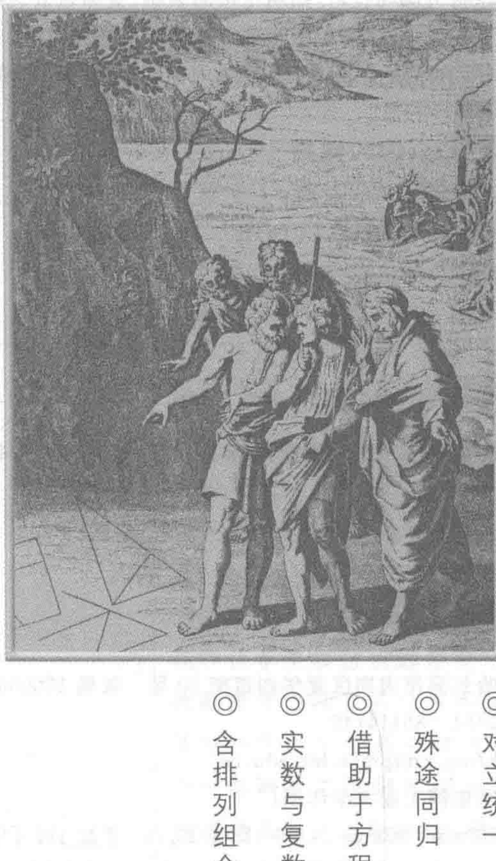
# 代数等式证题法

冯宝琦　丁学登　著

- 对立统一
- 殊途同归
- 借助于方程和方程组
- 实数与复数的等式的证法
- 含排列组合数的等式的证法

工業大學出版社
TUTE OF TECHNOLOGY PRESS

# 代数等式证题法



冯宝琦　丁学登　著

◎对立统一

◎殊途同归

◎借助于方程和方程组

◎实数与复数的等式的证法

◎含排列组合数的等式的证法

HITP

哈爾濱工業大學出版社

HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

## 内容提要

本书以全国统编中学教学大纲为基础，深入细致地讨论了代数等式证明的方法与技巧，归纳出按图索骥、量体裁衣、殊途同归等七种有效的方法，并对每一种方法都做了举例说明.

本书适用于中学生、知识青年自学，也可供中学数学教师参阅.

**图书在版编目(CIP)数据**

代数等式证题法/冯宝琦，丁学登著. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2016.5

ISBN 978-7-5603-5371-5

Ⅰ.①代…　Ⅱ.①冯…②丁…　Ⅲ.①不等式—初中—教学参考资料Ⅳ.①G634.623

**中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 099918 号**

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　张永芹　张永文
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451-86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨工业大学印刷厂
开　　本　787mm×960mm　1/16　印张 10.75　字数 111 千字
版　　次　2016 年 5 月第 1 版　2016 年 5 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5603-5371-5
定　　价　28.00 元

---

# 再版前言

学数学,不做数学题,是学不好数学的.解数学题的过程就是学习数学的过程,也是对数学的概念、方法和意义加深理解的过程.

困扰学生的是如何学会解数学题.现在我们能见到的数学书都是"概念的定义、公式的推导、典型的例题示范和让学生模仿的练习题"格式.这样的教授方法和自古以来的师傅向徒弟传授技艺的方法是一样的.师傅做一个样品给徒弟看制作的全过程,让他知道样品是怎么做成的.徒弟就"照葫芦画瓢"一遍又一遍地去做,直到做成为止.徒弟只要不怕苦,勤学、多练,自会慢慢领悟,熟能生巧,成为"行家".自古以来,成百,成千,成万的人才就

是这样造就的.

近百年来,考试、竞赛让数学题越来越多样化、复杂化,成为题海.那种古老的师徒间的“手工业式”的传授要求学生做超大量的练习,强记超大量的典型例题以及各种技巧,使学生疲于奔命,但收效甚微.

1982年和1984年,黑龙江教育出版社分别出版了我们为高中生编著的《三角等式证题法》和《代数等式证题法》两本书.它们是不同于上述的数学题解书的.书中我们指出了证明一个等式的一般模式.我们用各种不同的例子详细地解释了一个正确的解题思路是怎样产生的.学生学会并掌握了这种思路,他差不多就会做题了.

2001年1月12日,在New Orleans的美国数学学会联合年会上,我有十分钟的时间发言.我的演讲题目是“如何证明三角等式”(详见《三角等式证题法》的附录).在那个十分钟中,我讲了“一个正确的证明思路是怎样产生的”和三个例子.当我结束演讲时,一位女数学家站了起来,双手举起两个大拇指,热情鼓掌.当我走出演讲室时,两位印度数学家正等着我.他们问我是否打算写一本书.我的回答是:“是的,我会写的”.当我回到Ohio打开计算机时,我见到有位教授要我在会议中的发言稿的来信.

我的儿子(Louis Feng)和他的两位同学(那时他们都是十八岁中学生)1998年参加了一个世界范围的中学生的网页设计比赛.他们的网页的载体是“三角等式——一个聪明而精巧的证明法”.他们的作品最后进入半决赛的等级.1998年1月,在San Antonio的美国

数学学会联合年会上，著名的数学教育家，威斯康森大学 Richard A. Askey 教授在他关于美国的数学教育长篇演讲中，表扬了“三位青年数学家”的网页上的“聪明而精巧的三角等式证明法”，同时批评了有些数学教师使用图像计算器来证明三角等式的错误做法.

读者如有兴趣可以访问下面的网址(由三个中学生设计的网页)：http://thinkquest.outofcore.com.

我们非常惊奇的是哈尔滨工业大学出版社刘培杰编辑和他的数学工作室至今还记得我们三十年前的拙作《三角等式证题法》和《代数等式证题法》两本书. 他们很欣赏并给予这两本小书再次出版的机会. 作者在此向刘培杰编辑和他的数学工作室致以由衷的感谢.

**冯宝琦**

**2014 年 10 月 1 日**

**于 Kent State University**

# 前言

笔者在出版的《三角等式证题法》中,曾把三角等式证明的思路归纳为"找差异,抓联系,促转化,求同一"这样一句话.并且指出这种证题的思想方法,不仅对三角等式的证明有效,而且对代数等式的证明也有效.在这本书中,我们将进一步讲述如何用这种思想方法来证代数等式.

这本书较《三角等式证题法》又有两点不同.除了讲如何寻求解题思路之外,本书又讲了常见的证题格式及证题方法.如直接证法中的综合法、分析法.综合法中又讲了从一边推证到

另一边，从两边同时推证到某一个代数式等具体推证形式．在间接证法中，讲了反证法．限于篇幅，数学归纳法没有介绍．其次，我们还以基础知识为线索，编选了一部分内容．其中既有如何就知识的本身来指导证题的，又有综合运用各种知识去灵活地证明各种问题的．总之，本书除了继承《三角等式证题法》一书的思想方法以外，又在基础知识和基本能力的相互联系方面做了一点探讨．

我们希望本书和《三角等式证题法》一样，能有助于广大中学生更好地学好中学数学；同时也希望通过它们与广大数学教师进行思想上、方法上的交流，以促进我们的数学教学质量的提高．

限于作者水平，本书的缺点及至错误在所难免，欢迎同志们批评指正．

# ⊙ 目录

# 第1章 对立统一

数和形的概念是从现实世界中抽象得来的．而现实世界中的数和形的表现形式又是千差万别的．而这种千差万别却无不为这些事物内部的矛盾所左右．

就一个数学等式来说，无论是从条件或结论来看，还是从等式的左右两边来看，它们都存在着不同之处，即差异．否则就构不成一个要加以证明的式子．例如

求证：$(a+b)^2-(c+d)^2+(a+c)^2-(b+d)^2=2(a-d)(a+b+c+d)$．

很明显上等式左右两边在运算上有差异，等式左边是和的运算，而右边是积的运算．又如

已知$\frac{x}{a^2-y^2}=\frac{y}{a^2-x^2}=\frac{1}{b}$，$xy=c^2$．

求证：$(a^2-c^2)^2-b^2c^2=0$ 或 $a^2+c^2-b^2=0$．

此题除了有运算上的差异之外，还有字母上的差异．在条件式中有字母 $a,b,c,x,y$，而在求证式中字母 $x,y$ 消失了．

如果我们把函数、映射也看作是运算的话，则一般说来，一个代数等式的条件式与求证式，求证式的左边和右边主要存在着两种差异：元素（字母等）和运算的差异.

“差异就是矛盾”. 因此，对数学式子中的每一个差异都应把它看作客观矛盾的反映. 它们既对立又统一. 由于一个数学式子的左右两边存在着差异，因而是对立的，然而这些差异又被等号联系在一起，因而又是统一的. 总之，要证明的任何一个数学等式都是一个对立的统一体.

就等式证明过程来说，它是对条件式（或等式的一边）经过恒等变形，转化到求证式（或等式的另一边）的过程；本质上说，等式证明的过程就是找出差异，消灭差异的过程；是一个由对立到统一的过程，合二而一的过程. 因此，在解题时，我们要竭尽全力去了解数学式子中的差异的“每一个方面各占何等的特定的地位，何种具体形式和对方发生互相依存又相互矛盾的关系”.

例如第一个例子中，主要差异是运算上的差异，若恰当地使用平方差因式分解的公式，就可以使等式的左边转化为右边，而对于第二个例子，从条件式中消去 $x,y$ 就是解决条件式与求证式的差异的具体途径.

由此可见，证明数学等式的过程，是一个找出差异，分析差异，解决差异的过程. 不但要看到等式中的对立（差异）的一面，而且更重要的是要看到这些差异是怎样互相联系的. 它们不但在一定的条件下共处于一个统一体中，而且在一定的条件下还可以相互转化. 一个正确的思路在开始的时候就是可以判断的，只要看这种证明的路线是使等式中的差异在缩小，还是在

扩大.若是前者,则一般可以认为,按照这样的思路做下去,原则上等式是可以证出来的.

由于代数等式中无论是条件和求证式的差异,还是一个等式两边的差异,大量地表现为运算上的差异.这个特殊性也就规定了在代数等式的证明中熟练地、准确地掌握代数式的各种公式、法则就显得尤为重要了.对于代数中的各种公式,也必须从字母以及运算的差异上去加以理解和记忆.只有这样,才能灵活地解决问题.关于这方面的论述,请读者参阅《三角等式证题法》(哈尔滨工业大学出版社,2016年).

# 按图索骥

# 第2章

伯乐善相千里马的故事是众所周知的. 伯乐想把自己相马的经验留给后世，写了一本《相马经》. 伯乐的儿子读了《相马经》之后，知道额头突出是好马的一个标志. 他就照着这个标志去找千里马. 有一天，他见到一只大蛤蟆，他以为这就是好马了，高高兴兴地拿回家中，对他的爸爸说："得一马，略与相同，但蹄不如累曲耳". 伯乐知道自己的孩子愚笨，便风趣地说："此马好跳，不堪御也". 这就是按图索骥的故事. 这个成语的原意是用来比喻办事拘泥于教条，只知局部，不知全体；只知表面，不知本质. 而现在使用这个成语，用来比喻按照线索去寻找事物. 意义和原来的不一样了.

代数等式的条件和结论，一个等式的左右两端终究会有一点线索相联系的（否则这个等式也就变得无法证明了）. 按照这个线索去寻找等式证明的思路，这就是按图索骥这个成语给我们的启示. 为了找出线索，首先应分析等式中的不同点与相同

点，由此找出它们之间的联系. 然后用恰当的方法，消除不同点，保留相同点，达到证明的目的.

**例 1**　求证：$x(x-1)(x-2)(x-3)+1=(x^2-3x+1)^2$.

**分析**　等式左边是和，右边是积. 若从运算入手，可以将左边第一项全部乘开，合并同类项，然后再因式分解，配出一个完全平方式来. 这样做无疑是可行的. 但是如果我们注意到右边的二次三项式是 $x^2-3x+1$，按照这个线索将左边的第一项变为

$$
\begin{aligned}
&x(x-1)(x-2)(x-3)= \\
&[x(x-3)][(x-1)(x-2)]= \\
&(x^2-3x)(x^2-3x+2)= \\
&[(x^2-3x+1)-1][(x^2-3x+1)+1]
\end{aligned}
$$

这样就构造出右边所需要的二次三项式来了. 这样做计算量显然会大量减少.

**证明**　左边 $=[(x^2-3x+1)-1][(x^2-3x+1)+1]+1=$
$(x^2-3x+1)^2-1+1=$
$(x^2-3x+1)^2=$
右边

**例 2**　求证

$$(ax-by)^2+(bx+ay)^2=(a^2+b^2)(x^2+y^2)$$

**分析**　左边是和，右边是积. 欲从左边证到右边，则应将左边化积. 但此两项并无公因式，故只能将左边两个因式展开合并，然后按右边的模式进行因式分解.

**证明**　左边 $=a^2x^2-2axby+b^2y^2+b^2x^2+2bxay+$
$a^2y^2=a^2x^2+b^2y^2+b^2x^2+a^2y^2=$
$a^2(x^2+y^2)+b^2(x^2+y^2)=$
$(a^2+b^2)(x^2+y^2)=$
右边

**例 3** 求证

$$(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3=3(a+b)(b+c)(c+a)$$

**分析** 左边是和，右边是积. 故应将左边化和为积. 而这可采用提取公因式的方式解决. 由于右边有因式 $a+b$，左边四项并没有公因式 $a+b$，因此，要按照提出因式 $a+b$（或 $b+c$ 等）的线索去处理左式. 由于

$$-a^3-b^3=-(a^3+b^3)=-(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

因而左边的第二项、第三项合并后有 $a+b$ 的因式. 由此可断定左边第一项、第四项合并后也应有 $a+b$ 因式. 故将左边四项分成两组，先找出公因式 $a+b$，然后对余下的因式用同样的思想去进行分解.

**证明** 左边 $=[(a+b+c)^3-c^3]-(a^3+b^3)=$

$(a+b)[(a+b+c)^2+(a+b+c)c+c^2]-$
$(a+b)(a^2-ab+b^2)=$
$(a+b)[(a+b+c)^2+(a+b+c)c+$
$c^2-a^2-b^2+ab]=$
$(a+b)\{[(a+b+c)^2-a^2]+$
$(b+c)c-(b^2-c^2)+(ab+ac)\}=$
$(a+b)[(b+c)(2a+b+c)+(b+c)c-$
$(b+c)(b-c)+a(b+c)]=$
$(a+b)(b+c)[2a+b+c+c-b+c+a]=$
$(a+b)(b+c)(3a+3c)=$
$3(a+b)(b+c)(c+a)=$
右边

**例 4** 求证：$a^4+b^4+(a+b)^4=2(a^2+ab+b^2)^2$.

**分析** 两边都按乘法公式展开，即可以获得等式成立，但证明过程不够简捷. 如果我们按右边 $a^2+ab+b^2$ 的因式的结构将 $(a+b)^4=[(a+b)^2]^2=(a^2+2ab+b^2)^2=$

$[(a^2+ab+b^2)+ab]^2=(a^2+ab+b^2)^2+2ab(a^2+ab+b^2)+a^2b^2$ 变为 $a^2+ab+b^2$ 的形式，然后再与右边比较，猜想上面展开式所余的部分与 $a^4+b^4$ 合并后也应是 $(a^2+ab+b^2)^2$. 而根据这三数和的平方公式则显然是成立的.

**证明**　左边 $=a^4+b^4+(a^2+ab+b^2+ab)^2=$

$$a^4+b^4+a^2b^2+2ab(a^2+ab+b^2)+$$
$$(a^2+ab+b^2)^2=(a^2)^2+(b^2)^2+$$
$$(ab)^2+2(ab)a^2+2a^2b^2+$$
$$2(ab)b^2+(a^2+ab+b^2)^2=$$
$$(a^2+ab+b^2)^2+(a^2+ab+b^2)^2=$$
$$2(a^2+ab+b^2)^2=$$

右边

**例 5**　求证

$$(a+b)(b+c)(c+a)+abc=(a+b+c)(ab+bc+ca)$$

**分析**　因右边有因式 $a+b+c$，按照这个线索将左边的 $a+b$ 变为 $a+b+c-c$，然后展开得 $(a+b)(b+c)(c+a)=(a+b+c)(b+c)(c+a)-c(b+c)(c+a)$. 对 $-c(b+c)(c+a)+abc$ 同样处理，也可得到因式 $a+b+c$. 最终必得公因式 $a+b+c$.

**证明**　左边 $=(a+b+c)(b+c)(c+a)-$

$$c(b+c)(c+a)+abc=$$
$$(a+b+c)(b+c)(c+a)-$$
$$c[(b+c)(c+a)-ab]=$$
$$(a+b+c)(b+c)(c+a)-$$
$$c^2(a+b+c)=$$
$$(a+b+c)[(b+c)(c+a)-c^2]=$$
$$(a+b+c)(ab+bc+ca)=$$

右边

**例 6** 设 $a,b,c$ 是实数. 且 $1+bc\neq0,1+ca\neq0$, $1+ab\neq0$. 求证

$$\frac{b-c}{1+bc}+\frac{c-a}{1+ca}+\frac{a-b}{1+ab}=\frac{b-c}{1+bc}\cdot\frac{c-a}{1+ca}\cdot\frac{a-b}{1+ab}$$

**分析** 左边是商和,右边是商积,要解决这个和与积的差异,从分母比较中可以看出,对左边应该通分. 通分后,分子变为

$$(b-c)(1+ca)(1+ab)+(c-a)(1+bc)(1+ab)+(a-b)(1+bc)(1+ca)$$

与右边分子比较,应有 $b-c$(或 $c-a$ 等)的因式,按此线索对上述分子中的第二项的 $c-a$,将其变为 $c-b+b-a$,则第二项变为

$$-(b-c)(1+bc)(1+ab)-(a-b)(1+bc)(1+ab)$$

让后者与第三项合并,提取 $a-b$ 的因式后,在余因式中再分解出 $b-c$ 的因式来.

**证明** 因为

$$(b-c)(1+ca)(1+ab)+(c-a)(1+bc)(1+ab)+$$
$$(a-b)(1+bc)(1+ca)=$$
$$(b-c)(1+ca)(1+ab)-$$
$$(b-c)(1+bc)(1+ab)-(a-b)(1+bc)(1+ab)+$$
$$(a-b)(1+bc)(1+ca)=$$
$$(b-c)[(1+ca)(1+ab)-(1+bc)(1+ab)]+$$
$$(a-b)[(1+bc)(1+ca)-(1+bc)(1+ab)]=$$
$$(b-c)(1+ab)[(1+ca)-(1+bc)]+$$
$$(a-b)(1+bc)[(1+ca)-(1+ab)]=$$
$$(b-c)(1+ab)(ca-bc)+(a-b)(1+bc)(ca-ab)=$$
$$(b-c)(a-b)(c+abc)+(a-b)(c-b)(a+abc)=$$