\Omega = \Omega \cup \varnothing \cup \varnothing \cup \cdots \cup \varnothing \cup \cdots$$

又因为不可能事件与任何事件是互斥的,故有

$$P(\Omega) = P(\Omega) + P(\varnothing) + \cdots + P(\varnothing) + \cdots$$

从而由 $P(\Omega) = 1$,得

$$P(\varnothing) + P(\varnothing) + \cdots = 0$$

再由非负性公理,必有

$$P(\varnothing) = 0$$