



教育部高等学校电子信息类专业教学指导委员会规划教材
高等学校电子信息类专业系列教材

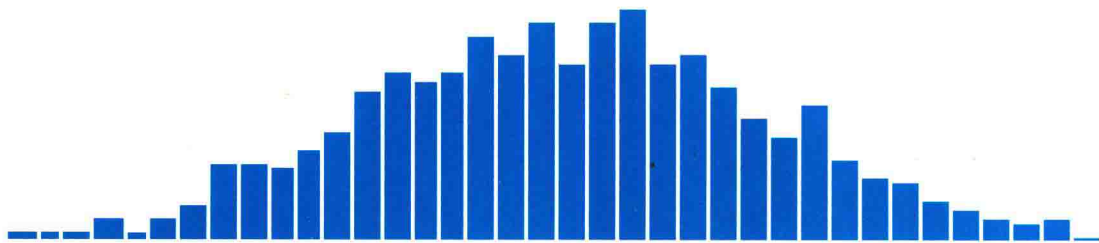
信息与通信工程

Random Signal Processing

随机信号处理

陈芳炯 金连文 编著

Chen Fangjiong Jin Lianwen



清华大学出版社





教育部高等学校电子信息类专业教学指导委员会规划教材
高等学校电子信息类专业系列教材

Random Signal Processing
随机信号处理

陈芳炯 金连文 编著

Chen Fangjiong Jin Lianwen



清华大学出版社
北京

内 容 简 介

全书共6章,第1~3章是基础理论。其中,第1章主要回顾信号的含义及信号处理的三大理论支柱,即采样定理、变换域分析和线性时不变系统理论;第2章主要介绍随机信号的基本概念及数学模型;第3章主要介绍信号检测及信号参数估计的基础理论与方法。第4~6章的内容为信号处理的基本方法。其中,第4章介绍线性系统和线性变换对随机信号特性的影响,并拓展到随机信号的线性建模;第5章主要介绍随机信号的滤波,含维纳滤波、卡尔曼滤波、自适应滤波等;第6章介绍随机信号的功率谱估计,含参数化估计方法和非参数化估计方法。

本书力求以简约的内容概括随机信号处理的基本理论与方法,为读者打下牢固的随机信号处理知识基础。本书既可作为电子信息类高年级本科生和相关学科研究生的教材,也可作为从事相关领域研究的科研人员提供参考。

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签,无标签者不得销售。

版权所有,侵权必究。侵权举报电话:010-62782989 13701121933

图书在版编目(CIP)数据

随机信号处理/陈芳炯,金连文编著. —北京:清华大学出版社,2018
(高等学校电子信息类专业系列教材)
ISBN 978-7-302-49235-1

I. ①随… II. ①陈… ②金… III. ①随机信号—信号处理—高等学校—教材 IV. ①TN911.7

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 331866 号

责任编辑:盛东亮
封面设计:李召霞
责任校对:李建庄
责任印制:董 瑾

出版发行:清华大学出版社

网 址: <http://www.tup.com.cn>, <http://www.wqbook.com>

地 址:北京清华大学学研大厦 A 座 邮 编:100084

社 总 机:010-62770175 邮 购:010-62786544

投稿与读者服务:010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质量反馈:010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

课件下载:<http://www.tup.com.cn>,010-62795954

印 装 者:北京嘉实印刷有限公司

经 销:全国新华书店

开 本:185mm×260mm

印 张:11.25

字 数:269千字

版 次:2018年9月第1版

印 次:2018年9月第1次印刷

定 价:39.00元

产品编号:071524-01

高等学校电子信息类专业系列教材

一 顾问委员会

谈振辉	上海交通大学	(教指委高级顾问)	郁道银	天津大学	(教指委高级顾问)
廖延彪	清华大学	(特约高级顾问)	胡广书	清华大学	(特约高级顾问)
华成英	清华大学	(国家级教学名师)	于洪珍	中国矿业大学	(国家级教学名师)
彭启琮	电子科技大学	(国家级教学名师)	孙肖子	西安电子科技大学	(国家级教学名师)
邹逢兴	国防科技大学	(国家级教学名师)	严国萍	华中科技大学	(国家级教学名师)

一 编审委员会

主任	吕志伟	哈尔滨工业大学			
副主任	刘旭	浙江大学	王志军	北京大学	
	隆克平	北京科技大学	葛宝臻	天津大学	
	秦石乔	国防科技大学	何伟明	哈尔滨工业大学	
	刘向东	浙江大学			
委员	王志华	清华大学	宋梅	北京邮电大学	
	韩焱	中北大学	张雪英	太原理工大学	
	殷福亮	大连理工大学	赵晓晖	吉林大学	
	张朝柱	哈尔滨工程大学	刘兴钊	上海交通大学	
	洪伟	东南大学	陈鹤鸣	南京邮电大学	
	杨明武	合肥工业大学	袁东风	山东大学	
	王忠勇	郑州大学	程文青	华中科技大学	
	曾云	湖南大学	李思敏	桂林电子科技大学	
	陈前斌	重庆邮电大学	张怀武	电子科技大学	
	谢泉	贵州大学	卞树檀	火箭军工程大学	
	吴瑛	解放军信息工程大学	刘纯亮	西安交通大学	
	金伟其	北京理工大学	毕卫红	燕山大学	
	胡秀珍	内蒙古工业大学	付跃刚	长春理工大学	
	贾宏志	上海理工大学	顾济华	苏州大学	
	李振华	南京理工大学	韩正甫	中国科学技术大学	
	李晖	福建师范大学	何兴道	南昌航空大学	
	何平安	武汉大学	张新亮	华中科技大学	
	郭永彩	重庆大学	曹益平	四川大学	
	刘缠牢	西安工业大学	李儒新	中国科学院上海光学精密机械研究所	
	赵尚弘	空军工程大学	董友梅	京东方科技集团股份有限公司	
	蒋晓瑜	陆军装甲兵学院	蔡毅	中国兵器科学研究院	
	仲顺安	北京理工大学	冯其波	北京交通大学	
	黄翊东	清华大学	张有光	北京航空航天大学	
	李勇朝	西安电子科技大学	江毅	北京理工大学	
	章毓晋	清华大学	张伟刚	南开大学	
	刘铁根	天津大学	宋峰	南开大学	
	王艳芬	中国矿业大学	靳伟	香港理工大学	
	苑立波	哈尔滨工程大学			
丛书责任编辑	盛东亮	清华大学出版社			

前言

PREFACE

随机信号处理涉及多媒体信号、生物医学信号、通信信号、控制信号等方面,有非常广泛的研究范围。本书力图以有限的篇幅对随机信号处理的基本理论和方法进行概括,使学生对随机信号概念和数学建模有必要的了解,掌握随机信号理论和分析处理的基本方法。

全书参考学时为 36 学时,如需补充相关学科的前沿知识,可拓展到 48 学时。本书需要“概率论”“信号与系统”“数字信号处理”课程作为预备知识。在内容编排上,本书兼顾实信号和复信号,所以还需要一定的复变函数知识。

作者在编写本教材的过程中,参考了大量的国内外学者文献,在此对相关作者表示衷心的感谢。同时,本书的编写也得到清华大学出版社的大力支持,在此表示诚挚的感谢。

由于作者水平有限,本书在内容的选择、体系的安排以及文字叙述上难免有疏漏,恳请读者批评指正。

编者

2018 年 4 月

目录

CONTENTS

第 1 章 数字信号处理基本概念	1
1.1 概述	1
1.2 离散时间信号	3
1.2.1 连续时间信号的采样	3
1.2.2 采样定理	4
1.2.3 几种常见的数字信号	5
1.2.4 信号的能量、功率及周期性	7
1.2.5 信号的基本运算	7
1.3 信号的傅里叶变换	8
1.3.1 连续时间信号的傅里叶变换	8
1.3.2 离散时间信号的傅里叶变换	9
1.3.3 离散傅里叶变换及其性质	9
1.4 z 变换	11
1.4.1 z 变换的定义	11
1.4.2 z 变换的收敛域	11
1.4.3 z 变换的性质	13
1.4.4 逆 z 变换	14
1.5 离散时间系统	14
1.5.1 基本概念	14
1.5.2 离散时间系统的单位冲激响应函数	15
1.5.3 LSI 系统的稳定性和因果性	16
1.5.4 LSI 系统的变换域分析	17
本章习题	19
第 2 章 随机信号分析基础	22
2.1 概述	22
2.1.1 随机信号的基本概念	22
2.1.2 随机信号的分类	25
2.2 随机信号的概率结构	25
2.2.1 概率论基本概念	25
2.2.2 随机信号有限维概率密度及数字特征	28
2.3 随机信号的平稳性	29
2.4 离散随机信号和复随机信号	32
2.4.1 离散时间随机信号及其数字特征	32

2.4.2	复随机信号	34
2.5	随机信号的遍历性	35
2.5.1	总集意义上的数字特征与时间意义上的数字特征	35
2.5.2	平稳随机信号的遍历性	36
2.6	平稳随机信号的功率谱密度	38
2.6.1	维纳-辛钦定理	38
2.6.2	功率谱密度的性质	39
2.6.3	离散随机序列的功率谱密度	40
2.7	几种常见的随机信号	42
2.7.1	白噪声	42
2.7.2	高斯随机信号	43
2.7.3	马尔可夫随机信号	43
	本章习题	45
第3章	信号估计与检测基础	49
3.1	估计的基本概念	49
3.2	估计算法的性能指标	50
3.2.1	性能指标	50
3.2.2	随机信号均值及相关函数的估计	51
3.3	估计性能界——CRB	55
3.3.1	单参数实常量估计的 CRB	56
3.3.2	多参量估计的 CRB	59
3.3.3	参数变换的 CRB	61
3.3.4	复参数估计的 CRB	62
3.4	最大似然估计	64
3.4.1	最大似然估计的基本原理	64
3.4.2	变换参数的最大似然估计	67
3.5	贝叶斯估计	69
3.5.1	代价函数	69
3.5.2	最小均方误差估计	70
3.5.3	条件中位数估计	71
3.5.4	最大后验概率估计	71
3.5.5	贝叶斯估计举例	72
3.6	线性最小均方误差估计	75
3.6.1	随机参量的线性最小均方误差估计	75
3.6.2	线性最小均方误差估计的几何解释	77
3.7	最小二乘估计	79
3.8	信号检测基础	80
3.8.1	确定性信号检测	81
3.8.2	随机信号检测	84
	本章习题	87
第4章	随机信号的更新与建模	90
4.1	随机信号通过线性系统	90
4.1.1	基本概念	90

4.1.2	线性系统输入输出信号之间数字特征的关系	91
4.2	随机矢量的线性变换	93
4.3	离散时间序列的线性模型	97
4.3.1	离散时间序列的自回归滑动平均模型	98
4.3.2	ARMA模型的传递函数	99
4.3.3	ARMA系统的等效性	101
4.4	ARMA模型的数字特征	102
4.4.1	互相关函数	103
4.4.2	自相关函数	103
4.4.3	功率谱密度	107
4.5	ARMA、AR、MA模型之间的关系	108
4.5.1	Wold分解定理	108
4.5.2	柯尔莫可洛夫定理	109
	本章习题	110
第5章	随机信号的滤波	113
5.1	数字滤波器的基本概念	113
5.2	维纳滤波	114
5.2.1	最小均方误差(MMSE)准则与正交性原理	114
5.2.2	Wiener-Hopf 正则方程	115
5.2.3	Wiener滤波器的求解	117
5.3	线性预测	120
5.4	卡尔曼滤波	123
5.5	最小二乘滤波	127
5.6	匹配滤波器	129
5.7	自适应滤波	132
5.7.1	自适应滤波器的基本概念	132
5.7.2	LMS自适应滤波器	133
5.7.3	RLS自适应滤波	136
	本章习题	137
第6章	功率谱估计	141
6.1	概述	141
6.2	经典谱估计的基本方法	142
6.2.1	经典谱估计法一——周期图法	142
6.2.2	经典谱估计法二——间接法(相关图法、BT谱估计)	146
6.2.3	经典谱估计方法的改进	147
6.3	功率谱估计的参数模型法	151
6.3.1	AR谱估计的相关函数法	152
6.3.2	Levinson-Durbin算法	153
6.3.3	AR谱估计的性质	157
6.3.4	MA谱估计、ARMA谱估计	158
6.4	特征分解法谱估计	161
6.4.1	Pisarenko谐波分解与相关矩阵的特征分解	161
6.4.2	子空间法功率谱估计	163
	本章习题	167

1.1 概述

信号是指含有一定信息量的时间或空间的函数,通常用 $x(t)$ 或 $x(n)$ 来表示。它的自变量可以是时间也可以是其其他变量,例如空间距离等。一般而言,若非特别说明,在本书 $x(t)$ 或 $x(n)$ 视为随时间变化的函数。

若 t 是定义在时间轴上的连续变量,则称 $x(t)$ 为连续时间信号,亦称为模拟信号。若 t 仅在时间轴上的离散点取值,通常将此时的 $x(t)$ 记为 $x(nT_s)$ (T_s 代表两相邻点之间的时间间隔,又称为采样周期),称 $x(nT_s)$ 为离散时间信号,一般可将 T_s 归一化为 1,这样 $x(nT_s)$ 可表示为 $x(n)$, n 为整数。 $x(n)$ 又可称为离散时间序列,或简称时间序列(Time Series)。

上述将信号分为连续时间信号和离散时间信号两大类。此外,对信号的分类方法还有很多,下面给出几种常见的分类方法。

1. 周期信号和非周期信号

对信号 $x(n)$,若有 $x(n) = x(n \pm KN)$, K 、 N 均为正整数,则称 $x(n)$ 是周期函数;否则, $x(n)$ 为非周期函数。

2. 模拟信号和数字信号

具有连续振幅的连续时间信号通常称为模拟信号,具有离散振幅的离散时间信号称为数字信号。自然语言是典型模拟信号,自然语言经过采样、量化后形成可存储在数字介质的数字语言信号。

3. 确定性信号和随机信号

如果信号 $x(n)$ 随时间的变化是有规律的,即给定任意时刻 n ,信号 $x(n)$ 的值都能被精确地确定,则称这一类信号为确定性信号;反之,如果信号随时间的变化具有随机性,没有确定的规律,则称之为随机信号。有关随机信号的分析方法将在第 2 章进行阐述。

4. 一维信号、二维信号及多通道信号

若信号 $x(n)$ 仅仅是时间 n 这一个变量的函数,那么 $x(n)$ 为一维时间信号。信号 $x(m, n)$ 是变量 m 和 n 的函数,为二维信号。例如一幅数字化了的图像, m 和 n 是在 x 方向和 y 方向的离散值,它们分别代表了不同方向的距离, $x(m, n)$ 表示了坐标 (m, n) 处图像的灰度。

$$\mathbf{x} = [x_1(n), x_2(n), \dots, x_m(n)]^T$$

式中 $(\cdot)^T$ 代表转置, n 是时间变量,如果 m 代表通道数,那么也称 \mathbf{x} 是一个多通道信号。 \mathbf{x} 的每一个分量 $x_i(n), i=1, 2, \dots, m$ 都代表了一个一维信号源。例如,在医院做常规心电图检查时,12个电极可同时给出12导联的信号。医生在检查这些心电信号时,不仅要检查各导联心电图的形态,还要检查各个导联之间的关系。

一维、二维及多通道信号又都可以分别对应确定性信号、随机信号、周期与非周期信号,使得信号呈现复杂的特性。

近50年来,随着计算机软件技术的飞速发展,数字信号处理(Digital Signal Processing, DSP)技术得到了较大的发展,并广泛应用于各行各业中。一个数字信号处理系统的大致结构图如图1-1所示,简而言之,数字信号处理就是利用计算机或专用设备,以数值计算的方法对信号进行采集、变换、分析、综合、估计、识别等加工处理,以达到提取信息和便于利用的目的。数字信号处理技术及设备具有灵活、精确、抗干扰能力强、造价低、设备尺寸小、速度快、稳定性好等突出优点,这些都是模拟信号处理技术所无法比拟的。

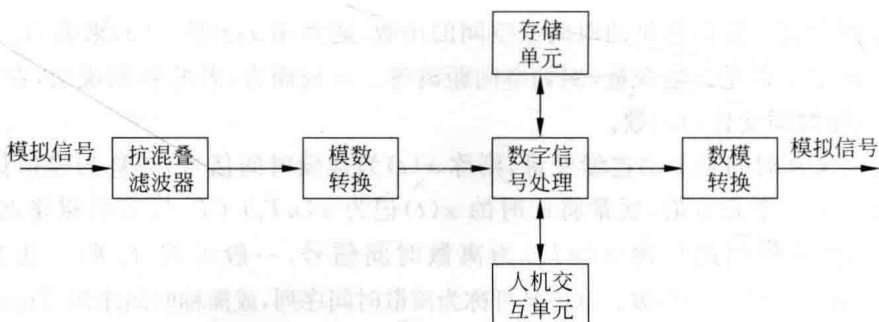


图 1-1 数字信号处理系统示意图

数字信号处理的研究范围非常广泛,可以从不同角度对信号处理的研究领域进行分类。例如,从应用领域可将信号处理分为语音信号处理、图像信号处理等,如图1-2所示;从信号处理目的的角度,可分为采样与量化、压缩编码、模式识别等。根据信号特征的不同,研究者开发出不同的理论工具,从而形成不同的研究领域。例如,自适应信号用于处理具有时变特征的信号;高阶统计量用于非高斯信号处理。图1-2给出了不同角度划分信号处理研究领域的例子。需要指出的是,不同应用领域的信号处理可能有相同的要求,例如语音信号处理有识别、压缩、编码等要求,图像信号处理有同样的要求。但实现同一目的的信号处理在不同应用领域所采用的理论工具可能不同,例如语音信号压缩编码一般采用傅里叶变换,而图像压缩会用到小波变换、离散余弦变换等更多样的变换域分析。近三十年来随着半导体技术的发展,数字信号处理的硬件成本大幅度降低,数字信号处理系统已经进入人们的日常生活,可以说只要有电子信息设备的地方,就能看到数字信号处理的应用。

本章将首先对数字信号处理的基本概念和内容进行一些归纳和总结,作为后续引入随机信号处理的基础。这些知识来自“信号与系统”和“数字信号处理”两门课程。在后面章节的论述中,将会以“信号与系统”和“数字信号处理”等课程为基础展开论述,不具备这方面基础知识的读者,可参考信号与系统、确定性数字信号处理等方面的书籍。

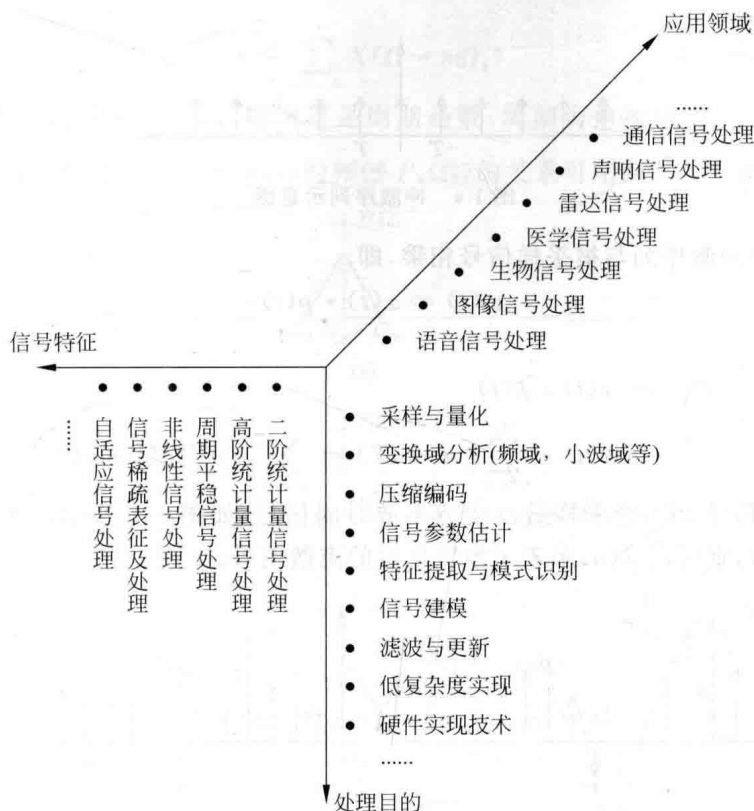


图 1-2 信号处理研究领域的分类

1.2 离散时间信号

1.2.1 连续时间信号的采样

现实生活中的信号一般是连续的,要对连续信号进行数字处理,首先必须对信号进行采样。采样器的工作原理如图 1-3(a)所示,连续时间信号 $x(t)$ 经过电子开关 S,开关每隔 T 秒短暂地闭合一次,这样输出将得到周期为 T 的脉冲串,称 T 为采样周期, $f_s = \frac{1}{T}$ 为采样频率(简称采样率)。采样器的数学模型可用图 1-3(b)来表示。



图 1-3 信号采样原理图

对采样过程的理论分析一般基于冲激序列采样,这时 $p(t)$ 为周期 T 的脉冲序列,如图 1-4 所示,其数学表达式为

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \tag{1-1}$$

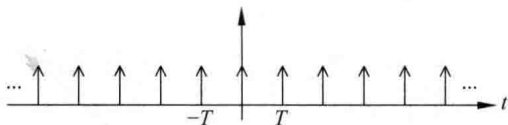


图 1-4 冲激序列示意图

采样的过程就是冲激序列与被采样信号相乘,即

$$x_s(t) = x(t) \cdot p(t) \quad (1-2)$$

则

$$\begin{aligned} x_s(t) &= x(t) \cdot p(t) \\ &= x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \delta(t - nT) \end{aligned} \quad (1-3)$$

这样,连续时间信号 $x(t)$ 经采样后已变为离散时间信号,如图 1-5 所示。通常可将采样周期 T 归一化为 1,则可用 $x(n)$ 来表示数字化后的离散信号。

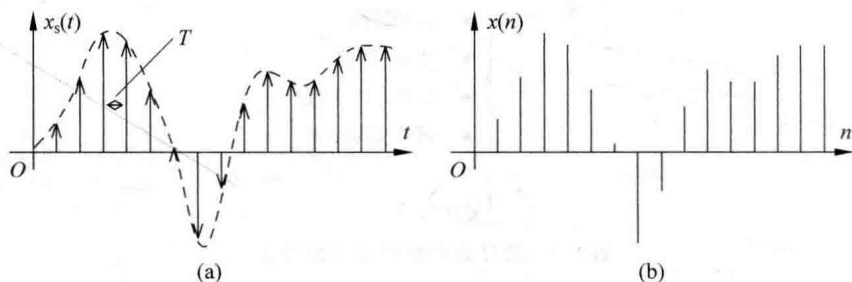


图 1-5 连续时间信号离散化过程

1.2.2 采样定理

连续信号经过采样后,其信息量是否会丢失?或者说我们能否从采样后的数字信号恢复连续信号?如果能恢复,要具备什么条件?采样定理将清楚地回答这一问题。

对连续信号 $x(t)$ 进行傅里叶(Fourier)变换,可以得到其频谱为

$$X(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt \quad (1-4)$$

设采样频率为 $f_s = \frac{1}{T}$,采样角频率为 $\Omega_s = \frac{2\pi}{T}$,根据傅里叶级数的知识,把 $p(t)$ 看成周期信号,可以推导出 $p(t)$ 的傅里叶级数展开为

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{jm\frac{2\pi}{T}t} = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{jm\Omega_s t} \quad (1-5)$$

所以,采样后的冲激序列信号 $x_s(t)$ 的频谱为

$$\begin{aligned} \hat{X}(\Omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) p(t) e^{-j\Omega t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sum_m e^{jm\Omega_s t} \cdot e^{-j\Omega t} dt \\ &= \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j(\Omega - m\Omega_s)t} dt \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X(\Omega - m\Omega_s) \quad (1-6)$$

可见,连续信号经过采样后,其频谱将是周期函数,周期为角频率 Ω_s 。假设连续信号 $x(t)$ 是限带信号,则 $X(\Omega)$ 、 $\hat{X}(\Omega)$ 及 $p(t)$ 的频谱 $P_s(\Omega)$ 的关系可用图 1-6 来表示。

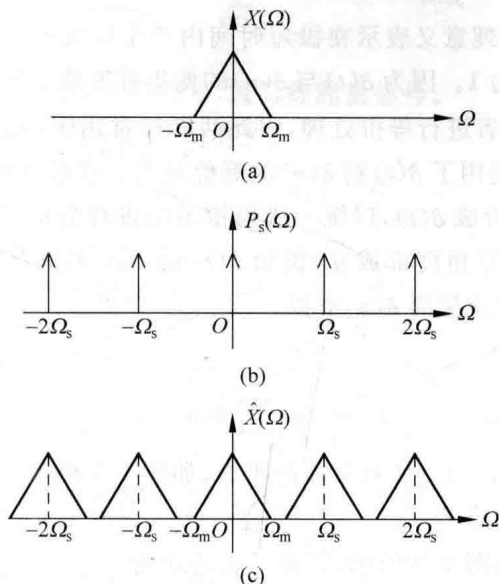


图 1-6 (a) $x(t)$ 的频谱,其最高频率为 Ω_m ; (b) $p(t)$ 的频谱; (c) 采样后信号的频谱

由图 1-6 可见,对于低通信号,如果最高频率 Ω_m 小于 $\Omega_s - \Omega_m$,则 $x_s(t)$ 的频谱不会出现“混叠现象”。这样, $\hat{X}(\Omega)$ 中包含了完整的 $X(\Omega)$ 信号,可对 $\hat{X}(\Omega)$ 中一个周期的频谱进行傅里叶反变换,完整地恢复原始的连续信号 $x(t)$ 。

在采样过程中,为避免出现混叠现象,必须使

$$\Omega_s - \Omega_m \geq \Omega_m \quad (1-7)$$

即

$$\Omega_s \geq 2\Omega_m \quad (1-8)$$

这一结论就是著名的奈奎斯特(Nyquist)采样定理。

由采样定理可知,最小采样率应为 $\Omega_s = 2\Omega_m$ 。该采样率称为奈奎斯特采样率(取样率),称信号中的最高频率 Ω_m 为奈奎斯特频率, $\Omega_0 = \Omega_s/2$ 为折叠频率。当然,一般的连续信号不一定是理想的限带信号,这样就不可避免地会发生混叠现象。此时处理的办法是对信号进行低通滤波后再采样。具体办法可参阅相关文献。

1.2.3 几种常见的数字信号

1. 单位抽样信号

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} \quad (1-9)$$

该信号又称为狄拉克(Dirac)函数,如图 1-7 所示。

$\delta(n)$ 在数字信号系统中有非常重要的作用,犹如连续时间信号系统中的单位冲激 $\delta(t)$ 一样。但 $\delta(t)$ 与 $\delta(n)$ 的定义是不同的。 $\delta(t)$ 的定义是建立在积分意义上的,即

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (1-10)$$

且 $t \neq 0$ 时, $\delta(t) = 0$ 。其物理意义表示在极短时间内产生巨大的“冲激”, $\delta(n)$ 则是在 $n = 0$ 时定义为1。因为 $\delta(t)$ 与 $\delta(n)$ 的傅里叶变换结果相同,

在进行频域分析时可将两者进行等价处理,因此两者经常用于沟通模拟信号和离散信号的频谱分析,例如图1-5就是用了 $\delta(t)$ 到 $\delta(n)$ 的等价关系。在包含模拟信号和离散信号的混合系统中,经常将 $\delta(n)$ 等价成 $\delta(t)$,以统一成模拟系统进行分析。要特别指出的是, $\delta(t)$ 到 $\delta(n)$ 的等价关系不是对所有角度都成立,例如 $\delta(t)$ 到 $\delta(n)$ 不满足能量守恒关系,从能量定义式出发时, $\delta(t)$ 不能计算能量而 $\delta(n)$ 可以。

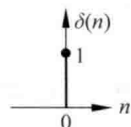


图 1-7 单位抽样信号

2. 脉冲序列

$$P(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(n-k) \quad (1-11)$$

$P(n)$ 是 $\delta(n)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 上所有移位的组合,如图1-8所示。

3. 单位阶跃信号 $u(n)$

单位阶跃信号 $u(n)$ 如图1-9所示,其数学表达式为

$$u(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} \quad (1-12)$$

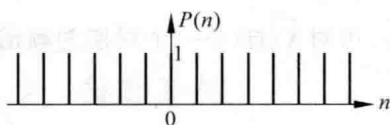


图 1-8 脉冲序列信号

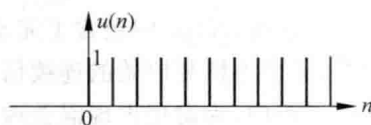


图 1-9 单位阶跃信号

同样地, $u(n)$ 也可被视为由 $\delta(n)$ 位移而成。

$$u(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(n-k) \quad (1-13)$$

4. 正弦信号

$$x(n) = A \sin(2\pi f_0 n T_s + \varphi) \quad (1-14)$$

式中, f_0 为频率, T_s 为采样周期,令 $\omega = 2\pi f_0 T_s$,则

$$x(n) = A \sin(\omega n + \varphi) \quad (1-15)$$

其中 A 为实值幅度, φ 代表初始相位。

5. 复正弦信号

$$x(n) = A e^{j(\omega n + \varphi)} = A \cos(\omega n + \varphi) + j A \sin(\omega n + \varphi) \quad (1-16)$$

6. 指数信号

$$x(n) = a^{|n|} \quad (1-17)$$

a 为常数且一般 $|a| < 1$ 。

1.2.4 信号的能量、功率及周期性

1. 信号的能量

离散时间信号 $x(n)$ 的能量定义为

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 \quad (1-18)$$

如果 $E < \infty$, 称 $x(n)$ 为能量有限信号, 或简称能量信号。

对连续信号 $x(t)$, 其能量可用积分来定义。

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \quad (1-19)$$

2. 信号的功率

信号 $x(n)$ 、 $x(t)$ 的功率分别定义为

$$P = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |x(n)|^2 \quad (1-20)$$

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt \quad (1-21)$$

如果 $P < \infty$, 则称信号为功率有限信号, 简称功率信号。

3. 信号的周期性

对离散信号 $x(n)$, 如果对任意的 n , 均有

$$x(n) = x(n+kN), \quad N \text{ 为正整数} \quad (1-22)$$

则称 $x(n)$ 是周期为 N 的周期信号。对于连续信号, 下式成立

$$x(t) = x(t+KT), \quad K \text{ 为整数} \quad (1-23)$$

1.2.5 信号的基本运算

1. 加法运算

$$y(n) = x_1(n) + x_2(n) \quad (1-24)$$

2. 减法运算

$$y(n) = x_1(n) - x_2(n) \quad (1-25)$$

3. 乘法运算

$$y(n) = x_1(n) \cdot x_2(n) \quad (1-26)$$

4. 放大(缩小)运算

$$y(n) = c \cdot x(n), \quad c \text{ 为常数} \quad (1-27)$$

5. 位移(延时、预测)运算

$$y(n) = x(n \pm m), \quad m \text{ 为正整数} \quad (1-28)$$

6. 卷积运算

$x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 的卷积定义为

$$\begin{aligned} y(n) &= x_1(n) \otimes x_2(n) \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m) x_2(n-m) \end{aligned}$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(n-m)x_2(m) \quad (1-29)$$

7. 相关运算

对能量信号, $x(n)$ 的时间自相关函数定义为

$$R_x(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)x^*(n-m) \quad (1-30)$$

其中上标“*”表示共轭操作, 对功率信号, $x(n)$ 的时间自相关函数定义为

$$R_x(m) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N} \sum_{n=-N}^N x(n)x^*(n-m) \quad (1-31)$$

$x(n)$ 与 $y(n)$ 的互相关函数定义为

$$\text{能量信号: } R_{xy}(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y^*(n-m) \quad (1-32)$$

$$\text{功率信号: } R_{xy}(m) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N} \sum_{n=-N}^N x(n)y^*(n-m) \quad (1-33)$$

对能量信号, 由卷积的定义不难看出

$$R_x(m) = x(m) \otimes x^*(-m) \quad (1-34)$$

$$R_{xy}(m) = x(m) \otimes y^*(-m) \quad (1-35)$$

1.3 信号的傅里叶变换

傅里叶(Fourier)变换是分析信号频域特征的重要工具。1822年, 法国科学家傅里叶指出, 一个任意函数 $x(t)$ 都可以分解为无穷多个不同频率的正弦信号的和, 从此开创了傅里叶分析方法这一重要领域。任何信号经过傅里叶变换后可以得到信号的频谱。傅里叶分析方法包括连续时间信号和离散时间信号的傅里叶变换及傅里叶级数, 其中离散傅里叶变换(DFT)是在频域及时域都取值离散的变换, 易于计算机实现。快速傅里叶变换(FFT)至今仍然是数字信号处理中最基本、最重要的运算, 广泛应用于谱分析、相关、卷积、滤波器设计等领域。对傅里叶分析方法, 许多信号处理的书籍都有论述, 在本节我们对其进行简要介绍和归纳。

1.3.1 连续时间信号的傅里叶变换

1. 非周期连续时间信号的傅里叶变换

对一连续信号 $x(t)$, 若 $x(t)$ 是绝对可积的, 即

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty \quad (1-36)$$

则 $x(t)$ 的傅里叶变换存在并定义为

$$X(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t} dt \quad (1-37)$$

逆变换

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega)e^{j\Omega t} d\Omega \quad (1-38)$$

时间连续的信号 $x(t)$ 的频谱是一个非周期连续谱。

2. 周期连续时间信号的傅里叶变换

设信号 $x(t)$ 的周期为 T , 其傅里叶变换定义为

$$X(k\Omega_0) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-jk\Omega_0 t} dt \quad (1-39)$$

式中, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \infty, \Omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ 。

反变换定义为

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k\Omega_0) e^{jk\Omega_0 t} \quad (1-40)$$

由式(1-39)可见, 周期连续时间信号的频谱是离散谱。

1.3.2 离散时间信号的傅里叶变换

1. 非周期离散时间信号的傅里叶变换

非周期离散时间信号 $x(n)$ 的傅里叶变换定义为

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} \quad (1-41)$$

反变换为

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \quad (1-42)$$

$X(e^{j\omega})$ 是一周期函数(周期为 2π), 上式是在 $X(e^{j\omega})$ 的一个周期内求积分所得。这里数字信号的频率用 ω 来表示。注意 ω 与 Ω 有所不同, 一般用 Ω 表示模拟角频率。如果离散信号是由模拟信号采样得到, 则模拟角频率和数字角频率的关系为 $\omega = \Omega T_s$, 其中 T_s 为采样间隔。

式(1-41)又称为离散时间傅里叶变换(DTFT)。

2. 周期信号的离散傅里叶级数(DFS)

周期信号的离散傅里叶级数定义为

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \bar{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \quad (1-43)$$

反变换为

$$\bar{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}nk} \quad (1-44)$$

$\bar{x}(n)$ 及 $\tilde{X}(k)$ 都是以 N 为周期的函数, 所以 n 及 k 的取值均可以是 $(-\infty, \infty)$ 之间的整数。

1.3.3 离散傅里叶变换及其性质

离散傅里叶变换可以被看作是在 DFS 的基础上发展而来的。对 DFS 在频域及时域各取一个周期可得

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (1-45)$$