普通高等教育“十三五”规划教材

数学研究与论文写作指导

韩茂安　编著

科学出版社

普通高等教育“十三五”规划教材

数学研究与论文写作指导

韩茂安 编著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书围绕数学写作来展开，全书分 4 章. 第 1 章是写作基本训练，包括写作基本原则、范例详解和习题演练. 第 2 章全文引用与数学分析和常微分方程有关的带有一定学术性的三篇数学教研论文，重点放在对这几篇论文的阅读理解、问题思考和总结讨论上，包括论文的写作技巧和关键知识点以及对论文的深度认识与评注. 第 3 章论述论文的一般写作格式、方法和注意事项，列举了一些英文数学论文的题目与摘要、引言，以及一些英文数学论文写作的常用语句等. 第 4 章可分为三个部分，第一部分是作者根据自己的科研体会谈一谈如何进行课题选择和开展学术研究，第二部分给出三个课题的研究实例，第三部分提供十个关于一维周期微分方程和平面自治系统的研究课题，包括研究背景和任务以及通过钻研这些课题有可能获得的新结果.

本书可作为高等院校数学专业本科生、研究生以及年轻教师科研起步的学习用书，也可作为每周 2~3 课时的论文写作课程的教材.

图书在版编目（CIP）数据

数学研究与论文写作指导/韩茂安编著. —北京：科学出版社, 2018.7
普通高等教育“十三五”规划教材
ISBN 978-7-03-058554-7

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①韩… Ⅲ. ①数学-英语-论文-写作-高等学校-教材 Ⅳ. ①O1

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2018）第 191848 号

责任编辑：张中兴 梁 清 孙翠勤／责任校对：彭珍珍
责任印制：吴兆东／封面设计：迷底书装

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京教图印刷有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2018 年 7 月第 一 版 开本：720 × 1000 B5
2018 年 10 月第二次印刷 印张：10 1/4
字数：206 000

定价：49.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

作者简介

韩茂安，国家二级教授、博士生导师，曾获得享受国务院特殊津贴专家、国家中青年突出贡献专家称号，主持教育部新世纪优秀人才基金，获得宝钢优秀教师奖以及上海市优秀学科带头人计划支持，作为第一完成人获得教育部科技进步一等奖，上海市自然科学二等奖、三等奖以及上海市教学成果二等奖。公开发表学术论文300余篇，教学研究论文10余篇，先后创办两个国际数学杂志 *Communication on Pure and Applied Analysis* (2002年创刊，2004年成为SCIE杂志)与 *Journal of Applied Analysis and Computation* (2011年创刊，2014年成为SCIE杂志)，出版教材、专著与学习指导书10余部，主要著作列举如下：

[1] 非线性系统理论和方法(2001)

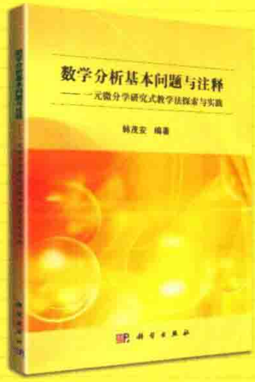
[2] 常微分方程(2010)

[3] 微分方程基本理论(2011)

[4] *Bifurcation Theory of Limit Cycles* (2013)

[5] 数学分析基本问题与注释（2018）

[6] 常微分方程基本问题与注释（2018）



▶ 书名：数学分析基本问题与注释

▶ 书号：978-7-03-055046-0

扫描以下二维码，享受更多优惠

▶ 书名：常微分方程基本问题与注释

▶ 书号：978-7-03-055048-4

扫描以下二维码，享受更多优惠

前言 Preface

在中学阶段，我们学过“作文”这门课程，并且通过这门课程也亲笔写过不少作文，其中包括叙事性文章和论述性文章等形式，这门课程重点考验的是语文写作水平．在大学阶段，数学专业的大学生最初学习的是数学分析，这门课程有一个特点，就是作业量大．为什么要做那么多的作业呢？理由是众所周知的：这样做可以促使你更好地理解和掌握所学知识，更好地培养运用知识来解决问题的能力．其实，做作业还有一个潜在的作用：培养数学写作能力．这一点我们在大学学习中重视不够，训练也不够．

什么是写作能力呢？我们认为，写作能力应该是文字运用和组织的能力．具体到数学写作，则所用的文字不单单是单词与词语，还包括数学公式、图表与运算推理等．

我们在大学阶段学过几十门课程，包括数学分析、高等代数、常微分方程等．这些课程都有教材和作业，在学习教材时我们往往把重点放在内容理解上，而对章节内容的写作技巧关注不够．其实，我们阅读教材时除了理解和掌握课本知识以外，还应该观察和学习每一章、每一节、每一个例题是怎么写作的，进一步还可以思考这样写作的合理性以及改进的可能性．你经常这样做，你的写作水平必定不断提高．数学写作的主要学习手段就是阅读数学教材、分析数学教材、认真做好习题，而要想有更进一步的提升，就要阅读论文、亲自动手写论文，只有在亲自完成几篇论文之后，写作水平才能有大的进步．本书就是为提高本科生、研究生的数学学习与论文写作能力而设计的．

本书第 1 章是写作基本训练，首先阐述写作基本原则，然后通过一系列范例详解与评注来学习写作，进一步通过习题演练来体验写作，再通过老师在课堂上对习题演练的修改与批注来提高认识和写作水平 (如果没有老师教学这个环节，只好自己给自己的练习题目批注了)．第 2 章，主要是阅读理解、回答问题、总结提高．我们选了几篇与数学分析和常微分方程有关的数学论文 (数学专业本科三、四年级学生以及研究生等都能够看懂这些论文)，课前精读和分析这些论文，课上回答与这些论文有关的问题，并进行讨论和交流，重点是学习论文的写作技巧和关键知识点以及对论文的深度认识与评注．第 3 章，论述论文的一般写作格式和注意事项，特别地列举了一些英文论文的题目与摘要、引言，以及一些数学论文的英文常用语句

等, 供读者学习参考. 第 4 章由四节组成, 但可分为三部分, 第一部分是作者本人根据自己的科研体会谈一谈如何进行课题选择和开展学术研究, 并简单介绍了作者的部分研究经历; 第二部分给出三个课题的研究实例, 实际上可以认为是三篇研究短文, 有一定学术性, 丰富了教学内容, 也体现了一种数学创新思维的方式. 第三部分是作者根据自己的科研经历提供十个关于一维周期微分方程和平面自治系统的研究课题, 以及相关的背景知识. 这些课题虽不是全新的, 但希望读者当做新课题来独立完成, 而且有可能进一步获得新结果. 这样做, 不但能够提高写作能力, 还能提高科研能力. 如果读者能够圆满地完成其中一个课题, 那么这门课的成绩就是优秀, 学习这门课的目的就很好地达到了.

写作是一门学问, 也是一门艺术, 需要不断学习和实践. 数学写作不同于其他学科的写作, 它有更强的逻辑性, 而数学论文的写作又必须有新成果. 作者曾阅读过汤涛与丁玖所编著的《数学之英文写作》(高等教育出版社, 2013), 内容涉及数学的英文写作与英文演讲等, 对本科生、研究生、青年数学工作者的英文写作与交流具有很好的参考价值. 作者写作本书的主要目的是通过范例详解、习题演练、精读分析和课题研究的指导与实践等环节来培养本科生、研究生的数学学习与写作能力. 作者希望这样的选材对培养本科生、研究生的数学研究能力和提高他们的数学写作水平能够产生良好的促进效果. 作者认为, 培养数学写作能力难以避开数学本身的具体内容.

本书适合于数学各专业高年级本科生和理工科研究生阅读 (必备知识是本科生数学分析与常微分方程课程的基本内容), 也可以作为 36~54 课时 (每周 2 课时或 3 课时) 的课程向他们开设数学论文写作课程, 而且课程的中心环节应该是课堂互动, 即同学上台交流习作并讨论, 然后老师当场做出点评与修改, 课程的最后阶段是完成一个课题任务.

本书在成稿过程中, 科学出版社的张中兴老师在内容取材等方面提出了有价值的建议. 初稿完成后山西大学的靳祯教授仔细审阅了书稿, 并提出了宝贵的修改意见. 华侨大学的李继彬教授、Alabama 大学的李佳教授和江南大学的辜姣教授也都对书稿做了润色. 该书的初稿曾在研究生讨论班上试用过几次, 得到研究生的积极响应. 该书的部分内容也曾在多个大学做过介绍. 最后科学出版社的梁清老师又对书稿清样进行了认真的校对与规范. 作者在此向曾经施助于该书的所有人表示深深的感谢!

本书在内容上是一种全新的尝试, 但限于作者水平, 本书在内容和写作两方面都会存在各种不足, 恳请广大读者批评指正.

韩茂安

2018 年 3 月于上海

目录 Contents

前言

第 1 章　写作基本原则与训练 / 1

1.1　写作基本原则 / 2

1.2　一元微积分学 / 4

1.2.1　范例详解与评注 / 4

1.2.2　习题演练与讨论 / 11

1.3　多元微积分学与含参量积分 / 12

1.3.1　范例详解与评注 / 12

1.3.2　习题演练与讨论 / 23

1.4　无穷级数与曲线积分 / 23

1.4.1　范例详解与评述 / 23

1.4.2　习题演练与讨论 / 31

1.5　一阶常微分方程 / 33

1.5.1　范例详解与评述 / 33

1.5.2　习题演练与讨论 / 44

第 2 章　论文精读与分析 / 45

2.1　多元向量函数的中值定理及应用 / 46

2.1.1　论文原文 / 46

2.1.2　阅读理解与分析 / 54

2.2　A new proof of the implicit function theorem / 55

2.2.1　论文原文 / 55

2.2.2　阅读理解与分析 / 60

2.2.3　隐函数定理应用举例 / 62
2.3　关于解的延拓定理之注解 / 66
2.3.1　论文原文 / 66
2.3.2　阅读理解与分析 / 76
第 3 章　论文写作纲要与英文常用语 / 79
3.1　论文题目与摘要 / 80
3.2　论文正文 / 84
3.2.1　论文基本格式 / 84
3.2.2　引言的写作 / 85
3.2.3　预备知识的写作 / 86
3.2.4　主要结果与证明的写作 / 86
3.2.5　论文的修改 / 87
3.2.6　"引言"范例 / 88
3.3　致谢与参考文献 / 97
3.4　英语论文常用词语 / 98
3.5　关于学术研究的重要提醒 / 102
3.6　学术报告的 PPT 制作 / 103
第 4 章　课题研究方法与论文写作实践 / 105
4.1　课题选择与研究方法 / 106
4.1.1　关于课题选择 / 106
4.1.2　关于课题研究 / 108
4.1.3　课题选择与研究经历举例 / 110
4.2　课题研究之例 / 117
4.2.1　一类线性微分方程的渐近性质 / 117
4.2.2　一类有限光滑函数之标准形及其应用 / 123
4.2.3　关于一个积分中值定理的更正 / 129
4.3　课题研究实践: 一维周期系统 / 136
4.3.1　周期解的个数 / 137

4.3.2　周期解的重数及其扰动分支 / 138
4.3.3　平均方法与含小参数方程 / 140
4.3.4　一类分段光滑的周期系统 / 142
4.4　课题研究实践: 平面自治系统 / 144
4.4.1　两类静态分支问题 / 144
4.4.2　多重极限环之扰动分支 / 145
4.4.3　中心与焦点的判定问题 / 146
4.4.4　C^k 微分系统的 Hopf 分支 / 147
4.4.5　C^∞ 光滑近哈密顿系统的 Hopf 分支 / 149
4.4.6　分段光滑近哈密顿系统的极限环分支 / 151
参考文献 / 153
后记 / 156

第 1 章　写作基本原则与训练

本章的主要任务是进行数学写作基本训练，主要方法是通过例题示范和习题演练来增强写作技能．我们的重点不是在提高解难题能力，而是通过解题论证这个过程提高数学写作能力．本章的内容都是经过筛选、构思和精心安排编写而成的．首先我们来探讨数学写作的基本原则．

1.1 写作基本原则

谈到数学写作的基本原则, 难以回避的问题是为什么要写作? 为此我们需要了解什么是数学以及其特点.

根据《数学史概论》[1], 公元前 4 世纪希腊哲学家亚里士多德将数学定义为量的科学, 19 世纪恩格斯在论述数学的本质时, 认为数学是研究现实世界的空间形式与数量关系的科学. 数学大师陈省身在其文集 [2] 中精辟地指出, 数学是一门演绎的学问: 从一组公理出发, 经过逻辑推理, 获得结论. 柯朗和罗宾在其著作 [3] 中则明确指出, 对有学问的人和对普通人一样, 要回答“什么是数学”这个问题, 只能通过在数学中的切身体验, 而不靠什么大道理.

不论怎么来定义数学, 科学家们都一致地认为 (正如 A. D. 亚历山大洛夫等在其著作 [4] 中所述的), 数学的特点主要有三条: 第一是抽象性, 第二是精确性, 或者说是逻辑的严密性以及结论的确定性, 最后是它应用的极端广泛性. 英国哲学家、数学家伯特兰 • 罗素 (1872—1970) 则从哲学的层面认为, 数学不但拥有真理, 而且也具有至高无上的美.

于是, 很自然地就产生这样一个问题: 既然数学这么好, 那么怎么体现、表达她的“好”呢? 数学理论又是如何传承下去的呢? 答案应当是通过数学的写作来实现这项任务, 也就是说, 数学的理论与方法全靠数学写作来体现出来. 因此, 作为传播和认识数学的手段, 数学写作起着至关重要的作用. 李大潜在文献 [5] 中明确总结了一个学习数学的“四字诀”, 即“少、慢、精、深”, 他解释说, 我觉得, 数学学习的好坏要看是否理解深入、运作熟练及表达简明这三个方面. 我们看到所涉及三个方面之每一方面都与数学写作有关. 他还强调“学好数学, 要重视严格的数学训练, 其中很重要的一环, 是要认真做好习题. 苏步青先生曾经做过一万道微积分题, 他功底扎实, 再烦再难的推导及计算都不在话下, 绝不是偶然的”. 因此, 学好数学的重要一环是“做好习题”, 这个要求比“会做习题”更高一层, 高在什么地方呢? 我认为有两点具体体现, 一是解题方法, 二是写作水平.

一般来说, 数学写作是指论文或著作的写作, 其实, 写作的最基本训练是“做好习题”. 大学基础课程的例题与习题有许多类型, 但主要类型不外乎两种, 即证明

题和计算题. 无论什么类型的题目, 在解答论证的时候应该做到以下三条基本要求(基本原则).

1. 结构合理、条理清楚 (框架构思);
2. 推导无误、论证严密 (细节安排);
3. 叙述严谨、语句通顺 (语言表达).

这三条基本原则, 大家一看都能明白, 但真要做到则需要足够量的练习和较长时间的积累与实践. 根据本人长期从事数学教学和研究的经验, 对这三条基本原则做如下解读.

第一条: 结构合理、条理清楚. 证明一个结论, 往往有若干步骤, 到底分几步完成、每一步的主要任务是什么、每一步出现在哪里等等一定要经过周密思考, 并做到心中有数. 同样, 写作一篇论文往往分若干节内容, 到底分几节完成、每一节的主要任务是什么、每一节出现在哪里也要认真思考. 有时候某一部分内容可以出现在不同的地方, 这时一定要想一想放在何处最合适.

如果是写一本书, 就要好好构思一下全书分几章完成, 每一章写什么内容, 以及这一章内容分成几节来写. 无论是一本书, 还是一篇文章, 甚至一个章节, 都会涉及结构与条理问题, 每一部分内容都要力求层次清晰、条理清楚、表述准确、语义连贯、衔接自然. 首次出现的记号或概念等都应当及时地给予解释. 公式的编排要整齐美观, 其中出现的较复杂的表达式可以引入新的记号来代替. 段落安排、语句顺序甚至标点符号的使用等都要仔细琢磨.

第二条: 推导无误、论证严密. 数学推导难免出错, 例如, 正负号搞反了, 系数算错了, 有一项给漏掉了等等. 因此, 每一步的推导都要反复检查验算, 直至确信正确无误. 在证明过程中, 目标是什么, 用什么方法来实现最好有所交代, 每一步成立的理由要写清楚. 需要时要对公式进行编号, 以便后面引用. 论证过程要层次分明, 要把自己心中明白的东西清清楚楚写出来, 以使得别人看起来容易接受和理解, 尽量不要出现跳跃.

第三条: 叙述严谨、语句通顺. 即使是数学论文写作, 公式也不能一个接一个出现, 而应该有足够多的语言文字的阐述和解释. 这样做不但帮助读者理解, 增加可读性, 还能使内容具有趣味性, 增加美感, 令人赏心悦目. 因此, 所用语言一定要通顺优美, 又要通俗易懂且简明扼要. 此外, 在引用已有的概念和结论时要注明最

初的出处, 若无法知道最初的出处, 至少也要说明在哪里可以找到, 以示对原创者和历史的尊重. 否则, 读者就分不清你引用的概念与结论是别人的还是你自己的.

在本章下面几节将通过一些例题和习题来进行写作基本训练. 这些例题和习题都是与大学课程“数学分析”和“常微分方程”的基本内容有关的, 也就是说利用这两门课的基本知识就可以理解和完成这些问题. 我们强调的关键点不是问题的难度, 而是写作技艺的训练, 即如何依照上面给出的写作三条基本要求把给定的问题解决了. 下面给出例子, 读者可以先看例题本身的要求, 并尝试自己完成它 (先分析思考解题思路, 再比较详细认真地写出解答), 然后再对照例题的解答过程. 在每个例题之后, 我们都给出了针对该例的评述与分析, 内容或长或短, 希望这样做有助于增强写作技艺的学习效果.

1.2　一元微积分学

1.2.1　范例详解与评注

这一节以及下面几节训练方式基本一样, 即先给出三个例题, 接着是三个习题演练. 首先, 我们给出涉及数列极限的例子.

例 2.1　证明: 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbf{R}$, 则

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1+\cdots+a_n}{n} = a$;

(ii) 当 $a_n > 0(n \geqslant 1)$ 时有 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1\cdots a_n} = a$.

证明　(i) 利用极限定义来证明. 不妨设 $a=0$(这样可使证明有所简化), 否则令 $b_n = a_n - a$ 即可. 于是, $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, N_1 > 0$, 使当 $n \geqslant [N_1]+1$ 时 $|a_n| < \varepsilon$. 要证

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1+\cdots+a_n}{n} = 0. \tag{1.1}$$

记 $n_1 = [N_1]$, $M = |a_1+\cdots+a_{n_1}|$, 则有

$$\left|\frac{a_1+\cdots+a_{n_1}+\cdots+a_n}{n}\right| < \frac{M}{n} + \frac{n-n_1}{n}\varepsilon < \frac{M}{n} + \varepsilon, \quad n \geqslant n_1.$$

令 $N=\dfrac{M}{\varepsilon}$, 则当 $n>N$ 时 $\dfrac{M}{n}<\varepsilon$, 从而有

$$\left|\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\right|<2\varepsilon,\quad n>\max\{N,n_1\}.$$

即知 (1.1) 式成立.

(ii) 因为 $a_n>0$, 我们有 $a\geqslant 0$. 下面的证明需要用到下述不等式 (称其为均值不等式)

$$\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}\leqslant\frac{a_1+\cdots+a_n}{n},\tag{1.2}$$

其中等号成立当且仅当 $a_1=\cdots=a_n$.

若 $a=0$, 则由结论 (i), 并对不等式 (1.2) 两边取极限 (利用两边夹定理), 即知结论成立. 设 $a>0$, 此时不妨设 $a=1$(否则, 令 $b_n=a_n/a$). 我们要证

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}=1.\tag{1.3}$$

首先, 与不等式 (1.2) 类似, 成立

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}}=\sqrt[n]{\frac{1}{a_1}\cdots\frac{1}{a_n}}\leqslant\frac{\dfrac{1}{a_1}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}}{n}.\tag{1.4}$$

进一步, 由 (1.2) 式和 (1.4) 式可得

$$\left(\frac{\dfrac{1}{a_1}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}}{n}\right)^{-1}\leqslant\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}\leqslant\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}.\tag{1.5}$$

注意到 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{a_n}=1$, 利用结论 (i), 我们得到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{a_1}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}=1.\tag{1.6}$$

因此, 利用 (1.6) 式, 对 (1.5) 式应用两边夹定理即得 (1.3) 式.

评注与分析 例 2.1 的结论出现于许多数学分析教材或辅导书中, 例见文献 [6] 第二章. 其结论 (i) 的证明可分为两步, 第一步, 不妨设 $a=0$. 第二步, 利用极限定义证明 (1.1). 对结论 (ii) 的证明, 分两种情况 $a=0$ 与 $a\neq 0$ 来处理, 而对后一情况, 又不妨设 $a=1$. 证明的关键是利用结论 (i) 和均值不等式 (1.2). 与文献 [6]

给出的证明相比, 上面我们补充给出了 (1.1)、(1.3) 与 (1.6) 式, 这样显得条理更加清楚, 看起来也更容易一些. 下面我们补充证明均值不等式 (1.2). 用数学归纳法.

记

$$S_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}, \quad P_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}.$$

易知 $\sqrt{a_1 a_2} \leqslant \frac{a_1 + a_2}{2}$, 即当 $n = 2$ 时命题成立. 假设当 $n = k$ 时命题成立, 即有

$$\sqrt[k]{a_1 a_2 \cdots a_k} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k}{k},$$

或 $P_k \leqslant S_k$. 要证当 $n = k + 1$ 时命题成立, 即 $P_{k+1} \leqslant S_{k+1}$.

注意到

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= \frac{1}{2k}[(k+1)S_{k+1} + (k-1)S_{k+1}] \\ &= \frac{1}{2k}\left[\left(\sum_{i=1}^{k} a_i\right) + (a_{k+1} + (k-1)S_{k+1})\right]. \end{aligned}$$

由归纳假设可知

$$\sum_{i=1}^{k} a_i \geqslant k P_k, \quad a_{k+1} + (k-1)S_{k+1} \geqslant k\sqrt[k]{a_{k+1} S_{k+1}^{k-1}},$$

故有

$$\begin{aligned} S_{k+1} &\geqslant \frac{1}{2k}\left(kP_k + k\sqrt[k]{a_{k+1} S_{k+1}^{k-1}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(P_k + \sqrt[k]{a_{k+1} S_{k+1}^{k-1}}\right) \\ &\geqslant \sqrt{P_k \sqrt[k]{a_{k+1} S_{k+1}^{k-1}}} \\ &= \sqrt[2k]{\left(\prod_{i=1}^{k+1} a_i\right) S_{k+1}^{k-1}} \\ &= \sqrt[2k]{P_{k+1}^{k+1} S_{k+1}^{k-1}}, \end{aligned}$$

上式第三步利用了 $n = 2$ 时的命题之结论. 于是

$$S_{k+1}^{2k} \geqslant P_{k+1}^{k+1} S_{k+1}^{k-1},$$

即

$$S_{k+1}^{k+1} \geqslant P_{k+1}^{k+1},$$

从而成立

$$S_{k+1} \geqslant P_{k+1}.$$

即为所证.

应当指出, 从上面的证明可以看出, 第一步先证明当 $n=2$ 时命题成立 (而不是证明当 $n=1$ 时命题成立), 因为之后的证明需要利用这个结论.

数学归纳法 (简称归纳法) 是一种重要且常用的数学方法. 这个方法有两个方面用途. 一方面是在课题研究中归纳出一个新命题, 就是说通过对 $n=1,2,3$ 等特殊情况下的结论来归纳出一个对任意的 n 都成立的一般结论. 另一方面是在证明一个已知命题时用到归纳法, 这时第一步是证明当 $n=1$ 或 $n=2$ 时命题成立, 第二步是假设当 $n=k$ 或 $n \leqslant k$ 时命题成立, 利用这个归纳假设以及已知的数学知识证明当 $n=k+1$ 时命题成立. 在第二步中, 为了条理清楚, 往往出现这样的话:"要证明当 $n=k+1$ 时命题成立" 以及 "利用归纳假设, 我们有" 等.

在一元微积分学中, 微分中值定理与积分中值定理是非常重要的内容之一. 下面的两个例子与这部分内容有关.

例 2.2 证明对任意 $x>0$, 存在 $\theta=\theta(x) \in (0,1)$ 使成立

(1) $\ln(1+x)-\ln x = \dfrac{1}{x+\theta}$, 且

(2) θ 关于 x 是严格增加的, 且 $\lim\limits_{x\to 0+} \theta(x)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \theta(x)=\dfrac{1}{2}$.

证明 设 $x>0$, 对函数 $\ln x$ 在区间 $[x,1+x]$ 上应用拉格朗日中值定理即得结论 (1). 由此可解得

$$\theta = \frac{1}{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)} - x \equiv \theta(x), \tag{1.7}$$

由此易见 $\lim\limits_{x\to 0+} \theta(x)=0$, 且当 $x>0$ 充分小时 $\theta(x)$ 等价于 $-(\ln x)^{-1}$, 即

$$\frac{\theta(x)}{-(\ln x)^{-1}} \to 1 \ (x \to 0+).$$