Banach代数上元素线性组合的广义Drazin逆

王宏兴　覃永辉　刘晓冀　著

科学出版社

Banach 代数上元素线性组合的广义 Drazin 逆

王宏兴　覃永辉　刘晓冀　著

科 学 出 版 社
北　京

内 容 简 介

本书主要讨论了 Banach 代数上元素线性组合的广义 Drazin 逆、算子分块矩阵的广义 Drazin 逆和广义 Drazin 逆的扰动问题等.

本书可以作为数理类研究生和从事矩阵广义逆研究的科技工作者的参考资料.

图书在版编目(CIP)数据

Banach 代数上元素线性组合的广义 Drazin 逆/王宏兴, 覃永辉, 刘晓冀著. —北京: 科学出版社, 2018.8

ISBN 978-7-03-058062-7

Ⅰ. ①B… Ⅱ. ①王… ②覃… ③刘… Ⅲ. ①巴拿赫代数-Drazin 逆-研究 Ⅳ. ①O177.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018) 第 132717 号

责任编辑: 胡庆家 张茂发 / 责任校对: 邹慧卿
责任印制: 张 伟 / 封面设计: 蓝正设计

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

北京虎彩文化传播有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2018 年 8 月第 一 版 开本: 720 × 1000 B5
2018 年 8 月第一次印刷 印张: 12
字数: 250 000

定价: 88.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

作 者 简 介

王宏兴 广西民族大学副教授，东南大学博士后，2011 年博士毕业于华东师范大学数学系. 目前主要从事矩阵广义逆理论等方面的教学和科研工作. 在 *Linear Algebra and its Applications*, *Linear and Multilinear Algebra* 和《计算数学》等国内外刊物上发表 10 余篇学术论文.

覃永辉 桂林电子科技大学，2016 年博士毕业于上海大学数学系.目前主要从事数值分析等方面的研究工作. 在 *Applied Numerical Mathematics*, *Numerical Methods for Partial Differential Equations* 和《数学学报》等国内外刊物上发表 10 余篇学术论文.

刘晓冀 广西民族大学教授，华东师范大学博士后，2003 年博士毕业于西安电子科技大学. 目前主要从事矩阵代数、算子代数等方面的教学和科研工作. 在 *Mathematics of Computation*, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, *Linear Algebra and its Applications*, 《数学学报》《计算数学》和《数学年刊》等国内外刊物上发表 80 余篇学术论文.

序

1958 年, 美国数学家 M. P. Drazin 提出了结合半群和环上的 Drazin 逆. 为了将方程的 Drazin 逆推广到一般的矩阵上, Cline 和 Greville 在 1980 年提出了一般矩阵的加权 Drazin 逆.

南京大学曾远荣 (Y. Y. Tseng) 先生研究了 Hilbert 空间上线性算子广义逆, 引入了 Hilbert 空间上线性算子广义逆的概念, 为无限维 Hilbert 空间上线性算子广义逆的研究做出了重大贡献, 后来人们称这种广义逆为 Tseng 广义逆. 关于 Banach 空间算子广义逆问题的研究则较晚, 乔三正研究 Banach 空间中线性算子的 Drazin 逆; M. Z. Nashed 对算子的值域与零空间的闭包拓扑可补的情形进行了研究; 马吉溥、王玉文、黄强联等都深入研究了 Banach 空间算子广义逆问题, 取得了丰硕的成果.

分块矩阵的 Drazin 逆的表示在微分方程、自动化、数值分析、经济学、控制论等诸多方面都有着深刻的应用背景. 1983 年, Campbell 将求二阶奇异微分方程组显式的问题归结为分块矩阵 Drazin 逆的表示问题. 分块矩阵的 Drazin 逆的表示可以用来处理和的 Drazin 逆的表示问题. 1958 年, Drazin 证明了: 当 $ab = ba = 0$ 时, $(a+b)^D = a^D + b^D$. 这导致了和的 Drazin 逆的表示的研究. 事实上, 这一问题可以转化成一个矩阵的形式. Drazin 的上述结果实际上可以用矩阵的形式表述成

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^D = \begin{pmatrix} a^D & 0 \\ 0 & b^D \end{pmatrix}.$$

为了推广 Drazin 的结果, 1977 年, Hartwig 和 Shoaf 与 Meyer 和 Rose 分别给出了三角矩阵 Drazin 逆的表达式. 这一结果非常重要, 成为分块矩阵 Drazin 逆的表示问题的研究基础和动力.

Banach 空间上有界线性算子矩阵的 Drazin 逆及广义 Drazin 逆的表示问题也开始被学者们所关注. 这可用来解决 Markov 链、抽象的 Cauchy 问题、无穷维线性微分方程、迭代过程中的许多问题.

本书主要讨论了 Banach 代数上元素线性组合的广义 Drzain 逆、算子分块矩阵的广义 Drazin 逆和广义 Drazin 逆的扰动问题等.

由于关于广义 Drazin 逆问题研究的文献非常丰富, 本书不可能包括所有的参考文献, 而主要包括较新的和较精练的内容, 而且列出的参考文献也不太全面. 因此对于做了很多这方面的工作但未列入参考文献的作者, 在这里表示歉意.

本书的编写和出版得到国家自然科学基金 (11361009, 11401243)、广西八桂学者项目、广西创新团队项目、中国博士后基金 (2015M581690)、广西自然科学基金 (2018GXNSFAA138181)、广西民族大学研究生教育创新计划项目以及广西民族大学的大力支持.

由于编者水平的限制, 书中不妥之处在所难免, 希望读者能及时指出, 便于以后纠正.

王宏兴　覃永辉　刘晓冀

2018 年 4 月于广西民族大学

符 号 表

- $\mathcal{A}$: 有单位元 1 的 Banach 代数
- $\mathcal{A}^{-1}$: $\mathcal{A}$ 上所有可逆元素的集合
- $\mathcal{A}^{D}$: $\mathcal{A}$ 上所有 Drazin 可逆元素的集合
- $\mathcal{A}^{\mathrm{d}}$: $\mathcal{A}$ 上所有广义 Drazin 可逆元素的集合
- $\mathcal{A}_{g}$: $\mathcal{A}$ 上所有群可逆元素的集合
- $\mathcal{A}^{\mathrm{nil}}$: $\mathcal{A}$ 上所有幂零元素的集合
- $\mathcal{A}^{\mathrm{qnil}}$: $\mathcal{A}$ 上所有拟幂零元素的集合
- $\mathcal{A}^{\bullet}$: $\mathcal{A}$ 上所有幂等元素的集合
- $\mathbb{N}$: 自然数的全体
- $\mathbb{R}$: 实数的全体
- $\mathbb{C}$: 复数的全体
- $\mathbb{R}^{m\times n}$: $m\times n$ 实元素矩阵的全体
- $\mathbb{C}^{m\times n}$: $m\times n$ 复元素矩阵的全体
- $\bar{A}$: 矩阵 A 的共轭
- A^{T}: 矩阵 A 的转置
- A^{*}: 矩阵 A 的共轭转置 (即 $\bar{A}^{\mathrm{T}}$)
- A^{-1}: 矩阵 A 的逆
- $A^{\dagger}$: 矩阵 A 的 Moore-Penrose 逆
- $A^{\sharp}$: 矩阵 A 的群逆
- A^{D}: 矩阵 A 的 Drazin 逆
- $\mathbb{C}_{n,\sharp}$: n 阶群可逆矩阵的全体
- I_n: $n\times n$ 单位矩阵. 当不会引起混淆时, 也记为 I
- $0_{m\times n}$: $m\times n$ 零矩阵. 当不会引起混淆时, 也记为 0. 0_m 为 m 阶零向量
- $R(A)$: 由矩阵 A 的所有列向量所张成的子空间
- $N(A)$: 矩阵 A 的零空间
- P_A: 到 $R(A)$ 上的正交投影算子
- $r(A)$: 矩阵 A 的秩
- $\mathrm{ind}(A)$: 矩阵 A 的指标, 即满足 $\mathrm{rank}(A^{k+1})=\mathrm{rank}(A^{k})$ 的最小非负整数
- $\lambda(A)$: 矩阵 A 的特征值全体
- $\in$: 元素属于
- $\subseteq$: 集合含于

目　　录

第1章 引　　言

1.1 发展和进程

1958 年, Drazin [102] 在结合环和半群上引进 Drazin 逆. 如果 Drazin 逆存在, 则必唯一. 而后 Greville [107] 和 Cline [63] 研究矩阵 Drazin 逆的性质. 1991 年, Harte [114] 对于有 1 结合环 R 给出拟幂零元素的定义. 作为 Drazin 逆概念的推广, Harte 给出广义 Drazin 逆的定义. 1996 年, Koliha [123] 重新定义环上的广义 Drazin 逆. Koliha 证明了在有 1 的 Banach 代数上, 上述两种广义 Drazin 逆的定义是等价的, 并进一步研究 Banach 空间上的有界线性算子的广义 Drazin 逆. 广义 Drazin 逆及其推广已经得到广泛的研究, 在 Markov 链、微分方程、迭代过程、统计学等应用数学领域都有着广泛的应用.

1.1.1 算子和的广义 Drazin 逆

1958 年, Drazin [102] 在环上证明了当 $ab = ba = 0$ 时, $(a+b)^D = a^D + b^D$. Djordjević 和 Wei [99] 将这一结论推广到 Banach 空间的有界线性算子上, 得到在 $PQ = 0$ 情况下 $P+Q$ 的广义 Drazin 逆的表达式. Castro-González [55] 利用矩阵的核心 —— 幂零分解, 在 $P^DQ = 0$, $PQ^D = 0$, $Q^\pi PQP^\pi = 0$ 条件下给出两个矩阵 $P+Q$ 的 Drazin 逆的表达式. Cvetković-Ilić [54] 利用 Peiree 分解, 将这一结果推广到有 1 的 Banach 代数上. 2006 年, Cvetković-Ilić, Djordjević和魏益民 [76] 利用同样的方法, 在 $ab^\pi = a, b^\pi ba^\pi = b^\pi b, b^\pi a^\pi ba = b^\pi a^\pi ab$ 的条件下, 给出 $a+b$ 的广义 Drazin 逆的表达式. Castro-González, Dopazo 和 Matínez-Serrano [49] 在 $P^2Q = PQ^2 = 0$, PQ 为 Drazin 可逆的条件下给出 Banach 空间上的有界线性算子 $P+Q$ 的 Drazin 逆的表达式. 2010 年, Castro-González 和 Matrínez-Serrano [58] 将上述结论推广到了一般的 Banach 代数上, 得到了在 $a^Db = 0$, $a^2ba^\pi = ab^2a^\pi = 0$ 条件下 $a+b$ 的广义 Drazin 逆的表达式. 邓春源 [80] 在 $PQ = \lambda QP$ (其中 λ 为非零复数) 的条件下证明 Banach 空间上的两个有界线性算子 $P-Q$ 是 Drazin 可逆的当且仅当 $W = PP^D(P-Q)QQ^D$ 是 Drazin 可逆的, 并给出 $P-Q$ 的 Drazin 逆的表达式. 另外, 在 $PQP = PQ$ 这种情况下讨论 $P+Q$ 的 Drazin 逆. Castro-González [54] 将 [80] 的结果推广到 Banach 代数上, 给出在若干特定条件下 $a+b$ 的广义 Drazin 逆的表达式. 在 [89] 中, 邓春源和魏益民首先对于 Banach 空间上两个交换的有界线性算子 P, Q, 证明了 $P+Q$ 是广义 Drazin 可逆的当且仅当 $I+P^DQ$ 是广义

Drazin 可逆的, 并给出了 $P+Q$ 的广义 Drazin 逆的表达式. 然后, 对于一般的有界线性算子 P, Q, 分别在下列两个条件下给出了 $P+Q$ 的广义 Drazin 逆的表达式:

(1) $\|QP^D\|<1$, $P^\pi QPP^D=0$, $P\pi PQ=P^\pi QP$ 且 $P^\pi Q$ 为广义 Drazin 可逆;

(2) $F^2=F$, $FP=PF$, $(I-F)QF=0$, $(PQ-QP)F=0$, $(I-F)(PQ-QP)=0$, 并且 $(P+Q)F$ 和 $(1-F)(P+Q)$ 是广义 Drazin 可逆的.

另外邓春源 [81] 对于 Hilbert 空间上两个幂等算子P 和 Q, 在条件 $PQP=0$; $PQP=P$; $PQP=PQ$; $PQ=QP$ 之一被满足的情况下, 分别给出了 $P+Q$, $P-Q$ 的 Drazin 逆的表达式. Zhang 等 [202] 在 [81] 的基础上研究了 Banach 代数中两个幂等元P, Q 的线性组合的 Drazin 逆的表示. Patrńcio 和 Hartwig [160] 研究了环上元素在满足一定条件下的 Drazin 逆的表示. 张道畅 [211] 在一定的条件下, 利用广义 Schur 补的 Drazin 逆给出修正矩阵的 Drazin 逆的表示并讨论四个矩阵之和的 Drazin 逆的表示, 以及带有幂等元的修正矩阵的 Drazin 逆的表示等.

1.1.2 分块算子矩阵广义 Drazin 逆的表示

设 $B(X,Y)$ 为从 X 到 Y 的所有的有界线性算子的集合, 其中 X,Y 表示复 Banach 空间. 记 $B(X,X)$ 为 $B(X)$, 以及算子矩阵 $M=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, 其中 $A\in B(X)$, $B\in B(Y,X)$, $C\in B(X,Y)$, $D\in B(Y)$. 众所周知, 在有限维 Banach 空间上, 算子矩阵的广义 Drazin 逆的表示问题与分块矩阵的 Drazin 逆的表示问题是等价的. 记 $N=\begin{pmatrix} E & G \\ F & 0 \end{pmatrix}$, 其中 E 是方阵, F,G 是合适阶数的矩阵.

邓春源和魏益民在 [89] 中给出算子矩阵 N 在满足下面条件下的广义 Drazin 逆的表达式:

(1) $EGF=0$ 或 $GEF=0$;

(2) $GFE^\pi=0,(1-E^\pi)GF=0$;

(3) $EE^\pi G=0,GF(I-E^\pi)=0$.

进一步, 邓春源在 [84] 中给出了算子矩阵 N 在满足下面条件下的广义 Drazin 逆的表达式:

(1) $GFE^\pi=0,FE^{\mathrm d}G$ 可逆;

(2) E 和 $F^2E^{\mathrm d}+E^{\mathrm d}EGFE^{\mathrm d}$ 是广义 Drazin 可逆的, $FE^{\mathrm d}G=0$, $GFE^\pi=0$;

(3) $(I-E^\pi)GFE^\pi=0$, $EE^\pi G=0$, $FE^\pi G=0$, $FE^{\mathrm d}G$ 可逆;

(4) $(I-E^\pi)GFE^\pi=0$, $FEE^\pi=0$, $FE^\pi G=0$, $FE^{\mathrm d}G$ 可逆,

并在 F,G 广义 Drazin 可逆时, 给出满足下面条件的算子矩阵 N 的广义 Drazin 逆的表达式:

(1) $(I-G^\pi)EF^\pi E=0$, $(I-G^\pi)EF^\pi G=0$, $GFF^\pi=0$, $G^\pi EF^\pi$ 是广义 Drazin 可逆的, 且 $R(G^\pi)=R(F^\pi)$;

(2) $EG^\pi E(I-F^\pi)=0$, $FG^\pi E(I-F^\pi)=0$, $GFF^\pi=0$, $G^\pi EF^\pi$ 是广义 Drazin 可逆的, 且 $R(G^\pi)=R(F^\pi)$.

在 [98] 中, Djordjević 和 Stanimirović 给出三角算子矩阵 $M_1=\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$ 和 $M_2=\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$ 的广义 Drazin 逆的表达式, 并在 $BC=BD=DC=0$ 的条件下给出 M 的广义 Drazin 逆的表达式. 随后, 众多学者研究了在不同条件下 M 的广义 Drazin 逆的表示问题. Deng, Cvetković-Ilić 和 Wei [86] 在下面的条件下给出了关于广义 Drazin 逆的表示:

(1) $BC=0$, $BD=0$;

(2) $BC=0$, $DC=0$;

(3) $BC=0$, $CB=0$, $DC=CA$;

(4) $CB=0$, $CA^2A^{\mathrm{d}}=0$, $AA^\pi B=0$;

(5) $BC=0$, $CB=0$, $CA^2A^{\mathrm{d}}=D^2D^{\mathrm{d}}C$, $AA^\pi B=BDD^\pi$;

(6) $BC=0$, $CB=0$, $CA^2A^{\mathrm{d}}=D^\pi DC$, $AA^\pi B=BD^2D^{\mathrm{d}}$;

(7) $BC=0$, $D^2D^{\mathrm{d}}C=0$, $BDD^\pi=0$;

(8) $A^\pi BC=0$, $CA^\pi B=0$, $AA^\pi B=A^\pi BD$, $D-CA^{\mathrm{d}}B$ 是非奇异的;

(9) $A^\pi BC=0$, $CA^\pi B=0$, $AA^\pi B=A^\pi BD$, $D-CA^{\mathrm{d}}B=0$.

Castro-González, Dopazo 以及 Matrínez-Serrano 等在 [49] 中, 基于如下条件给出了算子矩阵 M 的广义 Drazin 逆的表达式:

(1) $BCA=0$, $BD=0$, $DC=0$;

(2) $BCA=0$, $BD=0$, D 是幂零的;

(3) $BCA=0$, $BD=0$, BC 是幂零的.

Cvetković 和 Milovanović 在 [79] 中, 基于如下条件给出了算子矩阵 M 的广义 Drazin 逆的表达式:

(1) $ABC=0$, $DC=0$, $BD=0$;

(2) $ABC=0$, $DC=0$, D 是幂零的;

(3) $ABC=0$, $DC=0$, BC 是幂零的.

郭丽 [204] 在下面的条件下给出 Banach 空间上算子矩阵 M 的广义 Drazin 逆的表达式:

(1) $BD^{\mathrm{d}}=0$, $BD^iC=0$, $i=0,1,2,\cdots$;

(2) $ABC=0$, $BD^{\mathrm{d}}=0$, $BD^iC=0$, $i=0,1,2,\cdots$.

Mosić [155] 在下面的条件下给出 Banach 空间上算子矩阵M 的广义 Drazin 逆的表达式:

(1) $BD=0$, $A(BC)^{\pi}=0$, $C(BC)^{\pi}=0$, $(BC)^{\pi}B=0$;

(2) $BD=0$, $(BC)^{\pi}A=0$, $C(BC)^{\pi}=0$, $(BC)^{\pi}B=0$;

(3) $DC=0$, $A(BC)^{\pi}=0$, $C(BC)^{\pi}=0$, $(BC)^{\pi}B=0$;

(4) $DC=0$, $(BC)^{\pi}A=0$, $C(BC)^{\pi}=0$, $(BC)^{\pi}B=0$.

1.2 记号和引理

设 $\mathcal{A}$ 为一个有单位元 1 的 Banach 代数, 则 $a\in\mathcal{A}$ 的 Drazin 逆为元素 $x\in\mathcal{A}$ (记为 a^D), 对某些非负整数 k, 满足

$$xax=x,\quad ax=xa,\quad a^{k+1}x=a^k. \tag{1.2.1}$$

最小的 k 是 a 的指标, 记为 $\operatorname{ind}(a)$. 当 $\operatorname{ind}(a)=1$ 时, Drazin 逆被称作群逆且记为 a^g 或 $a^{\#}$.

条件 (1.2.1) 等价于

$$xax=x,\quad ax=xa,\quad a-a^2x\in\mathcal{A}^{\mathsf{nil}}. \tag{1.2.2}$$

Koliha 引进了 Banach 代数上广义 Drazin 逆的概念. 若 (1.2.2) 中的第三个条件 $a-a^2x\in\mathcal{A}^{\mathsf{nil}}$ 修正为 $a-a^2x\in\mathcal{A}^{\mathsf{qnil}}$, 但其他条件不变. 因此, 元素 $x\in\mathcal{A}$ 为 a 的广义 Drazin 逆 (写成 a^{d}), 它满足

$$xax=x,\quad ax=xa,\quad a-a^2x\in\mathcal{A}^{\mathsf{qnil}}. \tag{1.2.3}$$

集合 $\mathcal{A}^{\mathsf{d}}$ 由所有存在 a^{d} 的元素 $a\in\mathcal{A}$ 组成. 若 $a-a^2b\in\mathcal{A}^{\mathsf{nil}}$, 则元素 a 的 Drazin 逆指标 $\operatorname{ind}(a)$ 是 $a-a^2b$ 的幂零指标, 否则 $\operatorname{ind}(a)=\infty$. 众所周知, 对元素 $a\in\mathcal{A}$, a^{d} 存在当且仅当 $0\notin\operatorname{acc}(\sigma(a))$ 且 a^{d} 唯一.

引理 1.2.1 [76,引理2.1]　令 $\mathcal{A}$ 是一个 Banach 代数, $a,b\in\mathcal{A}^{\mathrm{qnil}}$. 若 $ab=ba$ 或 $ab=0$, 则 $a+b\in\mathcal{A}^{\mathrm{qnil}}$.

引理 1.2.2　令 $\mathcal{A}$ 是一个 Banach 代数和, 令 $a\in\mathcal{A}^{\mathsf{d}}$, $a=\begin{pmatrix} a_1 & 0\\ 0 & a_2\end{pmatrix}_p$, 其中 $p=aa^{\mathsf{d}}$. 对于某些 $b\in\mathcal{A}$, 若 $x\in p\mathcal{A}$ 和 $a_1x=b$, 则 $x=a^{\mathsf{d}}b$ (特别地, 若 $a_1x=0$, 则 $x=0$). 对于某些 $c\in\mathcal{A}$, 若 $y\in\mathcal{A}p$ 和 $ya_1=c$, 则 $y=ca^{\mathsf{d}}$ (特别地, 若 $ya_1=0$, 则 $y=0$).

证明　从 $a\in\mathcal{A}^{\mathsf{d}}$ 我们得到 $a_1\in\mathcal{A}^{\mathsf{d}}$, $a_1^{\mathsf{d}}=a^{\mathsf{d}}$ 和 $aa^{\mathsf{d}}=a_1a_1^{\mathsf{d}}$. 存在 $u\in\mathcal{A}$ 使得 $x=pu$. 由于 $b=a_1x$, 我们得到 $a^{\mathsf{d}}b=a^{\mathsf{d}}a_1x=aa^{\mathsf{d}}x=px=ppu=pu=x$. y 的证明是相似的.

引理 1.2.3[76] 令 $\mathcal{A}$ 是一个 Banach 代数, $a\in\mathcal{A}^{\mathrm{qnil}}, b\in\mathcal{A}^{\mathrm{d}}$. 若 $ab=ba$, $a=ab^{\pi}$, 则 $a+b\in\mathcal{A}^{\mathrm{d}}$ 和 $(a+b)^{\mathrm{d}}=b^{\mathrm{d}}$.

引理 1.2.4[92] 设 $a,b\in\mathcal{A}^{\mathrm{d}}$ 满足 $ab=ba$. 则 $a+b\in\mathcal{A}^{\mathrm{d}}$ 当且仅当 $1+a^{\mathrm{d}}b\in\mathcal{A}^{\mathrm{d}}$. 此情况, 有

$$(a+b)^{\mathrm{d}}=a^{\mathrm{d}}(1+a^{\mathrm{d}}b)bb^{\mathrm{d}}+b^{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(-b)^{n}(a^{\mathrm{d}})^{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}(b^{\mathrm{d}})^{n+1}(-a)^{n}a^{\pi}.$$

引理 1.2.5[53] 设 $a,b\in\mathcal{A}$ 广义 Drazin 可逆且 $ab=0$, 则 $a+b$ 广义 Drazin 逆和

$$(a+b)^{\mathrm{d}}=b^{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}b^{n}(a^{\mathrm{d}})^{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}(b^{\mathrm{d}})^{n+1}a^{n}a^{\pi}.$$

引理 1.2.6[53] 设 $b\in\mathcal{A}$ 是 Drazin 可逆的, $a\in\mathcal{A}^{\mathrm{qnil}}$, 以及 $ab^{\pi}=a$, $b^{\pi}ab=0$. 则

$$(a+b)^{\mathrm{d}}=b^{\mathrm{d}}+\sum_{n=0}^{\infty}(b^{\mathrm{d}})^{n+2}a(a+b)^{n}. \tag{1.2.4}$$

引理 1.2.7[53] 如果 $a,b\in\mathcal{A}$ 广义 Drazin 可逆, b 是拟幂零的且 $ab=0$, 则 $a+b$ 是广义 Drazin 逆的且

$$(a+b)^{\mathrm{d}}=\sum_{n=0}^{\infty}b^{n}(a^{\mathrm{d}})^{n+1}.$$

设 $a\in\mathcal{A}$ 和 $p\in\mathcal{A}$ 幂等($p=p^2$). 则

$$a=pap+pa(1-p)+(1-p)ap+(1-p)a(1-p)$$

记

$$a_{11}=pap,\quad a_{12}=pa(1-p),\quad a_{21}=(1-p)ap,\quad a_{22}=(1-p)a(1-p).$$

设

$$a=\begin{pmatrix} pap & pa(1-p)\\ (1-p)ap & (1-p)a(1-p)\end{pmatrix}_p=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}_p. \tag{1.2.5}$$

设 a^{π} 是 a 相对应 $\{0\}$ 的谱幂等元. 令 $a\in\mathcal{A}^{\mathrm{d}}$ 表示成如下矩阵形式:

$$a=\begin{pmatrix} a_{11} & 0\\ 0 & a_{22}\end{pmatrix}_p,$$

对应 $p = aa^{\mathrm{d}} = 1 - a^{\pi}$, 其中 a_{11} 在代数 $p\mathcal{A}p$ 上可逆和 a_{22} 在代数 $(1-p)\mathcal{A}(1-p)$ 上是拟幂零元的. 利用这个表示, a 的 Drazin 逆可表示为

$$a^{\mathrm{d}} = \begin{pmatrix} (a_{11})_{p\mathcal{A}p}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_p,$$

其中 $(a_{11})_{p\mathcal{A}p}^{-1}$ 是 a_{11} 在子代数 $p\mathcal{A}p$ 中的逆元.

引理 1.2.8[78]　设 $x, y \in \mathcal{A}$ 和

$$x = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}_p, \quad y = \begin{pmatrix} b & 0 \\ c & a \end{pmatrix}_{(1-p)}.$$

(1) 若 $a \in (p\mathcal{A}p)^{\mathrm{d}}$ 和 $b \in ((1-p)\mathcal{A}(1-p))^{\mathrm{d}}$, 则 x 和 y 是 Drazin 可逆的且

$$x^{\mathrm{d}} = \begin{pmatrix} a^{\mathrm{d}} & u \\ 0 & b^{\mathrm{d}} \end{pmatrix}_p, \quad y^{\mathrm{d}} = \begin{pmatrix} b^{\mathrm{d}} & 0 \\ u & a^{\mathrm{d}} \end{pmatrix}_{(1-p)}, \tag{1.2.6}$$

其中 $u = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(a^{\mathrm{d}})^{n+2}cb^n b^{\pi} + \sum\limits_{n=0}^{\infty} a^{\pi}a^n c(b^{\mathrm{d}})^{n+2} - a^{\mathrm{d}}cb^{\mathrm{d}}$.

(2) 若 $x \in \mathcal{A}^{\mathrm{d}}$ 和 $a \in (p\mathcal{A}p)^{\mathrm{d}}$, 则 $b \in ((1-p)\mathcal{A}(1-p))^{\mathrm{d}}$ 和 $x^{\mathrm{d}}, y^{\mathrm{d}}$ 为 (1.2.6).

引理 1.2.9[78]　令 $\mathcal{A}$ 是一个 Banach 代数, $x, y \in \mathcal{A}$, $p \in \mathcal{A}$ 是一个幂等. 假设 x 和 y 被表示为

$$x = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & b \end{pmatrix}_p, \quad y = \begin{pmatrix} b & c \\ 0 & a \end{pmatrix}_p.$$

(i) 如果 $a \in (p\mathcal{A}p)^{\mathrm{d}}$, $b \in (\overline{p}\mathcal{A}\overline{p})^{\mathrm{d}}$, 则 x 和 y 是广义 Drazin 逆的, 而

$$x^{\mathrm{d}} = \begin{pmatrix} a^{\mathrm{d}} & 0 \\ u & b^{\mathrm{d}} \end{pmatrix}_p, \quad y^{\mathrm{d}} = \begin{pmatrix} b^{\mathrm{d}} & u \\ 0 & a^{\mathrm{d}} \end{pmatrix}_p, \tag{1.2.7}$$

其中

$$u = \sum_{n=0}^{\infty}(b^{\mathrm{d}})^{n+2}ca^n a^{\pi} + \sum_{n=0}^{\infty} b^{\pi}b^n c(a^{\mathrm{d}})^{n+2} - b^{\mathrm{d}}ca^{\mathrm{d}}. \tag{1.2.8}$$

(ii) 若 $x \in \mathcal{A}^{\mathrm{d}}$ 和 $a \in (p\mathcal{A}p)^{\mathrm{d}}$, 则 $b \in (\overline{p}\mathcal{A}\overline{p})^{\mathrm{d}}$, 而 x^{d}, y^{d} 通过 (1.2.7) 和 (1.2.8) 给出.

根据 [53], 我们得到: $\mathscr{P} = \{p_1, p_2, \cdots, p_n\}$ 是代数 $\mathcal{A}$ 中幂等的一个整体系统. 若对于所有 i 满足 $p_i^2 = p_i$, $p_ip_j = 0$, 若 $i \neq j$, 以及 $p_1 + \cdots + p_n = 1$. 给定代数 $\mathcal{A}$ 中幂等的一个整体系统 $\mathscr{P}$, 我们考虑包含所有元素属于代数 $\mathcal{A}$ 的矩阵 $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^n$

的集合 $\mathcal{M}_n(\mathcal{A},\mathscr{P})$, 其中对于所有 $i,j\in\{1,\cdots,n\}$ 满足 $a_{ij}\in p_i\mathcal{A}p_j$. 设 $p_i\mathcal{A}p_i$ 是 $\mathcal{A}$ 的子代数且单位为 p_i. [53, Lemma 2.1] 中证明了 $\phi:\mathcal{A}\to\mathcal{M}_n(\mathcal{A},\mathscr{P})$, 且

$$\phi(x)=\begin{pmatrix} p_1xp_1 & p_1xp_2 & \cdots & p_1xp_n \\ p_2xp_1 & p_2xp_2 & \cdots & p_2xp_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_nxp_1 & p_nxp_2 & \cdots & p_nxp_n \end{pmatrix}_{\mathscr{P}}$$

等距且代数同构. 因此, 我们确定 $x=\phi(x)$, 其中 $x\in\mathcal{A}$. 另外一个有用 (虽然平凡) 的等式为

$$x=\sum_{i,j=1}^{n}p_ixp_j,\quad \forall\, x\in\mathcal{A}.$$

令 X 和 Y 是一个复 Banach 代数空间. 定义 $\mathcal{B}(X,Y)$ 为所有从 X 到 Y 有界线性算子的集合和 $\mathcal{B}(X,X)$ 到 $\mathcal{B}(X)$ 的缩写. 一个算子 $A\in\mathcal{B}(X)$ 被称为广义 Drazin 逆, 当存在一个算子 $A^{\mathrm{d}}\in\mathcal{B}(X)$ 使得

$$A^DAA^D=A^D,\quad A^DA=AA^D,\quad A-A^2A^D\text{是拟幂零的}. \tag{1.2.9}$$

一个算子 $A\in\mathcal{B}(X)$ 被称为拟幂零的, 当谱 $\sigma(A)=\{0\}$.

设分块 2×2 算子矩阵

$$M=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \tag{1.2.10}$$

其中 $A\in\mathcal{B}(X)$ 和 $D\in\mathcal{B}(Y)$ 是广义 Drazin 可逆的.

引理 1.2.10[127] *令 BC 和 CB 的广义 Drazin 逆存在. 则*

$$A^{\mathrm{d}}=\begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{d}}=\begin{pmatrix} 0 & (BC)^{\mathrm{d}}B \\ C(BC)^{\mathrm{d}} & 0 \end{pmatrix}.$$

引理 1.2.11[56, 127] *令 A 和 D 是广义 Drazin 逆的和 M 是矩阵形式* (1.2.10). *若 $BC=0$ 和 $BD=0$, 则*

$$M^{\mathrm{d}}=\begin{pmatrix} A^{\mathrm{d}} & (A^{\mathrm{d}})^2B \\ \Sigma_0 & D^{\mathrm{d}}+\Sigma_1B \end{pmatrix},$$

其中

$$\Sigma_k=\sum_{i=0}^{\infty}(D^{\mathrm{d}})^{i+k+2}CA^iA^{\pi}+D^{\pi}\sum_{i=0}^{\infty}D^iC(A^{\mathrm{d}})^{i+k+2}-\sum_{i=0}^{k}(D^{\mathrm{d}})^{i+1}C(A^{\mathrm{d}})^{k-i+1},\quad k\geqslant 0. \tag{1.2.11}$$

引理 1.2.12[127] 令 A 和 D 是广义 Drazin 逆的和 M 是矩阵形式 (1.2.10). 若 $CA=0$ 和 $CB=0$, 则

$$M^{\mathrm{d}}=\begin{pmatrix} A^{\mathrm{d}}+X_2C & X_1 \\ (D^{\mathrm{d}})^2C & D^{\mathrm{d}} \end{pmatrix},$$

其中

$$X_k=\sum_{i=0}^{\infty}(A^{\mathrm{d}})^{i+k+1}BD^iD^{\pi}+A^{\pi}\sum_{i=0}^{\infty}A^iB(D^{\mathrm{d}})^{i+k+1}-\sum_{i=0}^{k-1}(A^{\mathrm{d}})^{i+1}B(D^{\mathrm{d}})^{k-i},\quad k\geqslant 1. \tag{1.2.12}$$

引理 1.2.13[117] 若 M 是形式为 (1.2.10) 的矩阵, 使得 A 是广义 Drazin 逆的, 对于任何非负正整数 i, D 是拟幂零的和 $BD^iC=0$, 则 M 是广义 Drazin 逆和

$$M^{\mathrm{d}}=\begin{pmatrix} A^{\mathrm{d}} & \Phi \\ \Psi & \Psi A\Phi \end{pmatrix},$$

其中

$$\Phi=\sum_{i=0}^{\infty}(A^{\mathrm{d}})^{i+2}BD^i \quad 和 \quad \Psi=\sum_{i=0}^{\infty}D^iC(A^{\mathrm{d}})^{i+2}.$$

引理 1.2.14 设 P 是指标为 $t>1$ 的幂零矩阵, $S=\sum\limits_{i=0}^{t-1}a_i^{[1]}P^i$. 若 $a_i^{[1]}=1$, 则

$$S^n=\sum_{i=0}^{t-1}a_i^{[n]}P^i,\quad n\geqslant 2,$$

其中 $a_i^{[n]}=\sum\limits_{u=0}^{i}a_u^{[n-1]}, i=0,\cdots,t-1$.

证明 该结论可应用归纳法得到.

一个 2×2 分块矩阵 M 记为

$$M=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \tag{1.2.13}$$

其中 $A\in\mathbb{C}^{m\times m}$, $D\in\mathbb{C}^{p\times p}$, $B\in\mathbb{C}^{m\times p}$ 和 $C\in\mathbb{C}^{p\times m}$. 如果 A 是非奇异的, 则 M 中的 A 经典的 Schur 补如下: [174]

$$S=D-CA^{-1}B. \tag{1.2.14}$$

在 [22], Benítez 和 Thome 考虑了

$$N = \begin{pmatrix} A^- + A^-BS^-CA^- & -A^-BS^- \\ -S^-CA^- & S^- \end{pmatrix} \tag{1.2.15}$$

的表示和在 (1.2.13) 中给出 N 是矩阵 M 的广义 Schur 补形式, $S = D - CA^-B$ 对于一些固定的广义逆 $A^- \in A\{1\}$, $S^- \in S\{1\}$, 其中 M 中 A 的广义 Schur 补是 S. 在 [22, 定理 2], Benítez 和 Thome 通过 Schur 补研究了 (1.2.13) 中 M 群逆的表示, 其中 (1.2.14) 由

$$S = D - CA^\sharp B \tag{1.2.16}$$

代替, 在 [175, 定理 3.2] 中有类似的结果. 在一个有奇异广义 Schur 补的 (1.2.13) 中 2×2 分块复矩阵的 Drazin 逆已在 [116, 131, 189] 中考虑过, 其中

$$S = A - CA^D D. \tag{1.2.17}$$

在 [93] 中 Deng 和 Wei 研究了一个 2×2 分块算子矩阵的表示.

在 [97] 中, 作者给出了元素 $a \in \mathscr{A}$ 的分块矩阵形式的一些定义. 设 $a \in \mathscr{A}$ 和定义 $\mathscr{A}$ 中所有幂等元素 $s \in \mathscr{A}^\bullet$, 见 [97, Chapter VII]. 则我们记

$$a = sas + sa(1-s) + (1-s)as + (1-s)a(1-s)$$

和使用标记

$$a_{11} = sas, \quad a_{12} = sa(1-s), \quad a_{21} = (1-s)as, \quad a_{22} = (1-s)a(1-s). \tag{1.2.18}$$

对于任意元素 $a \in \mathscr{A}$ 的表示给出了以下矩阵形式:

$$a = \begin{pmatrix} sas & sa(1-s) \\ (1-s)as & (1-s)a(1-s) \end{pmatrix}_s = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}_s.$$

引理 1.2.15[156] 设 $a \in \mathcal{A}$. 则

(i) $\sigma(a)$ 为 $\mathbb{C}$ 的非空闭子集.

(ii)(谱投影定理) 如果 f 为多项式, 则

$$\sigma(f(a)) = f(\sigma(a)).$$

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$ 当且仅当 $\rho(a) < 1$.