有限群的素数幂阶子群及其应用

王丽芳　著

科学出版社

有限群的素数幂阶子群及其应用

王丽芳 著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书主要介绍有限群的素数幂阶子群及其若干应用. 首先, 介绍素数幂阶子群对有限群的超可解性、可解性、幂零性的影响. 其次, 利用素数幂阶子群的局部性质给出子群性质可传递的有限群结构的刻画. 最后, 主要介绍子群的交换性和正规性对有限群结构的影响.

本书可供高等院校数学专业群论方向的研究生及有关研究人员阅读, 也可供高等院校教师和基础数学工作者阅读.

图书在版编目(CIP)数据

有限群的素数幂阶子群及其应用/王丽芳著. —北京: 科学出版社, 2018.6
ISBN 978-7-03-058060-3

Ⅰ. ①有… Ⅱ. ①王… Ⅲ. ①有限群-子群-研究 Ⅳ. ①O152.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018) 第 132776 号

责任编辑: 李静科 / 责任校对: 邹慧卿
责任印制: 张 伟 / 封面设计: 陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

北京教图印刷有限公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2018 年 6 月第 一 版 开本: 720 × 1000 1/16
2018 年 6 月第一次印刷 印张: 12 1/4
字数: 247 000

定价: 88.00 元
(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前　　言

群是代数学中最基本也是最重要的概念之一, 它在数学本身以及现代科学技术的很多方面都有广泛的应用. 在群论的众多分支中, 有限群论无论从理论本身还是从实际应用来说都占据着较为突出的地位. 同时, 它也是近年来研究较多、较活跃的一个数学分支, 有着十分丰富的内容. 在有限群的诸多研究方法中, 利用子群性质来研究有限群的结构是一种十分有效的方法.

著名的 Sylow 定理告诉我们, 有限群的素数幂阶子群对于有限群的结构具有非常重要的影响. 例如, 有限非交换单群的结构几乎被它的 Sylow 2-子群的结构所决定. 再如, 有限群为幂零群的充分必要条件是它的 Sylow 子群均为正规子群. 有限群为可解群的充分必要条件是它的 Sylow 子群均为可补子群.

众所周知, 正规子群是群论中一个十分重要的概念, 它在群论研究中起着关键的作用: 比如说, 正规子群与一个群的主群列 (或合成群列) 密切相关, 由 Jordan-Hölder 定理可知, 一个群的任意两个主群列 (或合成列) 的长度相同且同构. 利用群扩张理论, 我们可以通过一个群的主因子 (或合成因子) 给出该群的比较粗略的结构. 我们也可以通过一个群的主因子 (或合成因子) 来确定该群的一些特性, 如: 若一个群的主因子均为交换群, 则该群为可解群; 若一个群的主因子均为循环群, 则该群为超可解群; 若一个群的主因子均为中心主因子, 则该群为幂零群等.

正规子群在群论中所起的重要作用及其本身的一些性质引起了许多群论学者的兴趣, 人们也取得了丰富的结果. 局部子群的许多思想与方法都是基于正规子群的概念 (见 [38, Chapter X]). 人们把正规子群的概念进行推广, 得到一些新的子群概念, 并利用这些新的子群性质来研究有限群.

幂零群、超可解群、可解群是群论中的重要研究对象, 人们用各种各样的方法来研究这些群. 利用素数幂阶子群的性质来研究有限群的超可解性、可解性、幂零性是一种十分有效的方法, 已经获得了许多丰富的结果. 最初, 人们利用 Sylow 子群的极小子群或极大子群的一些性质来研究有限群的结构. 近年来, 人们把以上结论进行了推广, 即利用 Sylow 子群的指定阶子群的一些性质对有限群的结构进行研究.

本书是作者近几年工作的一个总结, 主要从结构方面研究有限群, 并利用素数幂阶子群的一些性质来研究有限群的结构. 本书分 5 章, 第 1—3 章介绍素数幂阶子群对有限群结构的影响, 主要利用子群的 s-半置换性、c^*-可补性、X-s-半置换性、弱正规性等子群性质研究群的超可解性、可解性、幂零性. 第 4 章利用素数幂

阶子群的局部性质给出子群性质可传递的有限群的结构的刻画. 第 5 章主要介绍子群的交换性和正规性对有限群结构的影响.

本书完成之际, 要衷心感谢山西师范大学的张勤海教授. 正是在他的指导下, 作者开始学习群论知识, 并逐步开展群论的研究工作. 作者参加工作后, 也是在张勤海教授的指导下进入有限 p-群的研究领域. 本书的最终完成是跟张老师的悉心指导和无私帮助分不开的. 感谢作者的博士生导师、中山大学的王燕鸣教授. 本书第 1—4 章中相当大一部分内容取自作者的博士学位论文, 这些工作都是在王老师的精心指导下完成的. 感谢国家自然科学基金 (项目编号: 11101252) 的资助. 感谢科学出版社的李静科编辑为本书出版所做的辛勤工作.

由于作者水平有限, 难免存在疏漏之处, 敬请读者指正!

作　者

2017 年 11 月于山西师范大学

目　录

第1章　素数幂阶子群与超可解群

利用素数幂阶子群的性质来研究有限群的幂零性、超可解性、可解性是一种十分有效的方法, 已经取得了许多丰富的结果. Itô证明了, 如果 G 为奇阶群且 G 的所有极小子群均在 G 的中心 $Z(G)$ 中, 则 G 是幂零群 (见 [80]). Itô 的这一结果现已被许多学者进行了推广. Buckley 于 1970 年在文 [41] 中证明了下面的结论: 设群 G 为奇阶有限群, 若 G 的所有极小子群为 G 的正规子群, 则 G 为超可解群. Srinivasan 在文 [133] 中证明了: 设群 G 为有限群, 若 G 的 Sylow 子群的极大子群在 G 中正规, 则 G 为超可解群. 在文 [6], [25], [45], [92], [131], [156], [157], [158], [162], [186] 中, 作者们将 Buckley 及 Srinivasan 的结果中的正规性条件减弱为拟正规、s-拟正规、半置换、s-半置换、c-正规、c-可补等条件, 均得到了群 G 的超可解性. 近年来, 群系是许多群论学者关注的研究对象, 一个群满足什么样的条件时该群才能在预先给定的群系中, 这一问题引起了许多学者们的兴趣. 对于含有超可解群系的饱和群系, 人们利用子群的正规性、拟正规性、s-拟正规性、s-半置换性、c-正规性、c-可补性等性质将上述结果分别推广到群系中, 见文 [8], [9], [10], [18], [103], [104], [186].

本章主要利用素数幂阶子群的 s-半置换性、c^*-可补性、X-s-半置换性、弱正规性等概念对有限群的超可解性进行了研究. 另外, 利用素数幂阶子群对可分解为两个或多个子群的乘积的有限群的结构也进行了探究.

本章的结果可见文 [94], [134], [142], [145], [147], [176], [186].

1.1　s-半置换子群与超可解群

本节主要利用素数幂阶子群的 s-半置换性来研究群的超可解性. 下面我们给出 s-半置换子群的一些性质.

定义 1.1.1　群 G 的子群 H 称为 s-半置换子群, 若对任意的 $p \mid |G|$, 只要 $(p,|H|)=1$, 就有 $PH=HP$, 其中 $P\in \mathrm{Syl}_p(G)$.

引理 1.1.1 [47, 引理 1, 引理 2]　设 G 为有限群, H 为 G 的 s-半置换子群.

(1) 若 $H\leq K\leq G$, 则 H 在 K 中 s-半置换;

(2) 若 H 为 p-群, $N\trianglelefteq G$, 则 HN/N 在 G/N 中 s-半置换;

(3) 设 π 为素数集合, N 为 G 的正规 π'-子群且 H 为 G 的 π-子群, 则 HN/N 为 G/N 的 s-半置换子群.

引理 1.1.2 [93, 引理 2.6]　设 N 为群 G 的可解正规子群. 若 G 的含于 N 的极小正规子群不含于 $\Phi(G)$, 则 N 的 Fitting 子群 $F(N)$ 为 G 的含于 N 的极小正规子群的直积.

由定义直接验证可得如下结论.

引理 1.1.3　设 A, B 在 G 中 s-半置换, 且 $AB = BA$, 则 AB 在 G 中 s-半置换.

引理 1.1.4　设 $H \leq G, N \lhd G$. 若 S/N 为 T/N 的极大子群, 其中 $T/N \in \mathrm{Syl}_p(HN/N)$, 则存在 $R \in \mathrm{Syl}_p(H)$, R 的极大子群 P_1, 使得 $T/N = RN/N, S/N = P_1N/N$.

证明　设 $P \in \mathrm{Syl}_p(H)$. 因 $H \cap N \lhd H$, 故 $P \cap (H \cap N) = P \cap N \in \mathrm{Syl}_p(H \cap N)$. 从而 $|H \cap N| = |P \cap N||H \cap N|_{p'}$, 故

$$|HN/N : PN/N| = |HN : PN| = \frac{|H||P \cap N|}{|H \cap N||P|} = \frac{|P||H|_{p'}|P \cap N|}{|P||P \cap N||H \cap N|_{p'}} = \frac{|H|_{p'}}{|H \cap N|_{p'}}$$

为 p'-数. 另一方面, $|PN/N|$ 为 p-数, 故 $PN/N \in \mathrm{Syl}_p(HN/N)$. 由 Sylow 定理, 存在 $x = nh \in NH = HN$, 使 $T/N = (PN)^x/N = P^hN/N$. 而 $P^h \leq H^h = H$, 令 $R = P^h$, 则 $R \in \mathrm{Syl}_p(H)$, 且 $T/N = RN/N$.

设 S/N 为 $T/N = RN/N$ 的极大子群, 其中 $R \in \mathrm{Syl}_p(H)$. 由模律可知 $S = S \cap RN = (S \cap R)N$, 计算阶得

$$p = |RN/N : S/N| = |RN : S| = |RN : (S \cap R)N| = \frac{|R||N|}{|R \cap N|} \Big/ \frac{|R \cap S||N|}{|R \cap S \cap N|} = \frac{|R|}{|R \cap S|},$$

故 $R \cap S$ 为 R 的极大子群, 令 $P_1 = R \cap S$, 则 $S/N = (R \cap S)N/N$. □

引理 1.1.5　设 G 是有限群, N 为 G 的可解极小正规子群, 且 $N \not\leq \Phi(G)$. 若 N 的极大子群在 G 中 s-半置换, 则 N 为素数阶循环群.

证明　因为 $N \not\leq \Phi(G)$, 故存在 G 的极大子群 M, 使 $G = MN$. 由 $N \unlhd G$ 可得 $M \cap N \unlhd M$. 又 N 为初等交换群, 故 $M \cap N \unlhd N$, 从而 $M \cap N \unlhd G$. 由 N 的极小性可得 $M \cap N = 1$ 或 $M \cap N = N$. 若 $M \cap N = N$, 则 $G = M$, 与 M 的取法矛盾, 故 $M \cap N = 1$.

设 $|N| = p^a, M_p \in \mathrm{Syl}_p(M)$, 则 $P = NM_p \in \mathrm{Syl}_p(G)$. 取 P 的极大子群 P_1, 使 $M_p \leq P_1$, 则 $P_1 = P_1 \cap NM_p = (P_1 \cap N)M_p$. 由 $M_p \cap N \leq M \cap N$, 比较阶可得 $N_1 = N \cap P$ 为 N 的极大子群, 由题设知 N_1 在 G 中 s-半置换. 设 $|M| = p^\alpha p_1^{\alpha_1} \cdots p_s^{\alpha_s}$, $M_{p_i} \in \mathrm{Syl}_{p_i}(M)$, 由 $G = NM$ 可知 $M_{p_i} \in \mathrm{Syl}_{p_i}(G)$, 故 $N_1M_{p_i} = M_{p_i}N_1, i = 1, \cdots, s$. 从而

$$N_1M = N_1\langle M_p, M_{p_1}, \cdots, M_{p_s}\rangle = \langle M_p, M_{p_1}, \cdots, M_{p_s}\rangle N_1 = MN_1.$$

若 $N_1>1$, 因 $M\cap N=1$, 故 $M<MN_1$. 由 M 的极大性可知 $G=N_1M$, 与 $G=NM$ 且 $M\cap N=1$ 矛盾, 故 $N_1=1$, 从而 $|N|=p$, 即 N 为素数阶循环群. □

定理 1.1.1 设 $\mathcal{F}$ 为包含 $\mathcal{U}$ 的饱和群系, G 为有限群, 则下列条件等价:

(i) $G\in\mathcal{F}$;

(ii) 存在 G 的正规子群 H, 使得 $G/H\in\mathcal{F}$, 且 H 的 Sylow 子群的极大子群在 G 中正规;

(iii) 存在 G 的正规子群 H, 使得 $G/H\in\mathcal{F}$, 且 H 的 Sylow 子群的极大子群在 G 中拟正规;

(iv) 存在 G 的正规子群 H, 使得 $G/H\in\mathcal{F}$, 且 H 的 Sylow 子群的极大子群在 G 中 s-拟正规;

(v) 存在 G 的正规子群 H, 使得 $G/H\in\mathcal{F}$, 且 H 的 Sylow 子群的极大子群在 G 中半置换;

(vi) 存在 G 的正规子群 H, 使得 $G/H\in\mathcal{F}$, 且 H 的 Sylow 子群的极大子群在 G 中 s-半置换.

(vii) 存在 G 的正规子群 H, 使得 $G/H\in\mathcal{F}$, 且 H 的 Sylow 子群的极大子群在 G 中半正规.

证明 (i) ⇒ (ii). 在 G 中, 令 $H=1$ 可得.

(ii) ⇒ (iii) ⇒ (iv) ⇒ (v) ⇒ (vi) 由定义直接可得.

(ii) ⇒ (vii) ⇒ (vi) 由定义可得. 故只需证 (vi) ⇒ (i) 即可完成证明.

下证 (vi) ⇒ (i).

设 G 为极小阶反例, 分两种情形证明.

(1) H 为 p-群, p 为素数.

设 M 为 G 的任一非平凡正规子群. 若 $H\le M$, 则 $G/M\cong (G/H)/(M/H)\in\mathcal{F}$. 若 $H\not\le M$, 取 B/M 为 HM/M 的任一极大子群, 则 $B=M(H\cap B)$, 且 $p=|HM/M:B/M|=|HM:B|=|HM:M(H\cap B)=|H:H\cap B|$, 从而 $H\cap B$ 为 H 的极大子群. 由题设及引理 1.1.1 知 $B/M=(H\cap B)M/M$ 在 G/M 中 s-半置换. 而 $(G/M)/(HM/M)\cong G/HM\cong (G/H)/(HM/H)\in\mathcal{F}$, 故 G/M 满足假设. 由 G 的极小性可知 $G/M\in\mathcal{F}$, 从而 G 的非平凡商群均在 $\mathcal{F}$ 中.

取 N 为 G 的 $\mathcal{F}$-剩余, 则 $N\le H$, 且由 $\mathcal{F}$ 为饱和群系可知 $\Phi(G)=1, N$ 为 G 的唯一极小正规子群. 由 $\Phi(G)=1$ 可知, N, H 为初等交换群. 取 L 为 G 的极大子群, 使 $N\not\le L$, 则 $G=NL$, 且由 N 的极小正规性得 $N\cap L=1$. 由 $N\le H$ 可知 $G=HL$, 而 $H\cap L\trianglelefteq G$, 若 $H\cap L\ne 1$, 则 $N\le H\cap L$, 矛盾. 故 $H\cap L=1$, 从而 $H=N$. 由引理 1.1.5 可知 H 为 p 阶循环群. 若 $C_G(H)>H$, 则 $C_G(H)=H(C_G(H)\cap L)$, 从而 $1\ne C_G(H)\cap L\trianglelefteq HL=G$. 由 H 的极小性 $H\le C_G(H)\cap L$, 与 $H\cap L=1$ 矛

盾, 故 $C_G(H)=H$. 而 H 为 p 阶循环群, 故 $L\cong G/H=G/C_G(H)$ 为阶整除 $p-1$ 的循环群. 从而 $G\in\mathcal{U}\subseteq\mathcal{F}$, 矛盾.

(2) H 不为素数幂阶群.

由 s-半置换定义及引理 1.1.1 可知 H 的 Sylow 子群的极大子群在 H 中 s-半置换, 由文 [45, 定理 7.47] 可知 H 为超可解群, 从而 H 有正规 Sylow 子群 P. 故 $P\trianglelefteq G$. 因为 $(G/P)/(H/P)\cong G/H\in\mathcal{F}$, 且由引理 1.1.4 及引理 1.1.1 可知 H/P 的 Sylow 子群的极大子群在 G/P 中 s-半置换, 由 G 的极小性 $G/P\in\mathcal{F}$ 由 (1) 可得 $G\in\mathcal{F}$, 矛盾.

故极小反例不存在, 从而 $G\in\mathcal{F}$. □

注 1.1.1　(1) 定理1.1.1对于不包含 $\mathcal{U}$ 的饱和群系不成立. 例如, 设 $\mathcal{N}$ 为所有的幂零群组成的饱和群系, 令 $G=S_3$, $H=\langle(123)\rangle$, 则 $G/H\in\mathcal{N}$, 且 H 满足定理1.1.1的条件, 但 $G\notin\mathcal{N}$.

(2) 定理1.1.1中饱和群系这个条件也是必要的. 例如, 设 $\mathcal{F}$ 为所有满足超可解剩余 $G^{\mathcal{U}}$ 为初等交换群的群构成的群系, 显然 $\mathcal{U}\subseteq\mathcal{F}$, 但 $\mathcal{F}$ 不是饱和的. 令 $G=SL(2,3)$, $H=Z(G)$, 则 $G/H\cong A_4$, 故 $G/H\in\mathcal{F}$, 但 $G\notin\mathcal{F}$.

推论 1.1.1　设 G 为有限群, $H\trianglelefteq G, G/H$ 为超可解群, 且 H 的 Sylow 子群的极大子群在 G 中正规 (拟正规, s-拟正规, 半正规, 半置换, s-半置换), 则 G 为超可解群.

引理 1.1.6　设 p-群 R 在 G 中 s-半置换, 且 $R\lhd\lhd G$, 则 R 为 G 的 s-拟正规子群.

证明　首先证明 $R\leq O_p(G)$.

由 $R\lhd\lhd G$ 可知, 存在群列 $R\lhd H_1\lhd H_2\lhd\cdots\lhd H_n=G$. 因 $R\trianglelefteq H_1$, 由定义可知 $R\leq O_p(H_1)$, 而 $O_p(H_1)$ char $H_1\trianglelefteq H_2$, 故 $O_p(H_1)\trianglelefteq H_2$, 从而 $O_p(H_1)\leq O_p(H_2)$, 故有 $R\leq O_p(H_2)$, 依次类推可得 $R\leq O_p(H_n)=O_p(G)$.

然后证明 R 为 G 的 s-拟正规子群.

设 Q 为 G 的任意 Sylow q-子群. 若 $p=q$, 则由 $R\leq O_p(G)\leq Q$ 可知, $RQ=QR=Q$. 若 $p\neq q$, 则由 R 在 G 中 s-半置换可知 $RQ=QR$, 故由定义得 R 在 G 中 s-拟正规. □

引理 1.1.7 [9, 定理 1.4]　设 $\mathcal{F}$ 为包含 $\mathcal{U}$ 的饱和群系, G 可解, $H\trianglelefteq G, G/H\in\mathcal{F}$, 若 $F(H)$ 的 Sylow 子群的极大子群在 G 中 s-拟正规, 则 $G\in\mathcal{F}$.

定理 1.1.2　设 $\mathcal{F}$ 为包含 $\mathcal{U}$ 的饱和群系, G 可解, 则下列条件等价:

(i) $G\in\mathcal{F}$;

(ii) 存在 G 的可解正规子群 H, 使得 $G/H\in\mathcal{F}$, 且 $F(H)$ 的 Sylow 子群的极大子群在 G 中正规;

(iii) 存在 G 的可解正规子群 H, 使得 $G/H \in \mathcal{F}$, 且 $F(H)$ 的 Sylow 子群的极大子群在 G 中拟正规;

(iv) 存在 G 的可解正规子群 H, 使得 $G/H \in \mathcal{F}$, 且 $F(H)$ 的 Sylow 子群的极大子群在 G 中 s-拟正规;

(v) 存在 G 的可解正规子群 H, 使得 $G/H \in \mathcal{F}$, 且 $F(H)$ 的 Sylow 子群的极大子群在 G 中半置换;

(vi) 存在 G 的可解正规子群 H, 使得 $G/H \in \mathcal{F}$, 且 $F(H)$ 的 Sylow 子群的极大子群在 G 中 s-半置换;

(vii) 存在 G 的可解正规子群 H, 使得 $G/H \in \mathcal{F}$, 且 $F(H)$ 的 Sylow 子群的极大子群在 G 中半正规.

证明 (i) $\Rightarrow$ (ii). 在 G 中令 $H=1$ 可得.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (v) $\Rightarrow$ (vi) 由定义直接可得.

(ii) $\Rightarrow$ (vii) $\Rightarrow$ (vi) 由定义直接可得.

(vi) $\Rightarrow$ (iv) 由引理 1.1.6 直接可得.

(iv) $\Rightarrow$ (i) 由引理 1.1.7 直接可得. □

注 1.1.2 定理1.1.2中条件 H 可解不可去. 例如, 令 $G = H \times K$, 其中 $H = SL(2,5)$, $K \in \mathcal{U}$, 则 $|F(H)| = 2$ 且 $G/H \cong K \in \mathcal{U}$, 但 $G \notin \mathcal{U}$.

推论 1.1.2 设 G 为可解群, $H \trianglelefteq G, G/H$ 为超可解群, 且 $F(H)$ 的 Sylow 子群的极大子群在 G 中正规 (拟正规, s-拟正规, 半正规, 半置换, s-半置换), 则 G 为超可解群.

下面主要利用 Sylow p-子群的极大子群讨论有限群的 p-超可解性. 首先给出以下引理.

引理 1.1.8 设 P_1, P_2 为 G 的 p-子群, p 为素数, 若 P_1, P_2 在 G 中 s-半置换且 $P_1P_2 = P_2P_1$, 则

(i) P_1P_2 为 G 的 s-半置换子群;

(ii) $P_1 \cap P_2$ 为 G 的 s-半置换子群.

证明 (i) 设 $Q \in \mathrm{Syl}_q(G)$, 其中 $q \neq p$. 由题设可知, $P_1Q=QP_1, P_2Q=QP_2$. 由于 $P_1P_2 = P_2P_1$, 故 $(P_1P_2)Q = Q(P_1P_2)$. 从而 P_1P_2 为 G 的 s-半置换子群.

(ii) 设 $Q \in \mathrm{Syl}_q(G)$, 其中 $q \neq p$. 由 (i) 可知, $(P_1P_2)Q = Q(P_1P_2) = (P_1Q)(P_2Q)$. 计算阶可得

$$|(P_1P_2)Q| = |P_1P_2||Q| = \frac{|P_1||P_2||Q|}{|P_1 \cap P_2|} = \frac{|P_1Q||P_2Q|}{|P_1Q \cap P_2Q|} = \frac{|P_1||Q||P_2||Q|}{|P_1Q \cap P_2Q|}.$$

从而 $|P_1Q \cap P_2Q| = |P_1 \cap P_2||Q|$. 又因为 $(P_1 \cap P_2)Q \subseteq (P_1Q) \cap (P_2Q)$, 故 $(P_1 \cap P_2)Q = (P_1Q) \cap (P_2Q)$. 从而 $P_1 \cap P_2$ 在 G 中 s-半置换. □

引理 1.1.9 设 P 为 G 的初等交换 p-子群, 且 $|P| > p$, 则下列陈述等价:

(i) P 的子群均在 G 中 s-半置换;

(ii) P 的极大子群均在 G 中 s-半置换;

(iii) P 的极小子群均在 G 中 s-半置换.

证明 (i)⇒(ii). 显然.

(ii)⇒(iii). 设 N 为 P 的任意极小子群. 由于 P 为初等交换群, 故可设 $P = N \times A_1 \times \cdots \times A_s$. 令 $M_i = N \times A_1 \times \cdots \times A_{i-1} \times A_{i+1} \times \cdots \times A_s$, 则 M_i 为 P 的极大子群且 $N = \bigcap\limits_{i=1}^{s} M_i$. 由于 M_i 在 G 中 s-半置换, 故由引理 1.1.8(ii) 可知, N 在 G 中 s-半置换. (iii) 得证.

(iii)⇒(i). 设 A 为 G 的任意子群, 由于 P 为初等交换群, 故可设 $A = N_1 \times \cdots \times N_s$, 其中 N_i 为 p 阶循环群. 由于每个 N_i 在 G 中 s-半置换, 故由引理 1.1.8(i) 可知, A 为 G 的 s-半置换子群. □

定理 1.1.3 设 p 为整除 $|G|$ 的素数, $H \trianglelefteq G$ 且 G/H 为 p-超可解群. 若 H 的 Sylow p-子群的极大子群在 G 中 s-半置换, 则 G 为 p-超可解群.

证明 对 G 的阶作归纳法.

由 [47, 定理 2] 可知, G 为 p-可解群, 从而 H 为 p-可解群, 由 [170, 第 V 章, 定理 1.5] 可知, $O_{p'}(H) \neq 1$ 或者 $O_p(H) \neq 1$.

若 $O_{p'}(H) \neq 1$, 则考虑商群 $G/O_{p'}(H)$. 由引理 1.1.1 可知, $G/O_{p'}(H)$ 及 $H/O_{p'}(H)$ 满足定理条件, 故由归纳假设可得 $G/O_{p'}(H)$ 为 p-超可解群. 从而 G 为 p-超可解群.

若 $O_p(H) \neq 1$, 则在 $O_p(H)$ 中取 G 的极小正规子群 N. 考虑商群 G/N, 由引理 1.1.1 可知, H/N 的 Sylow p-子群的极大子群在 G/N 中 s-半置换, 从而 G/N 及 H/N 满足定理条件, 由归纳假设可得, G/N 为 p-超可解群. 由于全体 p-超可解群组成的群类为饱和群系, 故若 $N \leq \Phi(G)$, 则 G 为 p-超可解群.

若 $N \nleq \Phi(G)$, 则存在 G 的极大子群 M, 使得 $G = MN$. 由 N 的极小正规性可知 $M \cap N = 1$. 设 H_p 为 H 的 Sylow p-子群, 由于 $N \leq H_p$, 故由模律可知 $H_p = N(M \cap H_p)$.

取 G 的 Sylow p-子群 G_p 使得 $H_p \leq G_p$, 则 $G_p = N(M \cap G_p)$. 显然, $M \cap G_p = M_p \in \mathrm{Syl}_p(M)$, 从而有 M_p 是 G_p 的真子群. 取 G_p 的极大子群 Q 使得 $M_p \leq Q$. 由模律可得 $H_p = G_p \cap H_p = NM_p \cap H_p = N(M_p \cap H_p)$, $Q = G_p \cap Q = NM_p \cap Q = (N \cap Q)M_p$, 从而 $Q \cap H_p = ((N \cap Q)M_p) \cap (N(M_p \cap H_p)) = (N \cap Q)(M_p \cap (N(M_p \cap H_p))) = (N \cap Q)(M \cap N)(M_p \cap H_p) = (N \cap Q)(M_p \cap H_p)$, 最后一个等式是因为 $M \cap N = 1$. 由上可得 $|H_p : Q \cap H_p| = |N(M_p \cap H_p) : (N \cap Q)(M_p \cap H_p)| = |N : N \cap Q|$. 由于 $G_p = NQ$, 故 $|N : N \cap Q| = |G_p : Q| = p$, 从而 $|H_p : Q \cap H_p| = p$, 即 $R = Q \cap H_p$ 为

H_p 的极大子群. 显然 $RM_p = (N \cap Q)M_p = Q$. 由定理条件可知, R 在 G 中 s-半置换, 任取 M 的 Sylow q-子群 M_q, 其中 $p \neq q$, 则 M_q 也是 G 的 Sylow q-子群. 从而 $RM_q = M_qR$. 这样我们证明了 R 与 M 的任意 Sylow 子群可交换. 又因为 M 可由其 Sylow 子群生成, 故 $RM = MR$. 由 M 的极大性可知 $MR = G$ 或 M. 若 $MR = G$, 由 $R \leq Q$ 及 $M_q \leq Q$ 可知 $Q = (M \cap Q)R = M_pR \in \mathrm{Syl}_p(G)$, 这与 Q 的取法矛盾. 故 $MR = M$, 即 $R \leq M$. 由 $G = MN = MH_p$ 及 R 是 H_p 的极大子群可得, $|N| = |G : M| = |H_p : H_p \cap M| = |H_p : R| = p$, 从而 N 为 p 阶循环群.

由 G/N 为 p-超可解群及 $|N| = p$ 可得, G 为 p-超可解群. □

由定理 1.1.3 直接可得下述结论.

推论 1.1.3 *设 p 为整除 $|G|$ 的素数, $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$. 若 P 的极大子群在 G 中 s-半置换, 则 G 为 p-超可解群.*

由定义可知, 正规子群、拟正规子群、s-拟正规子群、半置换必为 s-半置换子群, 故由定理 1.1.3 可得如下推论.

推论 1.1.4 *设 p 为整除 $|G|$ 的素数, $H \trianglelefteq G$ 且 G/H 为 p-超可解群. 若 H 的 Sylow p-子群的极大子群在 G 中正规 (拟正规, s-拟正规或半置换), 则 G 为 p-超可解群.*

下面我们在 $F_p(G)$ 中用子群的 s-半置换性来讨论群的 p-超可解性.

定理 1.1.4 *设 G 为 p-可解群, p 为整除 $|G|$ 的素数. 若 $F_p(G)$ 的 Sylow p-子群的极大子群在 G 中 s-半置换, 则 G 为 p-超可解群.*

证明 设 G 为极小阶反例. 我们分以下四步证明.

(1) $O_{p'}(G) = 1$.

若 $O_{p'}(G) \neq 1$, 则考虑商群 $\overline{G} = G/O_{p'}(G)$. 显然, $F_p(\overline{G}) = F_p(G)/O_{p'}(G)$. 由引理 1.1.1 可知, $F_p(\overline{G})$ 的 Sylow p-子群的极大子群在 $\overline{G}$ 中 s-半置换, 且 $\overline{G}$ 为 p-可解群, 故由 G 的极小性可得 $\overline{G} = G/O_{p'}(G)$ 为 p-超可解群, 从而 G 为 p-超可解群, 矛盾. 故 $O_{p'}(G) = 1$.

因为 $O_{p'}(G) = 1$, 故由 $F_p(G)$ 的定义可知 $F_p(G) = O_{p'p}(G) = O_p(G)$.

(2) $\Phi(G) = 1$.

若 $\Phi(G) \neq 1$, 考虑商群 $G/\Phi(G)$. 由 [127, 定理 9.3.4] 可知 $F_p(G/\Phi(G)) = F_p(G)/\Phi(G)$, 由引理 1.1.1 可知 $G/\Phi(G)$ 满足定理条件, 由 G 的极小性可得 $G/\Phi(G)$ 为 p -超可解群. 由 [82, Chapter VI, 定理 8.6] 可知 G 为 p-超可解群, 矛盾. 从而 $\Phi(G) = 1$.

由 (2) 及引理 1.1.2 可知, $O_p(G)$ 为 G 的极小正规子群的直积.

(3) $O_p(G)$ 的极大子群在 G 中正规.

若存在 $O_p(G)$ 的极大子群 R 使得 R 不是 G 的正规子群. 任取 $Q \in \mathrm{Syl}_q(G)$, 其中 $p \neq q$, 由定理条件可知 $RQ = QR$, 又显然 R 为 G 的次正规子群, 从而

$Q \leq N_G(R)$. 由 Q 的任意性可得 $O^p(G) \leq N_G(R)$. 由于 R 在 G 中非正规, 故 $N_G(R)$ 为 G 的真子群. 取 G 的极大子群 M 使得 $N_G(R) \leq M$. 显然有 $O^p(G) \leq M$, 从而 $M \trianglelefteq G$ 且 $|G:M| = p$. 由于 $O_{p'}(M) \leq O_{p'}(G) = 1$ 且 $F_p(G) = O_p(G) \leq M$, 故 $F_p(M) = F_p(G) = O_p(G)$. 由引理 1.1.1 可知 $F_p(M)$ 的 Sylow p-子群的极大子群在 M 中 s-半置换. 显然, M 为 p-可解群. 故 M 满足定理条件. 由 G 的极小性可得 M 为 p-超可解群. 从而由 [171, 第 IX 章, 定理 1.8] 可知, M 的导群 M' 为 p-幂零群, 故 $M' \leq F_p(M) = O_p(G)$. 设 $M_p \in \mathrm{Syl}_p(M)$, 则 $M' \leq O_p(G) \leq M_p$, 从而 $M_p \trianglelefteq M$, 故 $M_p = O_p(M) = O_p(G)$.

设 $G_p \in \mathrm{Syl}_p(G)$, 则 $G = MG_p$ 且 $|G:M| = |G_p : M \cap G_p| = p$, 从而 $M_p = M \cap G_p$ 是 G_p 的极大子群, 显然有 $G_p' \leq O_p(G) = M_p$. 由 (2) 可知 $O_p(G)$ 为初等交换群. 又由于 $O_p(G)$ 的极大子群在 G 中 s-半置换, 故由引理 1.1.9 可得 G_p' 在 G 中 s-半置换. 设 H 为 G 的 p'-Hall 子群, 则 $G_p'H = HG_p'$, 其中 G_p' 为 G_p 的导群. 由 [82, Chapter VI, 引理 6.10] 可知, G 的 p-长 $l_p(G) \leq 1$. 由 (1) 知 $O_{p'}(G) = 1$, 故 $G_p \trianglelefteq G$, 从而 $G_p = O_p(G) \leq M$ 且 $G = MG_p = M < G$, 矛盾. 故 $O_p(G)$ 的极大子群在 G 中正规.

(4) 得出结论.

由于 $O_p(G)$ 为初等交换 p-群, 设 $O_p(G) = N_1 \times N_2 \times \cdots \times N_s$, 其中 N_i 为 p 阶循环群. 由 (3) 易得 $O_p(G)$ 的极小子群为 G 的正规子群, 从而 $N_i \trianglelefteq G$. 故 $1 \trianglelefteq N_1 \trianglelefteq N_1N_2 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq N_1N_2\cdots N_s = O_p(G)$ 为 G 的含于 $O_p(G)$ 的主群列, 且每个主因子为 p 阶循环群. 由 [82, Chapter VI, 引理 9.8] 可知, $G/C_G(O_p(G))$ 为超可解群. 又因为 G 为 p-可解群且 $O_{p'}(G) = 1$, 由 [127, 定理 9.3.1] 可得 $C_G(O_p(G)) \leq O_p(G)$. 从而 $G/O_p(G)$ 为超可解群. 又 $O_p(G)$ 超可解嵌入G, 故 G 为超可解群, 从而 G 为 p-超可解群. 矛盾.

综上所述, 极小反例不存在, G 为 p-超可解群. □

由定理 1.1.4 可得下述推论.

推论 1.1.5 设 p 为整除 $|G|$ 的素数, $H \trianglelefteq G$, 且 G/H 为 p-超可解群. 若 H 为 p-可解群, 且 $F_p(H)$ 的 Sylow p-子群的极大子群在 G 中 s-半置换, 则 G 为 p-超可解群.

证明 对 G 的阶 $|G|$ 作归纳法.

若 $O_{p'}(H) \neq 1$, 则商群 $G/O_{p'}(H)$ 满足题设条件, 由归纳假设可得 $G/O_{p'}(H)$ 为 p-超可解群. 从而 G 为 p-超可解群.

若 $O_{p'}(H) = 1$, 由于 H 为 p-可解群, 故 $O_p(H) \neq 1$, 从而 $F_p(H) = O_{p'p}(H) = O_p(H)$. 由定理 1.1.4 可知, H 为 p-超可解群, 从而由 [171, 第 IX 章, 定理 1.8] 可知, H 的导群 $H' \leq F_p(H) = O_p(H)$. 设 H_p 为 H 的 Sylow p-子群, 则有 $H' \leq H_p$, 从而 $H_p \trianglelefteq H$. 故有 $H_p = O_p(H)$. 最后由定理 1.1.3 可知 G 为 p-超可解群. □

由于正规子群、拟正规子群、s-拟正规子群、半置换必为 s-半置换子群, 故由推论 1.1.5 可得如下结论.

推论 1.1.6 设 p 为整除 $|G|$ 的素数, $H\trianglelefteq G$ 且 G/H 为 p-超可解群. 若 $F_p(H)$ 的 Sylow p-子群的极大子群在 G 中正规 (拟正规, s-拟正规或半置换), 则 G 为 p-超可解群.

下面我们主要利用极小子群的 s-半置换性来讨论群的 p-超可解性.

引理 1.1.10 设 G 为有限群, $H\trianglelefteq G$, 若 G/H 超可解, 且 H 的极小子群及 4 阶循环子群在 G 中 s-半置换, 则 G 为超可解群.

证明 设 G 为极小阶反例.

取 G 的任一极大子群 M, 则 $M/M\cap H\cong MH/H$ 超可解, 且由引理 1.1.1 知 $M\cap H$ 的极小子群及 4 阶循环子群在 M 中 s-半置换, 从而由 G 的极小性可得 M 超可解, 故 G 为内超可解群. 由 [45, 定理 7.6] 可知,

(i) G 有正规 Sylow 子群 R, $R/\Phi(R)$ 为 $G/\Phi(R)$ 的极小正规子群;

(ii) $|R/\Phi(R)|=r^a, a>1$, 且若 $r>2$, 则 $\exp(R)=r$, 若 $r=2$, 则 $\exp(R)\leq 4$.

因 $H\cap R\trianglelefteq G$, 从而 $(H\cap R)\Phi(R)/\Phi(R)\trianglelefteq G/\Phi(R)$, 由 $R/\Phi(R)$ 的极小性可得

$$(H\cap R)\Phi(R)=\Phi(R) \quad 或 \quad (H\cap R)\Phi(R)=R,$$

即 $H\cap R\leq\Phi(R)$ 或 $H\cap R=R$.

若 $H\cap R\leq\Phi(R)$, 设 L 为 R 在 G 中的 r-补, 则 $G/R\cong L$ 超可解, 从而由 $G/H\cap R\cong G/H\times G/R$ 可知 $G/H\cap R$ 超可解, 故 $G/\Phi(R)$ 超可解, 所以 G 为超可解群.

若 $H\cap R=R$, 则 $R\leq H$, 取 $x\in R\backslash\Phi(R)$, 则 $o(x)=r$ 或 4, 因 $R\leq H$, 由题设可知 $\langle x\rangle$ 在 G 中 s-半置换, 设 $|L|=q_1^{\alpha_1}\cdots q_s^{\alpha_s}$, 取 $Q_i\in\mathrm{Syl}_{q_i}(L), i=1,\cdots,s$, 则 $L=\langle Q_1,\cdots,Q_s\rangle$, 因 $\langle x\rangle Q_i=Q_i\langle x\rangle$, 故 $L\langle x\rangle=\langle x\rangle L$.

因 $L\langle x\rangle\Phi(R)\cap R=\langle x\rangle\Phi(R)$, 而 $R/\Phi(R)$ 为初等交换群, 故 $1\neq\langle x\rangle\Phi(R)\trianglelefteq\langle L,R\rangle=G$, 由 $R/\Phi(R)$ 的极小性得 $\langle x\rangle\Phi(R)=R$, 故 $R=\langle x\rangle$, 因 $G/R\cong L$ 超可解, R 为循环群, 故 G 超可解, 矛盾.

故极小反例不存在, 从而 G 为超可解群. □

由引理 1.1.10 直接可得下面的推论.

推论 1.1.7 设 G 为有限群, 若 G 的极小子群及 2^2 阶循环子群在 G 中 s-半置换, 则 G 为超可解群.

引理 1.1.11 [18, 定理 1, 命题 1] 设 $\mathcal{F}$ 为饱和群系. G 满足: $G\notin\mathcal{F}$, 且存在 G 的一个极大子群 M, 使 $M\in\mathcal{F}$, 且 $G=MF(G)$, 则 $G^{\mathcal{F}}/(G^{\mathcal{F}})'$ 是 $G/(G^{\mathcal{F}})'$ 的极小正规子群; $G^{\mathcal{F}}$ 是 p-群, p 为素数, 若 $p>2$, 则 $\exp G^{\mathcal{F}}=p$, 若 $p=2$, 则 $\exp G^{\mathcal{F}}\leq 4$, 而且 $G^{\mathcal{F}}$ 为初等交换群, 或者 $(G^{\mathcal{F}})'=Z(G^{\mathcal{F}})=\Phi(G^{\mathcal{F}})$ 为初等交换群.

引理 1.1.12 设 N 为 G 的正规子群, 则 $\forall x \in G$, 有 $\langle xN\rangle = \langle x\rangle N/N$.

证明 因对任意 $(xN)^i \in \langle xN\rangle$, 有 $(xN)^i = x^iN$, 而 $x^iN \in \langle x\rangle N/N$, 故 $(xN)^i \in \langle x\rangle N/N$, 从而 $\langle xN\rangle \subseteq \langle x\rangle N/N$. 另一方面, 对任意 $x^iN \in \langle x\rangle N/N$, 由 $x^iN = (xN)^i$ 及 $(xN)^i \in \langle xN\rangle$ 可知, $x^iN \in \langle xN\rangle$, 故 $\langle x\rangle N/N \subseteq \langle xN\rangle$. 从而 $\langle xN\rangle = \langle x\rangle N/N$. □

定理 1.1.5 设 $\mathcal{F}$ 为包含 $\mathcal{U}$ 的饱和群系, G 为有限群, 则下列条件等价:

(i) $G \in \mathcal{F}$;

(ii) 存在 G 的正规子群 H, 使得 $G/H \in \mathcal{F}$, 且 H 的极小子群及 2^2 阶循环子群在 G 中正规;

(iii) 存在 G 的正规子群 H, 使得 $G/H \in \mathcal{F}$, 且 H 的极小子群及 2^2 阶循环子群在 G 中拟正规;

(iv) 存在 G 的正规子群 H, 使得 $G/H \in \mathcal{F}$, 且 H 的极小子群及 2^2 阶循环子群在 G 中 s-拟正规;

(v) 存在 G 的正规子群 H, 使得 $G/H \in \mathcal{F}$, 且 H 的极小子群及 2^2 阶循环子群在 G 中半置换;

(vi) 存在 G 的正规子群 H, 使得 $G/H \in \mathcal{F}$, 且 H 的极小子群及 2^2 阶循环子群在 G 中 s-半置换;

(vii) 存在 G 的正规子群 H, 使得 $G/H \in \mathcal{F}$, 且 H 的极小子群及 2^2 阶循环子群在 G 中半正规.

证明 (i) $\Rightarrow$ (ii). 在 G 中令 $H = 1$ 可得.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (v) $\Rightarrow$ (vi) 由定义直接可得.

(ii) $\Rightarrow$ (vii) $\Rightarrow$ (vi) 由定义可得.

下证 (vi) $\Rightarrow$ (i).

设 G 为极小阶反例, 则 $G \notin \mathcal{F}$, 且 $1 \neq G^{\mathcal{F}} \leq H$. 由 [16, 定理 3.5], 存在 G 的极大子群 M, 使 $G/M_G \notin \mathcal{F}$, 且 $G = MF'(G)$, 其中 $F'(G) = \mathrm{Soc}(G \bmod \Phi(G))$. 由 $G/M_G \notin \mathcal{F}$ 可知 $G^{\mathcal{F}} \nleq M_G$, 从而 $G^{\mathcal{F}} \nleq M$. 由 M 的极大性可得 $G = MG^{\mathcal{F}} = MH$, 从而 $M/(M \cap H) \cong G/H \in \mathcal{F}$. 由引理 1.1.1, $M \cap H$ 的极小子群及 2^2 阶循环子群在 M 中 s-半置换, 故 M 满足题设, 由 G 的极小性得 $M \in \mathcal{F}$.

由推论 1.1.7 可知 H 超可解, 取 p 为 $|H|$ 的最大素因子, $P \in \mathrm{Syl}_p(H)$, 则 $P \trianglelefteq G$. 考虑商群 G/P, 设 X/P 为 H/P 的一个极小子群或 2^2 阶循环子群, 则易知 $X/P = RP/P$, 其中 R 为 H 的一个极小子群或 2^2 阶循环子群. 由引理 1.1.1 知 X/P 在 G/P 中 s-半置换. 从而 H/P 的极小子群及 2^2 阶循环子群在 G/P 中半置换. 又 $(G/P)/(H/P) \cong G/H \in \mathcal{F}$, 故 G/P 满足假设条件, 由 G 的极小性知 $G/P \in \mathcal{F}$, 从而 $G^{\mathcal{F}} \leq P$, 故 $G^{\mathcal{F}} \leq F(G)$. 由 $G = MG^{\mathcal{F}}$ 可得 $G = MF(G)$.

先证 $G^{\mathcal{F}}/(G^{\mathcal{F}})'$ 为 p 阶循环群.

由引理 1.1.11、引理 1.1.12 及引理 1.1.1 可知, $G^{\mathcal{F}}/(G^{\mathcal{F}})'$ 的极小子群及 4 阶循环子群均在 $G/(G^{\mathcal{F}})'$ 中 s-半置换. 再由引理 1.1.3 得 $G^{\mathcal{F}}/(G^{\mathcal{F}})'$ 的极大子群均在 $G/(G^{\mathcal{F}})'$ 中 s-半置换. 若 $G^{\mathcal{F}}/(G^{\mathcal{F}})' \leq \Phi(G/(G^{\mathcal{F}})')$, 则由 $(G/(G^{\mathcal{F}})')/(G^{\mathcal{F}}/(G^{\mathcal{F}})') \cong G/G^{\mathcal{F}} \in \mathcal{F}$ 及 $\mathcal{F}$ 为饱和群系可知 $G/(G^{\mathcal{F}})' \in \mathcal{F}$, 从而 $G^{\mathcal{F}} \leq (G^{\mathcal{F}})'$, 矛盾. 故 $G^{\mathcal{F}}/(G^{\mathcal{F}})' \not\leq \Phi(G/(G^{\mathcal{F}})')$, 从而由引理 1.1.11 知 $G^{\mathcal{F}}/(G^{\mathcal{F}})'$ 为 p 阶循环群.

下证 M 为 $G^{\mathcal{F}}/(G^{\mathcal{F}})'$ 在 G 中的补. 即证 $G = MG^{\mathcal{F}}$, 且 $M \cap G^{\mathcal{F}} \leq (G^{\mathcal{F}})'$.

因 $G = MG^{\mathcal{F}}$, 故只需证 $M \cap G^{\mathcal{F}} \leq (G^{\mathcal{F}})'$. 因为 $M \cap G^{\mathcal{F}} \trianglelefteq M$, 从而 $(M \cap G^{\mathcal{F}})(G^{\mathcal{F}})'/(G^{\mathcal{F}})' \trianglelefteq G/(G^{\mathcal{F}})'$. 由 $G^{\mathcal{F}}/(G^{\mathcal{F}})'$ 的极小性可得, $M \cap G^{\mathcal{F}} = G^{\mathcal{F}}$ 或 $M \cap G^{\mathcal{F}} \leq (G^{\mathcal{F}})'$. 若 $M \cap G^{\mathcal{F}} = G^{\mathcal{F}}$, 则 $G^{\mathcal{F}} \leq M$, 从而 $G = G^{\mathcal{F}}M = M$, 矛盾. 故 $M \cap G^{\mathcal{F}} \leq (G^{\mathcal{F}})'$. 从而 M 为 $G^{\mathcal{F}}/(G^{\mathcal{F}})'$ 在 G 中的补.

最后证极小反例不存在.

由 [50, Chapter A, 命题 15.5], 可知 $G^{\mathcal{F}}/(G^{\mathcal{F}})'$ 同构于 $\mathrm{Soc}(G/M_G) = \bar{N}$, 且 $C_{\bar{G}}(\bar{N}) = \bar{N}$, 其中 $\bar{G} = G/M_G$, 由此得 $\bar{N}$ 为 p 阶循环群, 且 $\bar{G}/C_{\bar{G}}(\bar{N}) = \bar{G}/\bar{N} \lesssim \mathrm{Aut}(\bar{N})$ 为阶整除 $p-1$ 的循环群, 故 $G/M_G \in \mathcal{U} \subseteq \mathcal{F}$, 与 $G/M_G \notin \mathcal{F}$ 矛盾. 故 $G \in \mathcal{F}$. □

引理 1.1.13 [10, 定理] *设 $\mathcal{F}$ 为包含 $\mathcal{U}$ 的饱和群系, G 为有限群, 则下列条件等价:*

(a) $G \in \mathcal{F}$;

(b) *存在 G 的可解正规子群 H 使 $H \trianglelefteq G, G/H \in \mathcal{F}$, 且 $F(H)$ 的极小子群及 2^2 阶循环子群在 G 中 s-拟正规.*

由引理 1.1.6、引理 1.1.13 及定义可得如下结论.

定理 1.1.6 *设 $\mathcal{F}$ 为包含 $\mathcal{U}$ 的饱和群系, G 为有限群, 则下列条件等价:*

(i) $G \in \mathcal{F}$;

(ii) *存在 G 的可解正规子群 H 使 $G/H \in \mathcal{F}$, 且 $F(H)$ 的极小子群及 2^2 阶循环子群在 G 中正规;*

(iii) *存在 G 的可解正规子群 H 使 $G/H \in \mathcal{F}$, 且 $F(H)$ 的极小子群及 2^2 阶循环子群在 G 中拟正规;*

(iv) *存在 G 的可解正规子群 H 使 $G/H \in \mathcal{F}$, 且 $F(H)$ 的极小子群及 2^2 阶循环子群在 G 中 s-拟正规;*

(v) *存在 G 的可解正规子群 H 使 $H \trianglelefteq G, G/H \in \mathcal{F}$, 且 $F(H)$ 的极小子群及 2^2 阶循环子群在 G 中半置换;*

(vi) *存在 G 的可解正规子群 H 使 $H \trianglelefteq G, G/H \in \mathcal{F}$, 且 $F(H)$ 的极小子群及 2^2 阶循环子群在 G 中 s-半置换;*

(vii) *存在 G 的可解正规子群 H 使 $H \trianglelefteq G, G/H \in \mathcal{F}$, 且 $F(H)$ 的极小子群及 2^2 阶循环子群在 G 中半正规.*