普通高等学校“十三五”规划教材

工程数学

GONGCHENG SHUXUE

崔学慧　明　辉　范　申　彭晓明　编著

中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

普通高等学校"十三五"规划教材

工 程 数 学

崔学慧　明　辉　范　申　彭晓明　编著

中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

内 容 简 介

本书由三个单元构成，按照问题驱动式结构编写。第一单元为工程计算必备的数学基础知识，特别增加了现代科学计算必需的变分方法；第二单元为常用统计方法，主要包括参数估计与假设检验、回归分析与方差分析；第三单元简要介绍数学反演的基础理论和方法。通过学习本书，能够为工程中的正反演问题打下数学基础。

本书适合作为全日制专业型硕士研究生计算类教材和普通高等院校本科高年级的计算类数学教材，作为学术型硕士研究生的数学教材也有一定的适用性，还可作为广大工程技术人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

工程数学/崔学慧等编著. —北京：中国铁道出版社，2018.2
普通高等学校“十三五”规划教材
ISBN 978-7-113-24296-1

Ⅰ. ①工… Ⅱ. ①崔… Ⅲ. ①工程数学-高等学校-教材 Ⅳ. ①TB11

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 029267 号

书　　名： 工程数学
作　　者： 崔学慧　明　辉　范　申　彭晓明　编著

策　　划： 李小军　　　　**读者热线：** (010)63550836
责任编辑： 张文静　徐盼欣
封面设计： 付　巍
封面制作： 刘　颖
责任校对： 张玉华
责任印制： 郭向伟

出版发行： 中国铁道出版社(100054，北京市西城区右安门西街 8 号)
网　　址： http://www.tdpress.com/51eds/
印　　刷： 虎彩印艺股份有限公司
版　　次： 2018 年 2 月第 1 版　　2018 年 2 月第 1 次印刷
开　　本： 787 mm×1 092 mm　1/16　**印张：** 17.5　**字数：** 425 千
书　　号： ISBN 978-7-113-24296-1
定　　价： 45.00 元

前 言

各类工程问题的分析和计算，除了需要具备扎实的本专业理论知识和实践能力外，还需要掌握专业所需的多种数学理论和方法基础，二者互相促进、融合，共同推动数学各学科专业和各工程学科专业的发展和进步，乃至孕育出新的数学研究方向、新的工程问题研究方向。工程问题多种多样，需要的数学工具自然也是多种多样的，特别是随着计算机和网络软硬件理论及技术的日新月异，对各类工程问题的研究而言，机遇与挑战并存。

从 2009 年我国实行全日制专业学位硕士研究生培养改革以来，原有的学术型硕士研究生的培养思路与教材已不能适应专业型硕士研究生的培养目标与定位：高层次应用型专门人才，突出该类型研究生的专业性，以具备解决实际问题的能力培养为能力目标，与学术型硕士研究生处于同一层次。因此，如何开展面向全日制专业学位硕士研究生（以下简称专硕）的数学教育自然是一个亟需解决的关键问题。其中，面向专硕的数学教材建设是关键环节之一。

工程问题的范围很广，我们不可能在有限的篇幅内包罗万象。作为面向专硕的数学教材，应该是基础性的。通过编者及团队近几年的教学实践和改革以及与相关院校的交流，我们逐步确立了以科学计算、常用统计方法和反演方法为主要授课内容，这三个方面的内容能够涵盖大多数的专硕专业培养目标，能够为学生进行专业应用奠定良好的数学基础及知识面。基于此，我们在教学讲义的基础上编著了面向专硕的《工程数学》教材。

本书主要由三个单元构成，特点是问题驱动。第一单元为工程计算必备的数学基础知识，与“数值分析”或“计算方法”部分内容重合，我们增加了现代科学计算必需的变分方法；第二单元为常用统计方法，主要包括参数估计与假设检验、回归分析与方差分析；第三单元简要介绍数学反演的基础理论和方法。通过学习本书，能够为工程中的正反演问题打下数学基础。本书授课时间约需 64 学时。

本书由崔学慧、明辉、范申、彭晓明编著。具体编写分工如下：第 1、2、4～8 章由崔学慧编著，第 3 章由彭晓明编著，第 9、10 章由明辉编著，第 11 章由范申编著，全书由崔学慧统稿。

本书适合作为全日制专业型硕士研究生计算类教材和普通高等院校本科高年级的计算类数学教材，作为学术型硕士研究生的数学教材也有一定的适用性，还可作为广大工程技术人员的参考书。

编者及团队衷心感谢对本书编写给予热忱帮助的中国石油大学（北京）研究生院的相关同志。成稿过程中得到中国石油大学（北京）理学院数学系刘建军教授、高阳副教授的热情帮助，构思过程中得到了吉林省教学名师、长春工业大学王新民教授的指导，在此致以诚挚谢意。

由于我们的学识有限，书中疏漏和不足之处不可避免，敬请广大读者批评指正。

编著者

2017 年 10 月

目　录

第 1 章　数学基础知识

线性空间、赋范线性空间、内积空间、矩阵变换等数学基础知识是各专业应用数学知识解决各类具体问题的理论基础之一. 本章对它们进行简要介绍，为后续各章节打下基础. 虽然有些概念在应用数学方法解决实际问题时并非必需，但是掌握它们对于深入研究工程计算的理论，阅读有关文献专著，却有很大的益处.

1.1　线性空间与赋范线性空间

1.1.1　线性空间

线性空间是对集合概念的扩充，研究的是施加在集合上的代数运算规律的基础数学概念.

定义 1.1　设 V 是一个非空集合，F 是一个数域. 任意元素 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\delta}\in V$，$k,l\in F$.

(1) 在集合 V 中的元素之间定义一种代数运算，称之为**加法**，用通常的“+”表示. 即对集合 V 中的任意元素 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$，按照这种加法运算法则，在 V 中有唯一的元素 $\boldsymbol{\gamma}$ 与它们对应，称为 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的**和**，记作：$\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$，也称这个“+”运算具有**加法封闭性**.

(2) 在集合 V 中的任意元素 $\boldsymbol{\alpha}$ 与数域 F 中的任意元素 k 之间定义另一种代数运算，称之为**数量乘法**，简称**数乘**，用通常的“·”表示. 即对集合 V 中的任意元素 $\boldsymbol{\alpha}$ 与数域 F 中的任意元素 k，按照这种数乘运算法则，在 V 中存在唯一一个元素 $\boldsymbol{\delta}$ 与它们对应，称为 k 与 $\boldsymbol{\alpha}$ 的**数量乘积**，记作：$\delta=k\cdot\boldsymbol{\alpha}$，通常简记为 $\boldsymbol{\delta}=k\boldsymbol{\alpha}$，也称这个“·”运算具有**数乘封闭性**.

如果上述定义的加法和数乘运算满足下述运算规则，则称 V 是数域 F 上的**线性空间**或**向量空间**，记作 $V(F)$. 这些规则如下：

(1) $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$；

(2) $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})$；

(3) 在 V 中有一个元素 $\mathbf{0}$，对 V 中任一元素 $\boldsymbol{\alpha}$，都有 $\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{0}=\boldsymbol{\alpha}$，称具有这个性质的 V 中元素 $\mathbf{0}$ 为**零元素**；

(4) 对任意 $\boldsymbol{\alpha}\in V$，都有 $\boldsymbol{\beta}\in V$，使得 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$，称这个 $\boldsymbol{\beta}$ 为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的**负元素**，记作 $-\boldsymbol{\alpha}$；

(5) $1\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$；

(6) $k(l\boldsymbol{\alpha})=(kl)\boldsymbol{\alpha}$；

(7) $(k+l)\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\alpha}$；

(8) $k(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=k\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\beta}$.

通过线性空间的定义，集合 V 中的元素也称**向量**. 直接从线性空间的定义出发，还可以证明：一个线性空间中零元素、负元素都是**唯一**的，利用负元素，还可以延伸定义如下的**减法**：$\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\beta})$. 这样，集合 V 与数域 F 之间就具有除了“除法”以外的类似“四则运算”中的

加、减、乘(这里是数乘)三种运算了.

如果选择的数域 F 是实数域 $\mathbf{R}$,那么直角坐标系下的矢量的集合就是一个线性空间,只不过把这个空间中的向量称为“矢量”.

下面给出几个线性空间的例子.

例 1.1 复数的全体 $\mathbf{C}$:可以看成复数域 $\mathbf{C}$ 的线性空间,定义的加法是复数的加法,数乘是实数与复数按复数乘法相乘.

例 1.2 $\mathbf{R}^n$:全体 n 维实列向量的集合,定义加法和数乘运算为通常实向量的加法和数乘运算,构成实数域上的线性空间.

例 1.3 $\mathbf{R}^{m\times n}(\mathbf{C}^{m\times n})$:实数域(复数域)上所有 $m\times n$ 阶矩阵的集合,按矩阵的加法和数乘矩阵定义加法和数乘,构成线性空间.

例 1.4 $P[x]_n$:实数域上所有次数不超过 n 的多项式的全体,按多项式加法和数乘多项式定义加法和数乘,构成线性空间,但次数等于 n 的多项式全体不能构成线性空间.

例 1.5 $P[x]$:实数域上的多项式全体,按多项式加法和数乘多项式法则构成线性空间.

例 1.6 $C[a,b]$:区间$[a,b]$上的一元连续实函数的全体,按函数的加法和数乘连续函数的定义,是实数域 $\mathbf{R}$ 上的线性空间.

例 1.7 正实数的全体,记作 $\mathbf{R}_+$,在其中定义加法“$\oplus$”及乘数“$\circ$”运算为

$$a\oplus b=ab,\quad \lambda\circ a=a^\lambda\quad (\lambda\in\mathbf{R};a,b\in\mathbf{R}_+).$$

根据线性空间的定义,可以验证如上定义的加法和数乘运算使得 $\mathbf{R}_+$ 是实数域 $\mathbf{R}$ 上的线性空间,只不过这个线性空间的零元素是数字 1,而不是数字 0;元素 a 的负元素是数字$\dfrac{1}{a}$,而不是数字$-a$.

根据线性空间的定义,若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\in V(F)$,$k_i\in F(i=1,2,\cdots,n)$,则

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n\in V.$$

定义 1.2 称 $\boldsymbol{\alpha}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n=\sum\limits_{i=1}^{n}k_i\boldsymbol{\alpha}_i$ 为向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 的一个**线性组合**,或称 $\boldsymbol{\alpha}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示.

定义 1.3 设 V 是定义在数域 F 上的线性空间,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\in V$,若存在一组不全为零的数 $k_i\in F(i=1,2,\cdots,n)$,使 $\sum\limits_{i=1}^{n}k_i\boldsymbol{\alpha}_i=\mathbf{0}$,则称元素组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ **线性相关**,否则称它们**线性无关**.

定义 1.4 设 V 是定义在数域 F 上的线性空间,如果存在 n 个元素 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 满足

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关;

(2) V 中任一元素 $\boldsymbol{\alpha}$ 总可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示,即 $\boldsymbol{\alpha}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n$.

则称 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是线性空间 V 的一个**基**;有序的系数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 称为 $\boldsymbol{\alpha}$ 在这个基下的**坐标**,通常用列向量$(k_1,k_2,\cdots,k_n)^{\mathrm{T}}$ 表示;n 称为线性空间 V 的**维数**,记为 $n=\dim V$,如果 n 等于无穷,则这个空间是无穷维的.

例 1.8 对于多项式空间 $P[x]_n$,不难证明函数组 $1,x,x^2,\cdots,x^n$ 在$(-\infty,\infty)$上线性无关,故 $1,x,x^2,\cdots,x^n$ 是 $P[x]_n$ 的一组基,$P[x]_n$ 称为$n+1$ 维多项式空间.

例 1.9 在 $\mathbf{R}^n$ 中,令向量 $\boldsymbol{e}_i=(0,\cdots,0,\underset{i}{1},0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^n$,$i=1,2,\cdots,n$,则它们构成了 $\mathbf{R}^n$

的基.

设 V 是 F 上的线性空间，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\in V$(这些 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 未必线性无关)，令

$$V_1=\left\{\boldsymbol{\beta}=\sum_{i=1}^{n}k_i\boldsymbol{\alpha}_i\,|\,k_1,k_2,\cdots,k_n\in F\right\},$$

显然，V_1 也构成了 F 上线性空间.从而得到如下的定义：

定义 1.5　称 $V_1=\left\{\boldsymbol{\beta}=\sum_{i=1}^{n}k_i\boldsymbol{\alpha}_i\,|\,k_1,k_2,\cdots,k_n\in F\right\}$ 为由元素 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 生成的**子空间**，记作 $V_1=\mathrm{span}\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$，集合 $S=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 中的元素 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 称为 V_1 的张成元.因此，也称 V_1 为由元素 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 张成的空间.

显然，线性空间 V 本身也是由其基向量张成的.下面给出几个特殊子空间的例子.

例 1.10　矩阵 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{R}^{m\times n}$ 的零空间.

称齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解集是 $\mathbf{R}^n$ 的子空间，称为 $\boldsymbol{A}$ 的零空间，记为 $N(\boldsymbol{A})$，即

$$N(\mathbf{A})=\{x\in\mathbf{R}^n\,|\,\mathbf{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0},\quad\mathbf{A}\in\mathbf{R}^{m\times n}\}\subset\mathbf{R}^n.$$

例 1.11　矩阵 $\mathbf{A}\in\mathbf{R}^{m\times n}$ 的列空间和行空间.

任意 $\mathbf{A}\in\mathbf{R}^{m\times n}$，由 $\mathbf{A}$ 的列向量张成的集合全体是 $\mathbf{R}^m$ 的子空间，称为 $\mathbf{A}$ 的列空间，记为 $R(\mathbf{A})$，即

$$R(\mathbf{A})=\{\boldsymbol{b}\in\mathbf{R}^m\,|\,\boldsymbol{b}=\mathbf{A}\boldsymbol{x},\quad\forall\,\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n\}\subset\mathbf{R}^m$$

若矩阵 $\mathbf{A}$ 按列分块为 $\mathbf{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n]$，$\boldsymbol{\alpha}_i\in\mathbf{R}^m\,(i=1,2,\cdots,n)$，则

$$R(\mathbf{A})=\mathrm{span}\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}.$$

由 $\mathbf{A}$ 的行向量张成的集合全体是 $\mathbf{R}^n$ 的子空间，称为 $\mathbf{A}$ 的行空间.$\mathbf{A}$ 的行空间可以看成 $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ 的列空间，因此 $\mathbf{A}$ 的行空间记为 $R(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})$，即

$$\mathrm{R}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})=\{\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^n\,|\,\boldsymbol{y}=\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x},\quad\forall\,\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^m\}\subset\mathbf{R}^n,$$

显然，有 $\dim(R(\mathbf{A}))=\dim(R(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}))=r(\mathbf{A})$.

1.1.2　赋范线性空间

在 1.1.1 节中已经给出线性空间的定义，它具有两种代数运算：加法和数乘.在此基础上，根据实际需要，有时要用距离的概念来刻画线性空间中两个向量之间的差异或近似程度.因此，本节首先给出范数(长度、模)的定义，然后依据范数给出距离的定义.

定义 1.6　设 V 是数域 F 上的线性空间，如果 $\forall\,\boldsymbol{x}\in V$，都存在一个实数(记为 $\|\boldsymbol{x}\|$)与之对应，且满足以下三条公理，则称实数 $\|\boldsymbol{x}\|$ 为向量 $\boldsymbol{x}$ 的**范数**：

(1) 正定性(非负性)：$\|\boldsymbol{x}\|\geqslant 0$，且 $\|\boldsymbol{x}\|=0\Leftrightarrow\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$；

(2) 齐次性：对 $\forall\,k\in F$，$\|k\boldsymbol{x}\|=|k|\,\|\boldsymbol{x}\|$；

(3) 三角不等式：$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|\leqslant\|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{y}\|\,(\forall\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in V)$.

把定义了范数的线性空间称为**赋范线性空间**.

不难看出，范数的概念其实就是绝对值概念的推广.下面，给出在实际应用中常用的范数，即常用的赋范线性空间.

1. $\mathbf{R}^n$ 及其常用范数

对于 $\forall\, \boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^n$，定义在其上的常用的范数有如下三种：

(1) 向量的 1-范数：

$$\|\boldsymbol{x}\|_1=\sum_{i=1}^{n}|x_i|. \tag{1.1}$$

(2) 向量的 2-范数(又称欧氏范数)：

$$\|\boldsymbol{x}\|_2=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.2}$$

(3) 向量的∞-范数(又称最大模范数)：

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i|. \tag{1.3}$$

不难验证，这三种范数都满足向量范数的三条公理，证明省略. 实际上，以上三种范数可以统一表示成如下的形式：

$$\|\boldsymbol{x}\|_p=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}},\quad p=1,2,\infty. \tag{1.4}$$

根据式(1.4)，可以发现对 $\mathbf{R}^n$ 中同一向量 $\boldsymbol{x}$ 可以定义不同的范数，也就是说根据使用的度量标准的不同，向量 $\boldsymbol{x}$ 具有不同的长度. 但这些范数之间是存在一定的关系的，这就是范数等价性的概念.

定义 1.7 已知 $\|\boldsymbol{x}\|_{p_1}$ 和 $\|\boldsymbol{x}\|_{p_2}$ 是定义在 $\mathbf{R}^n$ 上的不同范数，若存在正常数 C_1 和 C_2($C_2\geqslant C_1>0$)，对 $\forall\,\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$，有

$$C_1\|\boldsymbol{x}\|_{p_2}\leqslant\|\boldsymbol{x}\|_{p_1}\leqslant C_2\|\boldsymbol{x}\|_{p_2}, \tag{1.5}$$

则称 $\|\boldsymbol{x}\|_{p_1}$ 和 $\|\boldsymbol{x}\|_{p_2}$ 是**等价**的.

不难验证，对 $\forall\,\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$，下面的关系式成立：

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\sqrt{n}}\|\boldsymbol{x}\|_2\leqslant\|\boldsymbol{x}\|_\infty\leqslant\|\boldsymbol{x}\|_2;\\&\|\boldsymbol{x}\|_\infty\leqslant\|\boldsymbol{x}\|_2\leqslant\sqrt{n}\|\boldsymbol{x}\|_\infty;\\&\|\boldsymbol{x}\|_\infty\leqslant\|\boldsymbol{x}\|_1\leqslant n\|\boldsymbol{x}\|_\infty.\end{aligned} \tag{1.6}$$

向量范数等价性的意义在于：对某一问题的结论可以用不同的范数表示，也就是度量的标准(方法)不同，但这些度量之间存在一定的制约关系. 需要指出的是：范数等价性不是互相替代，即在同一问题中不能混用不同的范数，度量标准要统一. 向量范数的等价性只在有限维空间中成立，在无限维空间中是不成立的.

2. $C[a,b]$及其常用范数

对于 $\forall\, f(\boldsymbol{x})\in C[a,b]$，定义在其上的常用的范数有如下三种：

(1) 函数 $f(\boldsymbol{x})$的 1-范数：

$$\|\boldsymbol{f}\|_1=\int_a^b|f(\boldsymbol{x})|\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}. \tag{1.7}$$

(2) 函数 $f(\boldsymbol{x})$ 的 2-范数(又称函数的欧氏范数)：

$$\| \boldsymbol{f} \|_2 = \left(\int_a^b f^2(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x} \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.8}$$

(3) 函数 $f(\boldsymbol{x})$ 的 ∞-范数(又称函数的切比雪夫范数)：

$$\| \boldsymbol{f} \|_\infty = \max_{x \in [a,b]} | f(\boldsymbol{x}) |. \tag{1.9}$$

不难验证，这三种范数都满足向量范数的三条公理，证明省略. 与 $\mathbf{R}^n$ 中定义的范数类似，函数 $f(\boldsymbol{x})$ 的这三种常用的范数也可以统一表示成如下的形式：

$$\| f(\boldsymbol{x}) \|_p = \left(\int_a^b | f(\boldsymbol{x}) |^p \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p = 1,2,\infty. \tag{1.10}$$

3. $\mathbf{R}^{n \times n}$ 及其常用范数

定义 1.8　设矩阵 $\boldsymbol{A} \in \mathbf{R}^{n \times n}$，若存在一个实数 $F(\boldsymbol{A}) = \| \boldsymbol{A} \|$ $(F: \mathbf{R}^{n \times n} \to \mathbf{R})$ 与其对应，且满足以下条件：

(1) 正定性(非负性)：$\| \boldsymbol{A} \| \geqslant 0$，及 $\| \boldsymbol{A} \| = 0$ 当且仅当 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$；

(2) 齐次性：对 $\forall k \in \mathbf{R}$ 有 $\| k\boldsymbol{A} \| = |k| \, \| \boldsymbol{A} \|$；

(3) 三角不等式：$\forall \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbf{R}^{n \times n}$，有 $\| \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} \| \leqslant \| \boldsymbol{A} \| + \| \boldsymbol{B} \|$；

(4) 相容性：$\forall \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbf{R}^{n \times n}$，有 $\| \boldsymbol{AB} \| \leqslant \| \boldsymbol{A} \| \, \| \boldsymbol{B} \|$.

称 $\| \boldsymbol{A} \|$ 是 $\mathbf{R}^{n \times n}$ 上的一个矩阵的**范数**.

我们知道，向量是一个特殊矩阵，那么是否能够根据前面的向量的范数类比得到方阵的范数呢？答案是不一定.

如果从向量的 2-范数出发做类比，令

$$\| \boldsymbol{A} \|_F = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_{ij})^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{1.11}$$

可以验证式(1.11)满足定义 1.8，称之为矩阵的 Frobenius 范数(F-范数)，这个范数也称矩阵的**欧氏范数**. 这就是说，从向量的 2-范数出发做类比，可以得到矩阵的一种特殊范数. 那么，是不是对其他类型的向量范数也可以做这种类比呢？例如，已知矩阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 如下：

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{AB} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

如果按照 $\mathbf{R}^n$ 的最大值范数 $\| \cdot \|_\infty$ 进行类比定义：$\| \boldsymbol{A} \|_\infty = \max\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{ij}|$，因为按照这个定义，可以得到 $\| \boldsymbol{AB} \|_\infty = 2$，$\| \boldsymbol{A} \|_\infty = \| \boldsymbol{B} \|_\infty = 1$，显然 $\| \boldsymbol{AB} \|_\infty \leqslant \| \boldsymbol{A} \|_\infty \| \boldsymbol{B} \|_\infty$ 不成立. 所以，对向量的 $\| \cdot \|_\infty$ 不能直接用类比的逻辑来定义矩阵的范数.

在实际应用中，矩阵和向量往往是互相关联的，因此希望借助已知向量的范数来导出矩阵的范数. 这就要求矩阵范数和向量范数满足相容性，即

$$\| \boldsymbol{Ax} \| \leqslant \| \boldsymbol{A} \| \, \| \boldsymbol{x} \|. \tag{1.12}$$

根据这一要求，矩阵的**算子范数**定义如下：

定义 1.9(矩阵的算子范数)　设 $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$，$\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{A} \in \mathbf{R}^{n \times n}$，定义矩阵的**算子范数**为

$$\| \boldsymbol{A} \| = \max_{x \neq 0} \frac{\| \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \|}{\| \boldsymbol{x} \|} = \max_{\| x \| = 1} \| \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \|, \tag{1.13}$$

其中，$\| \boldsymbol{x} \|$ 是向量 $\boldsymbol{x}$ 的某一种范数.

容易验证以上定义的矩阵算子范数满足一般矩阵范数的四个条件，因此式(1.13)定义的是矩阵范数.

矩阵算子实际上是函数概念的推广. 我们知道，对于一个矩阵 $\boldsymbol{A} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 和向量 $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$，可以把线性代数方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 变形成为 $\boldsymbol{Y} = f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$. 这样，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 自然起到了一个函数 $\boldsymbol{f}$ 的作用，因此也把矩阵称为矩阵算子.

从式(1.13)可知，矩阵的算子范数是向量 $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$ 在矩阵算子 $\boldsymbol{A} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 的作用下，通过变换前后的向量的范数的比值得到的，因此矩阵的算子范数也称向量范数的**从属范数**. 今后如不特别指明，简称矩阵的范数就是指算子范数.

根据式(1.13)右端向量不同的范数类型，可以计算出具体的矩阵算子范数，这里只给出结果.

(1) 矩阵的 1-范数(矩阵的列范数) $\| \boldsymbol{A} \|_1$：

$$\| \boldsymbol{A} \|_1 = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \sum_{i=1}^{n} | a_{ij} |. \tag{1.14}$$

(2) 矩阵的∞-范数(矩阵的行范数) $\| \boldsymbol{A} \|_\infty$：

$$\| \boldsymbol{A} \|_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{j=1}^{n} | a_{ij} |. \tag{1.15}$$

(3) 矩阵的 2-范数(矩阵的行范数) $\| \boldsymbol{A} \|_2$：

$$\| \boldsymbol{A} \|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})}, \tag{1.16}$$

其中，$\lambda_{\max}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})$ 表示 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 的最大特征值.

4. 赋范线性空间中的距离

在定义了线性空间 V 的范数 $\| \cdot \|$ 以后，就可以用范数定义 V 中元素之间的距离.

定义 1.10 $\forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V$，称

$$\rho(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \| \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta} \| \tag{1.17}$$

为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 之间的**距离**. 既然距离是一个几何概念，它应该满足距离的三条公理：

(1) 非负性：$\rho(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \geqslant 0$，且 $\rho(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta}$；

(2) 对称性：$\rho(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \rho(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha})$；

(3) 三角不等式：$\rho(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \leqslant \rho(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\gamma}) + \rho(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\beta})$.

容易证明，用范数定义的距离 $\rho(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \| \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta} \|$ 满足距离的三条公理.

因此，范数的作用就在于刻画了线性空间中元素的长度及元素间的差异程度. 在实际应用中，可以利用范数来表示向量之间误差的大小. 众所周知，微积分的数学基础就是利用距离来定义极限的概念，所以可以利用范数这个概念，得到线性空间 V 中向量序列的收敛和极限的定义.

定义 1.11 设向量序列 $\{\boldsymbol{x}_n\}_{n=1}^{\infty} \subset V$，若存在 $\boldsymbol{\alpha} \in V$，使得

$$\lim_{n\to\infty}\rho(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{x}_n)=\lim_{n\to\infty}\|\boldsymbol{x}_n-\boldsymbol{\alpha}\|=0,\tag{1.18}$$

则称向量序列$\{\boldsymbol{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$**收敛**于$\boldsymbol{\alpha}$,记作$\lim\limits_{n\to\infty}\boldsymbol{x}_n=\boldsymbol{\alpha}$.

可以证明,收敛点列的极限必是唯一的,而且收敛点列满足 **Cauchy 条件**:对$\forall\varepsilon>0$,存在N,使当$n,m>N$时,有

$$\|\boldsymbol{x}_n-\boldsymbol{x}_m\|<\varepsilon.$$

通常,把满足 Cauchy 条件的点列叫做**基本列**.可见,收敛点列必为基本列.特别指出,对实数域而言,一个极其重要的性质是上述命题反之亦然,即凡基本列必收敛,这叫做实数域的完备性.

不难理解,赋范线性空间中极限的定义实际上就是数列极限概念的一般化,只不过这里用范数来代替绝对值作为距离的度量.

定理 1.1　在赋范线性空间$\mathbf{R}^n$中,向量序列(点列)$\{\boldsymbol{x}^{(k)}=(\boldsymbol{x}_1^{(k)},\boldsymbol{x}_2^{(k)},\cdots,\boldsymbol{x}_n^{(k)})^{\mathrm{T}}\}_{k=1}^{\infty}$的极限$\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{x}^{(k)}=\boldsymbol{x}^*=(\boldsymbol{x}_1^*,\boldsymbol{x}_2^*,\cdots,\boldsymbol{x}_n^*)^{\mathrm{T}}$存在的充分必要条件是$\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_i^{(k)}=\boldsymbol{x}_i^*$,$(i=1,2,\cdots,n)$.

证明:$\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{x}^{(k)}=\boldsymbol{x}^*\Leftrightarrow\lim\limits_{k\to\infty}\|\boldsymbol{x}^{(k)}-\boldsymbol{x}^*\|_\infty=0\Leftrightarrow\lim\limits_{k\to\infty}\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|\boldsymbol{x}_i^{(k)}-\boldsymbol{x}_i^*|=0\Leftrightarrow\lim\limits_{k\to\infty}|\boldsymbol{x}_i^{(k)}-\boldsymbol{x}_i^*|=0\Leftrightarrow\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_i^{(k)}=x_i^*(i=1,2,\cdots,n)$.

简单来说,定理 1.1 表明点列的收敛性等价于其各分量数列的收敛性.

需要指出的是,定理 1.1 中并没有指出极限过程所采用的范数类型.实际上,由范数的等价性(类似数列极限的控制收敛定理),若向量序列按某一种范数收敛,则按其余范数也收敛.

同理,对于$\mathbf{R}^{n\times n}$中的矩阵序列$\{\boldsymbol{A}^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$的收敛性,也有与定理 1.1 结构类似的结论,读者可以完全可以自行写出,这里不再赘述.

1.2　内积空间

从几何的角度来看,1.1 节中用范数的概念来刻画向量的长度(模),那么如何利用严格的数学定义来刻画向量之间的夹角就自然是需要顺序解决的另外一个数学基础问题.有了范数、角度的概念以后,线性空间就具有了相对完整的几何概念.要想解决如何定义角度的问题,就需要内积的概念,进而得到内积空间.在诸多工程应用领域,大多是在内积空间的框架下讨论其数学模型及其求解方法的.本节只讨论实数域上的内积空间.

1.2.1　内积及内积空间的定义

定义 1.12　设V是实数域$\mathbf{R}$上的线性空间,对于$\forall\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$,规定它们之间的一种新的运算规则:记作$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$,且$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\in\mathbf{R}$.如果这个运算规则满足以下四个条件:

(1) 对称性$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})$;

(2) 可加性$(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma})+(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})$,$\forall\boldsymbol{\gamma}\in V$;

(3) 齐次性$(k\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=k(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$,$\forall k\in\mathbf{R}$;

(4) 正定性$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})\geqslant0$,当且仅当$\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$时才有$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})=0$.

则称$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$为向量$\boldsymbol{\alpha}$与$\boldsymbol{\beta}$的**内积**,定义了内积的线性空间称为**内积空间**,定义了内积的实线性

空间是实内积空间，又称**欧氏空间**.

很显然，根据上述内积的定义，如下的基本性质自然成立：

$$(\boldsymbol{\alpha},k\boldsymbol{\beta})=k(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}),\quad (\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})+(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}),\quad (\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{0})=(\boldsymbol{0},\boldsymbol{\beta})=0.$$

内积空间中的内积运算，可以理解成一种乘法运算，但这种乘法运算与线性空间定义中的数乘运算是不同的，区别在于内积的结果是一个数值，而数乘的结果是一个向量.

下面介绍几种常用的内积空间.

例 1.12 内积空间 $\mathbf{R}^n$.

$\forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^n$，定义

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=\sum_{i=1}^{n}x_i y_i. \tag{1.19}$$

根据矩阵的运算法则，不难验证式(1.19)满足内积运算要求的四个条件，所以式(1.19)定义了 $\mathbf{R}^n$ 中的内积，$\mathbf{R}^n$ 就成为一个内积空间. 同时，不难看出式(1.19)实际上就是解析几何中矢量(向量)的数量积(点积)概念的一般化.

下面给出 $\mathbf{R}^n$ 中另一种内积的定义.

$\forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^n$，对于给定的实对称正定阵 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{R}^{n\times n}$，定义

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}=\sum_{i,j=1}^{n}x_i a_{ij} y_j, \tag{1.20}$$

它也满足内积运算的四个条件，即 $\mathbf{R}^n$ 以这种形式定义的内积也构成内积空间，仍记为 $\mathbf{R}^n$. 不难看出，式(1.20)是线性代数中二次型概念的推广，这也说明对同一个线性空间，定义不同的内积运算可构成不同的内积空间.

例 1.13 内积空间 $C[a,b]$.

为了使用内积空间 $C[a,b]$ 适应不同的应用目的，首先给出权函数的定义.

定义 1.13 设$[a,b]$是有限或无限区间，函数 $\rho(x)$ 在$[a,b]$上非负可积，若其满足

(1) $\int_a^b \rho(x)\mathrm{d}x>0$；

(2) $\int_a^b x^n\rho(x)\mathrm{d}x$ 存在，$n=0,1,\cdots$；

(3) 若对$[a,b]$上的非负连续函数 $g(x)$ 有 $\int_a^b \rho(x)g(x)\mathrm{d}x=0$，则在$[a,b]$上必有 $g(x)=0$.

则称 $\rho(x)$ 是$[a,b]$上的一个**权函数**.

权函数 $\rho(x)$ 的一种解释是物理上的密度函数，相应的 $\int_a^b \rho(x)\mathrm{d}x$ 表示总质量. 当 $\rho(x)=$常数时，表示质量分布是均匀的.

定义 1.13 保证了 $\rho(x)$ 是$[a,b]$区间上可积的非负函数，而且在$[a,b]$的任一开子区间上 $\rho(x)\neq 0$. 常用的权函数有如下五个：

$$\rho(x)=1,-1\leqslant x\leqslant 1;\quad \rho(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},-1\leqslant x\leqslant 1;\quad \rho(x)=\sqrt{1-x^2},-1\leqslant x\leqslant 1;$$
$$\rho(x)=\mathrm{e}^{-x},0\leqslant x<+\infty;\quad \rho(x)=\mathrm{e}^{-x^2},-\infty<x<+\infty.$$

这五个权函数在后续的最佳平方逼近和数值积分中会用到.

下面给出 $C[a,b]$中内积的定义.

$\forall f(x),g(x)\in C[a,b]$和给定的权函数 $\rho(x)>0,x\in[a,b]$,定义

$$(f,g)=\int_a^b \rho(x)f(x)g(x)\mathrm{d}x, \tag{1.21}$$

称式(1.21)为 $C[a,b]$ 中带权函数 $\rho(x)$ 的内积. 特别地,若 $\rho(x)=1$,则有 $(f,g)=\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$. 容易验证式(1.21)满足内积的运算法则,因此根据选择的权函数的不同,$C[a,b]$构成了不同的内积空间,也可以记作 $L_2[a,b]$.

1.2.2 内积范数

以上给出了内积空间的定义,那么赋范线性空间与内积空间是否存在一定的关系呢? 为了回答这个问题,自然需要解决根据内积的定义,以及能否诱导出一种新的范数.

定义 1.14 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 是内积空间 V 中任一向量,则

$$\|\boldsymbol{\alpha}\|=\sqrt{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})}, \tag{1.22}$$

称 $\|\boldsymbol{\alpha}\|$ 为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的**内积范数**.

需要指出的是,式(1.22)只是一种形式上的范数定义,它究竟是否是范数,还需要验证它是否满足范数的三条公理. 根据内积的定义,式(1.22)满足范数的正定性和齐次性,对于三角不等式这个性质,目前从式(1.22)式还难以证明. 因此说式(1.22)只是在形式上暂时称为内积范数. 如下的 Cauchy-Schwarz 不等式可以解决这一问题.

定理 1.2 设 $\forall \boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$,$V$ 是内积空间,则有如下的 Cauchy-Schwarz 不等式成立:

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})^2\leqslant(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}), \tag{1.23}$$

其中,等号只有当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 线性相关时才成立.

证明:对 $\forall k\in\mathbf{R}$,任意取定 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$,计算$(\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\beta})$,根据内积的正定性,必有

$$(\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})+2k(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})+k^2(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta})\geqslant 0,$$

$\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$ 时,显然上式成立. 当 $\boldsymbol{\beta}\neq\mathbf{0}$ 时,上式等号右端是关于 k 的一元二次方程,则其判别式

$$4(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})^2-4(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta})\leqslant 0,$$

所以$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})^2\leqslant(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta})$成立.

当 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 线性相关时,即 $\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\beta}$($k\in\mathbf{R}$ 且 $k\neq 0$),式(1.23)中等号自然成立;反之,如果式(1.23)中等号成立,则 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 必线性相关. 因为若 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 线性无关,则对 $\forall k\in\mathbf{R}\neq 0$,必有 $\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\beta}\neq\mathbf{0}$,则$(\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\beta})>0$,所以等号不成立,矛盾.

利用内积范数的形式定义,Cauchy-Schwarz 不等式可以表示成

$$|(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})|\leqslant\|\boldsymbol{\alpha}\|\ \|\boldsymbol{\beta}\|. \tag{1.24}$$

Cauchy-Schwarz 不等式是内积空间中的核心结论,有了它就可以进一步证明式(1.22)确

实定义了一种范数. 因为在内积空间中$\forall \boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$,根据式(1.24)有

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\|^2&=(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})\\&=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})+2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})+(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta})\\&\leqslant\|\boldsymbol{\alpha}\|^2+2\|\boldsymbol{\alpha}\|\ \|\boldsymbol{\beta}\|+\|\boldsymbol{\beta}\|^2\\&=(\|\boldsymbol{\alpha}\|+\|\boldsymbol{\beta}\|)^2,\end{aligned}$$

即三角不等式$\|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\|\leqslant\|\boldsymbol{\alpha}\|+\|\boldsymbol{\beta}\|$成立. 所以,式(1.22)所称的内积范数是一种范数,故内积空间也一定是赋范线性空间,但赋范线性空间不一定是内积空间.

在本节开头,我们指出本节的目的是要得到向量之间夹角这一个几何概念. 这个夹角的概念正是通过 Cauchy-Schwarz 不等式变形进行定义的,定义如下:

定义 1.15 内积空间中任意两个向量$\boldsymbol{\alpha}$与$\boldsymbol{\beta}$的**夹角**为

$$\theta=\arccos\frac{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}{\|\boldsymbol{\alpha}\|\ \|\boldsymbol{\beta}\|},\quad 且\ \theta\in[0,\pi]. \tag{1.25}$$

不难发现,式(1.25)就是解析几何中两个矢量夹角定义的一般化,只不过式(1.25)中利用内积代替了点积,利用内积范数取代了矢量的模.

对于两个不为零的向量$\boldsymbol{\alpha}$与$\boldsymbol{\beta}$,若$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=0$,则$\theta=\frac{\pi}{2}$,这时称$\boldsymbol{\alpha}$与$\boldsymbol{\beta}$互相垂直或正交,记作$\boldsymbol{\alpha}\perp\boldsymbol{\beta}$.

定义 1.16 若赋范线性空间H的每一个基本列都在H中有极限存在,则称H是**完备**的,完备的内积空间称为 Hilbert 空间,完备的赋范线性空间称为 Banach 空间.

设S是内积空间H的子集(记作$S\subset H$),如果对任何$x\in H$,恒有$x_n\in S$,使$x_n\to x$,即H中的任一点都能以S中的点列来任意逼近,则称S在H中稠密,或称S是H的一个稠密子集,可以证明,任何一个不完备的内积空间,总可以将它完备化,使之成为一个 Hilbert 空间,也就是如下的定理:

定理 1.3 任何内积空间H均可由添加新元素的办法而作成一个 Hilbert 空间$\overline{H}$,且使H为$\overline{H}$的稠密子集.

至此,我们就系统建立了通常几何意义上的长度和角度的概念,这样就可以从几何的角度看待抽象的线性空间,并开展应用研究. 我们完全可以预见内积这个概念在应用数学知识解决实际问题中的重要性.

1.2.3 内积与正交投影及投影向量

我们知道,从几何的角度来看,投影是有大小、正负,而没有方向的量. 那么,在内积空间的框架下,一个向量$\boldsymbol{\alpha}$与其正交投影之间的关系自然是要考虑的问题之一.

性质 1 设V是内积空间,向量$\boldsymbol{v}\in V$,且其内积范数$\|\boldsymbol{v}\|=1$,即$\boldsymbol{v}$为单位向量,$\boldsymbol{\alpha}\in V$为非零向量,则$\boldsymbol{\alpha}$在$\boldsymbol{v}$上的**正交投影**为内积$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{v})$.

证明:设$\boldsymbol{\alpha}$与$\boldsymbol{v}$的夹角为θ,$\boldsymbol{\alpha}$在$\boldsymbol{v}$上的正交投影记作a,则根据向量夹角的定义,有

$$\cos\theta=\frac{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{v})}{\|\boldsymbol{\alpha}\|\ \|\boldsymbol{v}\|},$$

又因为$\|\boldsymbol{v}\|=1$,则$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{v})=\|\boldsymbol{\alpha}\|\cos\theta$,而该等式右端就是几何意义上正交投影的数学表示,